

专题 03 实数 二次根式 压轴题

考点归纳

考点 01 数的开方小数点移动规律

考点 02 新定义题

考点 03 材料、规律题

考点 04 反证法证明无理数

考点 05 折纸问题；用数轴上的点表示无理数的综合应用

考点 06 二次根式——材料、规律题综合

考点 07 二次根式——最值问题

考点 08 二次根式——几何应用

考点专练

考点 01 数的开方小数点移动规律

1. 观察下表：

a	0.0001	0.01	1	100	10000
$\sqrt{a}$	0.01	0.1	1	10	100

(1) 由上表你发现了什么规律？请用语言叙述这个规律：_____；

(2) 根据你发现的规律填空：已知 $\sqrt{5.217} \approx 2.284$ ， $\sqrt{521.7} \approx 22.84$ ，

则 $\sqrt{0.05217} \approx$ _____， $-\sqrt{52170} \approx$ _____；

若 $\sqrt{x} \approx 0.02284$ ，则 $x \approx$ _____；

(3) 拓展提升：

① 已知 $\sqrt[3]{0.000456} \approx 0.07697$ ，则 $-\sqrt[3]{456} \approx$ _____；

② 已知 $\sqrt[3]{3} \approx 1.442$ ， $\sqrt[3]{30} \approx 3.107$ ，则 $\sqrt[3]{3000} \approx$ _____。

2. 根据下表回答下列问题：

x	17	17.1	17.2	17.3	17.4	17.5	17.6	17.7	17.8	17.9	18
x^2	289	292.41	295.84	299.29	302.76	306.25	309.76	313.29	316.84	320.41	324

(1) 295.84 的算术平方根是_，316.84 的平方根是_；

(2) $\sqrt{299.3} \approx$ _；(保留一位小数)

(3) $\sqrt{29241} =$ _， $\sqrt{3.1329} =$ _；

(4) 若 $\sqrt{n}$ 介于 17.6 与 17.7 之间，则满足条件的整数 n 有_个；

(5) 若 $\sqrt{325}$ 这个数的整数部分为 m ，求 $\sqrt{3m-5} - (m-16)^3$ 的值。

3. 探索与应用。

(1) 先填写下表，通过观察后再回答问题：

a	· · ·	0.0001	0.01	1	100	10000	· · ·
$\sqrt{a}$	· · ·	0.01	x	1	y	100	· · ·

① 表格中 $x =$ _____； $y =$ _____；

② 从表格中探究 a 与 $\sqrt{a}$ 的数位的规律，并利用这个规律解决下面两个问题：

已知 $\sqrt{3.24} = 1.8$ ，若 $\sqrt{a} = 180$ ，则 $a =$ _____。

已知 $\sqrt{25.36} = 5.036$ ， $\sqrt{253.6} = 15.906$ ，则 $\sqrt{253600} =$ _____。

(2) 阅读例题，然后回答问题：

例题：设 a 、 b 是有理数，且满足 $a + \sqrt{2}b = 3 - 2\sqrt{2}$ ，求 $a + b$ 的值。

解：由题意得 $(a-3) + (b+2)\sqrt{2} = 0$ ，因为 a 、 b 都是有理数，所以 $a-3$ ， $b+2$ 也是有理数，由于 $\sqrt{2}$ 是无理数，所以 $a-3 = 0$ ， $b+2 = 0$ ，所以 $a = 3$ ， $b = -2$ ，所以 $a + b = 3 + (-2) = 1$ 。

问题：设 x 、 y 都是有理数，且满足 $x^2 - 2y + \sqrt{5}y = 10 + 3\sqrt{5}$ ，求 x^y 的值。

考点 02 新定义题

4. 对于实数 a ，我们规定：用符号 $[\sqrt{a}]$ 表示不大于 $\sqrt{a}$ 的最大整数，称 $[\sqrt{a}]$ 为 a 的根整数，例如： $[\sqrt{9}] = 3$ ，

$$[\sqrt{10}]=3.$$

(1) 仿照以上方法计算： $[\sqrt{4}] = \underline{\quad}$ ； $[\sqrt{26}] = \underline{\quad}$ 。

(2) 若 $[\sqrt{x}]=1$ ，写出满足题意的 x 的整数值 $\underline{\quad}$ 。

如果我们对 a 连续求根整数，直到结果为1为止。例如：对10连续求根整数2次 $[\sqrt{10}]=3 \rightarrow [\sqrt{3}]=1$ ，这时候结果为1。

(3) 对100连续求根整数， $\underline{\quad}$ 次之后结果为1。

(4) 只需进行3次连续求根整数运算后结果为1的所有正整数中，最大的是 $\underline{\quad}$ 。

5. 阅读下面的文字，解答问题。

对于实数 a ，我们规定：用符号 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数；用 $\{a\}$ 表示 a 减去 $[a]$ 所得的差。

例如： $[\sqrt{3}]=1$ ， $[2.2]=2$ ， $\{\sqrt{3}\}=\sqrt{3}-1$ ， $\{2.2\}=2.2-2=0.2$ 。

(1) 仿照以上方法计算： $[\sqrt{7}] = \underline{\quad}$ ， $\{5-\sqrt{7}\} = \underline{\quad}$ ；

(2) 若 $[\sqrt{x}]=1$ ，写出所有满足题意的整数 x 的值： $\underline{\quad}$ 。

(3) 已知 y_0 是一个不大于280的非负数，且满足 $\{\sqrt{y_0}\}=0$ 。我们规定： $y_1=[\sqrt{y_0}]$ ， $y_2=[\sqrt{y_1}]$ ， $y_3=[\sqrt{y_2}]$ ，...，以此类推，直到 y_n 第一次等于1时停止计算。当 y_0 是符合条件的所有数中的最大数时，此时 $y_0 = \underline{\quad}$ ， $n = \underline{\quad}$ 。

6. 新定义：若无理数 $\sqrt{T}$ 的被开方数 T （ T 为正整数）满足 $n^2 < T < (n+1)^2$ （其中 n 为正整数），则称无理数 $\sqrt{T}$ 的“整数区间”为 $(n, n+1)$ ；同理规定无理数 $-\sqrt{T}$ 的“整数区间”为 $(-n-1, -n)$ 。例如：因为 $1^2 < 2 < 2^2$ ，所以 $1 < \sqrt{2} < 2$ ，所以 $\sqrt{2}$ 的“整数区间”为 $(1, 2)$ ， $-\sqrt{2}$ 的“整数区间”为 $(-2, -1)$ 。请解答下列问题：

(1) $\sqrt{19}$ 的“整数区间”是 $\underline{\quad}$ ； $-\sqrt{26}$ 的“整数区间”是 $\underline{\quad}$ ；

(2) 若无理数 $-\sqrt{a}$ （ a 为正整数）的“整数区间”为 $(-3, -2)$ ， $\sqrt{a+3}$ 的“整数区间”为 $(3, 4)$ ，求 $\sqrt[3]{a+1}$ 的值；

(3) 实数 x ， y ， m 满足关系式： $\sqrt{2x+3y-m} + \sqrt{3x+4y-2m} = \sqrt{x+y-2026} + \sqrt{2026-x-y}$ ，求 m 的算术平方根的“整数区间”。

7. 新定义：若无理数 $\sqrt{T}$ 的被开方数 T （ T 为正整数）满足 $n^2 < T < (n+1)^2$ （其中 n 为正整数），则称无理数 $\sqrt{T}$ 的“青一区间”为 $(n, n+1)$ ；同理规定无理数 $-\sqrt{T}$ 的“青一区间”为 $(-n-1, -n)$ 。例如：因为 $1^2 < 2 < 2^2$ ，所以 $\sqrt{2}$ 的“青一区间”为 $(1, 2)$ ， $-\sqrt{2}$ 的“青一区间”为 $(-2, -1)$ ，请回答下列问题：

- (1) $\sqrt{17}$ 的“青一区间”为_； $-\sqrt{23}$ 的“青一区间”为_；
- (2) 若无理数 $\sqrt{a}$ (a 为正整数) 的“青一区间”为 $(2,3)$ ， $\sqrt{a+3}$ 的“青一区间”为 $(3,4)$ ，求 $\sqrt[3]{a+1}$ 的值．
- (3) 实数 x, y ，满足关系式： $\sqrt{x-3} + \left| 2023 + (y-4)^2 \right| = 2023$ ，求 $\sqrt{xy}$ 的“青一区间”．

考点 03 材料、规律题

8．阅读材料：

$\sqrt{1}$ 和 $\sqrt{4}$ 为整数， $4-1=3=2 \times 1+1$ ；

$\sqrt{4}$ 和 $\sqrt{9}$ 为整数， $9-4=5=2 \times 2+1$ ；

$\sqrt{9}$ 和 $\sqrt{16}$ 为整数， $16-9=7=2 \times 3+1$ ；

...

小明发现结论：若 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 为相邻的两个整数，其中 $a < b$ ，则有 $b-a=2\sqrt{a}+1$ ．并给出了证明：

$\therefore \sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 为相邻的两个整数， $\therefore \sqrt{a}+1=\sqrt{b}$ ．

等式两边同时平方，得： $a+2\sqrt{a}+1=b$ ．

_____得：_____．

请根据以上材料，解决以下问题：

- (1) 请补全小明的证明过程．
- (2) 若 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{a+11}$ 为两个相邻整数，则 $a=$ _____．
- (3) 若 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{a+216}$ 为相差 4 的两个整数，求 a 的值．

9．先观察下列等式，再回答问题：

$$\textcircled{1} \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}=1\frac{1}{2}；$$

$$\textcircled{2} \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}=1\frac{1}{6}；$$

$$\textcircled{3} \sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+1}=1\frac{1}{12}；$$

- (1) 根据上面三个等式，请猜想 $\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}$ 的结果（直接写出结果）

(2)根据上述规律，解答问题：

设 $m = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2023^2} + \frac{1}{2024^2}}$ ，求不超过 m 的最大整数是多少？

10. 我国数学家华罗庚在一次出国访问途中，看到飞机上邻座的乘客阅读的杂志上有一道智力题：求 59319 的立方根．华罗庚脱口说出答案，众人十分惊奇，忙问计算的奥妙，你知道他是怎样迅速准确地计算出结果的吗？下面是小明的探究过程，请补充完整：

(1)求 $\sqrt[3]{59319}$ ．

①由 $10^3 = 1000$ ， $100^3 = 1000000$ ，可以确定 $\sqrt[3]{59319}$ 是 位数；

②由 59319 的个位上的数是 9，可以确定 $\sqrt[3]{59319}$ 的个位上的数是 ；

③如果划去 59319 后面的三位 319 得到数 59，而 $3^3 = 27, 4^3 = 64$ ，可以确定 $\sqrt[3]{59319}$ 的十位上的数是 ，由此求得 $\sqrt[3]{59319} = \underline{\hspace{1cm}}$ ．

(2)请你根据 (1) 中小明的方法，完成如下填空：

① $\sqrt[3]{-117649} = \underline{\hspace{1cm}}$ ，② $\sqrt[3]{0.531441} = \underline{\hspace{1cm}}$ ．

考点 04 反证法证明无理数

11. 【阅读理解】公元前 5 世纪，毕达哥拉斯学派中的一名成员希伯索斯发现了无理数 $\sqrt{2}$ ，导致了第一次数学危机．

定义：可以表示为两个互素整数的商的形式的数称为有理数，整数可以看做分母为 1 的有理数；反之为无理数．如 $\sqrt{2}$ 不能表示为两个互素的整数的商，所以 $\sqrt{2}$ 是无理数．可以这样证明：

设 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ， a 与 b 是互素的两个整数，且 $b \neq 0$ ，

则 $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ，即 $a^2 = \underline{\hspace{1cm}} \text{①}$ ．

因为 b 是整数且不为 0，

所以 a 是不为 0 的偶数．

设 $a = 2n$ (n 是整数，且 $n \neq 0$)，则 $a^2 = 4n^2$ ．

所以 $b^2 = \underline{\hspace{1cm}} \text{②}$ ．

所以 b 也是偶数，与 a, b 是互素的整数矛盾．

所以 $\sqrt{2}$ 是无理数．

【解决问题】

(1)写出①，②表示的代数式，使证明过程完整；

(2)证明： $\sqrt[3]{6}$ 是无理数．

12．在数学课本36页的阅读材料中，运用反证法说明“ $\sqrt{2}$ 是一个无理数”，请模仿这种方法，说明 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是无理数．

阅读材料：

“无理数”的由来

为什么 $\sqrt{2}$ 不可能是一个有理数？现在我们用代数方法来解答这个问题．

假设 $\sqrt{2}$ 是一个有理数，那么可以得到 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ，其中 a 、 b 是整数且 a 、 b 互素且 $b \neq 0$ ，这时，就有：

$$2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

于是 $a^2 = 2b^2$ ，则 a 是2的倍数．

再设 $a = 2m$ ，其中 m 是整数，就有： $(2m)^2 = 2b^2$ ，

也就是： $b^2 = 2m^2$ ，

所以 b 也是2的倍数，可见 a 、 b 不是互素数，与前面所假设的 a 与 b 互素相矛盾，因此 $\sqrt{2}$ 不可能是一个有理数．

解：假设 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是一个有理数．

则 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ （ a 、 b 是整数且 a 、 b 互素且 $b \neq 0$ ），

则 $\sqrt{3} = \frac{a}{b} - \sqrt{2}$ ，

两边同时平方得：_____，

所以： $2\sqrt{2}\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1$ ，可得： $2\sqrt{2} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ ，

所以： $\sqrt{2} =$ _____，

因为：_____，

所以： $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是一个无理数。

考点 05 折纸问题；用数轴上的点表示无理数的综合应用

13. “说不完的 $\sqrt{2}$ ”探究活动，根据各探究小组的汇报，完成下列问题。

(1) $\sqrt{2}$ 到底有多大？

下面是小欣探索 $\sqrt{2}$ 的近似值的过程，请补充完整：

我们知道面积是 2 的正方形边长是 $\sqrt{2}$ ，且 $\sqrt{2} > 1.4$ 。设 $\sqrt{2} = 1.4 + x$ ，画出如下示意图。

	1.4	x
x	$1.4x$	x^2
1.4	1.96	$1.4x$

由面积公式，可得 $x^2 + \underline{\hspace{2cm}} = 2$ 。

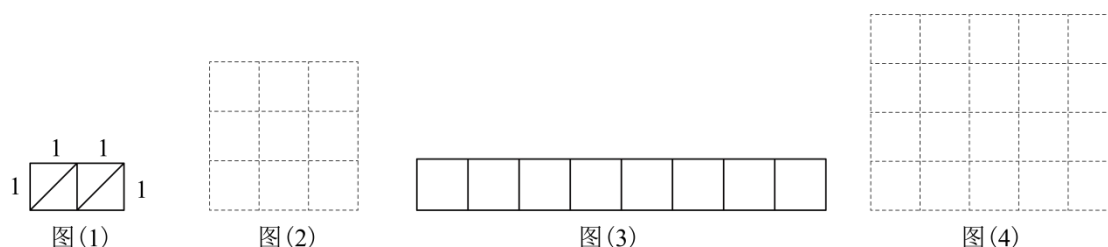
因为 x 值很小，所以 x^2 更小，略去 x^2 ，得方程 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，解得 $x \approx \underline{\hspace{2cm}}$ （保留到 0.001），即 $\sqrt{2} \approx$

$\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 怎样画出 $\sqrt{2}$ ？请一起参与小敏探索画 $\sqrt{2}$ 过程。

现有 2 个边长为 1 的正方形，排列形式如图 (1)，请把它们分割后拼接成一个新的正方形。要求：画出分割线并在正方形网格图 (图中每个小正方形的边长均为 1) 中用实线画出拼接成的新正方形。

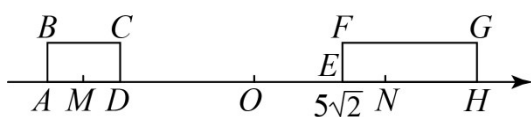
小敏同学的做法是：设新正方形的边长为 x ($x > 0$)。依题意，割补前后图形的面积相等，有 $x^2 = 2$ ，解得 $x = \sqrt{2}$ 。把图 (1) 如图所示进行分割，请在图 (2) 中用实线画出拼接成的新正方形。



请参考小敏的做法，现有 8 个边长为 1 的正方形，排列形式如图 (3)，请把它们分割后拼接成一个新的正方形。要求：画出分割线并在正方形网格图 (4) 中用实线画出拼接成的新正方形。说明：直接画出图形，不要求写分析过程。

14. 如图，在数轴上有两个长方形 $ABCD$ 和 $EFGH$ ，这两个长方形的宽都是 $2\sqrt{2}$ 个单位长度，长方形

$ABCD$ 的长 AD 是 $4\sqrt{2}$ 个单位长度，长方形 $EFGH$ 的长 EH 是 $8\sqrt{2}$ 个单位长度，点 E 在数轴上表示的数是 $5\sqrt{2}$ ，且 E, D 两点之间的距离为 $12\sqrt{2}$ 。



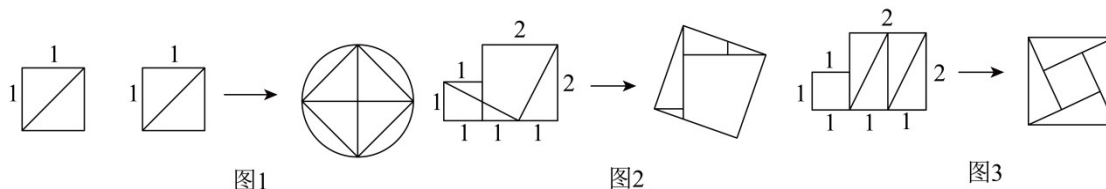
(1) 点 H 在数轴上表示的数是_____，点 A 在数轴上表示的数是_____；

(2) 若线段 AD 的中点为 M ，线段 EH 上有一点 N ， $EN = \frac{1}{4}EH$ ， M 以每秒 4 个单位长度的速度向右匀速运动， N 以每秒 3 个单位长度的速度向左运动，设运动的时间为 x 秒，问当 x 为多少时，原点 O 恰为线段 MN 的三等分点？

(3) 若线段 AD 的中点为 M ，线段 EH 上有一点 N ， $EN = \frac{1}{4}EH$ ，长方形 $ABCD$ 以每秒 4 个单位长度的速度向右匀速运动，长方形 $EFGH$ 保持不动，设运动时间为 t 秒，则 t 的值为_____。

15. 阅读材料，完成任务。

材料 1：数形结合是重要的数学思想。按照图 1 所示将两个边长为 1 的小正方形进行剪拼（无缝隙不重叠的拼接）成一个大的正方形，可以得到无理数 $\sqrt{2}$ ；按照图 2 和图 3 所示的两种剪拼方法将一个边长为 1 的正方形和一个边长为 2 的正方形剪拼出一个大正方形，可以得到无理数 m 。



材料 2：实数与数轴上的点一一对应。要在数轴上找到表示 $\pm\sqrt{2}$ 的点，关键是在数轴上构造线段 $OA = OA' = \sqrt{2}$ 。如图 4，正方形的边长为 1 个单位长度，以原点 O 为圆心，对角线长为半径画弧与数轴上

分别交于点 A, A' ，则点 A 对应的数为 $\sqrt{2}$ ，点 A' 对应的数为 $-\sqrt{2}$ 。类似的，我们可以在数轴上找到表示任意无理数的点。

材料 3：如图 5，改变图 4 中正方形的位置，用类似的方法作图，可在数轴上构造出线段 OB 与 OB' ，其中 O 仍在原点，点 B, B' 分别在原点的右侧、左侧，可由线段 OB 与 OB' 的长得到点 B, B' 所表示的无理数。按照这样的思路，只要构造出特定长度的线段，就能在数轴上找到无理数对应的点。

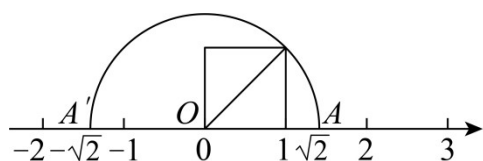


图4

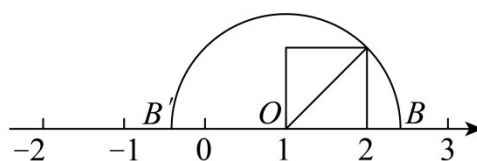
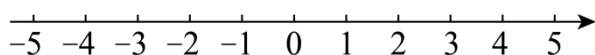


图5

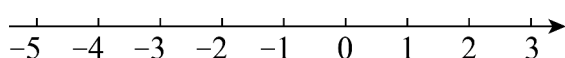
任务：

(1)材料1中，无理数 m 是_____，画图确定表示 m 的点 M ；

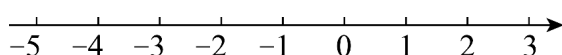


(2)如图5，点 B 表示的数为_____，点 B' 表示的数为_____；

(3)数轴上分别标出表示数 -0.5 以及 $-3+m$ 的点，并比较它们的大小。



(4)若 $a = -3 + m$ ， $b = m - \sqrt{2}$ ，求代数式 $|a + 0.5| - |2 - b|$ 的值，并在数轴上表示对应的点。



16. 下面是小敏写的数学日记的一部分，请你认真阅读，并完成相应的任务。

2023年9月22日天气：晴

无理数与线段长。

今天我们借助勾股定理，在数轴上找到了一些特殊的无理数对应的点，认识了“数轴上的点与实数一一对应”这一事实。

回顾梳理：要在数轴上找到表示 $\pm\sqrt{2}$ 的点，关键是在数轴上构造线段 $OA = OA' = \sqrt{2}$ 。如图1，正方形的边长为1个单位长度，以原点 O 为圆心，对角线长为半径画弧与数轴上分别交于点 A ， A' ，则点 A 对应的数为 $\sqrt{2}$ ，点 A' 对应的数为 $-\sqrt{2}$ 。

类似地，我们可以在数轴上找到表示 $\pm\sqrt{5}$ ， $\pm\sqrt{10}$ ，...的点。

拓展思考：如图2，改变图1中正方形的位置，用类似的方法作图，可在数轴上构造出线段 OB 与 OB' ，其中 O 仍在原点，点 B ， B' 分别在原点的右侧、左侧，可由线段 OB 与 OB' 的长得到点 B ， B' 所表示的无理数！按照这样的思路，只要构造出特定长度的线段，就能在数轴上找到无理数对应的点！

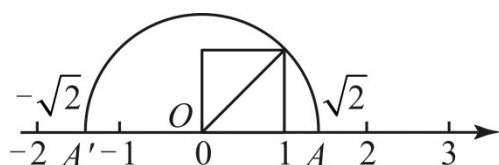


图1

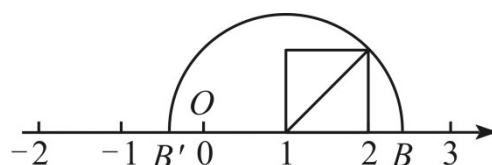


图2

任务：

(1)在图3中画图确定表示 $\sqrt{10}$ 的点M.

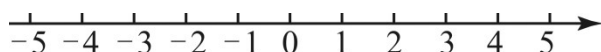


图3

(2)把5个小正方形按图中位置摆放，并将其进行裁剪，拼成一个大正方形.请在图中画出裁剪线，并在图4中画出所拼得的大正方形的示意图.

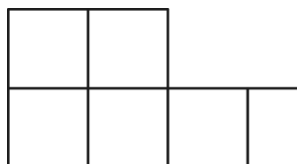


图4

(3)小丽想用一块面积为 36cm^2 的正方形纸片，沿着边的方向裁出一块面积为 20cm^2 的长方形纸片如图5，使它的长是宽的2倍.小丽能用这块纸片裁出符合要求的纸片吗？请你通过计算说明理由.

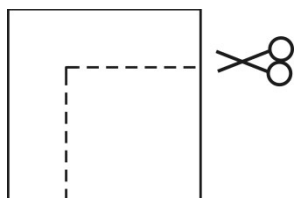


图5

(4)在图6中的数轴上分别标出表示数 -0.5 以及 $-3+\sqrt{5}$ 的点，并比较它们的大小.

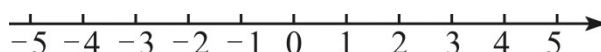


图6

考点 06 二次根式——材料、规律题综合

17. 阅读材料：像 $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=2$ ； $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a(a\geq 0)$ ； $(\sqrt{b}+1)(\sqrt{b}-1)=b-1(b\geq 0)$...两个含有二次根式的代数式相乘，积不含有二次根式，我们称这两个代数式互为有理化因式.例如 $\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{3}$ ， $\sqrt{2}+1$ 与 $\sqrt{2}-1$ ， $3+3\sqrt{5}$ 与 $3-3\sqrt{5}$ 等都是互为有理化因式.

在进行二次根式计算时，利用有理化因式，可以化去分母中的根号。

例如： $\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ， $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 3+2\sqrt{2}$ 。

解答下列问题：

(1) $2\sqrt{3}-5$ 与 _____ 互为有理化因式，将 $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ 分母有理化得 _____；

(2) 计算下列式子的值： $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2023}}$ ；

(3) 已知正整数 a, b 满足 $\frac{a}{\sqrt{2}-1} - \frac{b}{\sqrt{2}} = 2-3\sqrt{2}$ ，求 a, b 的值。

18. 阅读材料：小聪在学习二次根式后，发现含根号的式子 $3+2\sqrt{2}$ 可以写成另一个式子 $\sqrt{2}+1$ 的平方，即 $3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2$ 。

于是，爱动脑筋的小聪又提出了一个问题： $7+4\sqrt{3}$ 是否也能写成另一个式子的平方呢？经过探索，他联想到老师讲的方程思想，找到了一种把 $7+4\sqrt{3}$ 化成平方式的方法：

设 $7+4\sqrt{3} = (\sqrt{m} + \sqrt{n})^2$ ($m, n > 0$)，则 $7+4\sqrt{3} = m+n+2\sqrt{mn}$ ，

$$\therefore \begin{cases} m+n=7 \\ 2\sqrt{mn}=4\sqrt{3} \end{cases}.$$

整理得 $\begin{cases} m+n=7 \\ mn=12 \end{cases}$ 。

$\therefore m, n$ 可看作一元二次方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的两根。

解方程，得 $x_1 = 4, x_2 = 3$ 。

于是有 $\begin{cases} m=4 \\ n=3 \end{cases}$ 。

$\therefore 7+4\sqrt{3} = (\sqrt{4} + \sqrt{3})^2 = (2 + \sqrt{3})^2$

参考上述方法，解决下列问题：

(1) 化简下列根式并把答案直接填在答题卡上相应横线上：

$\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\sqrt{7-\sqrt{40}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2)化简：① $\sqrt{4-\sqrt{15}}$ ，② $\sqrt{7-\sqrt{21+\sqrt{80}}}$ ；

(3)化简 $\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ 。

19. 阅读下列材料，然后回答问题：

①在进行二次根式的化简与运算时，我们有时会碰上如 $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ 一样的式子，其实我们还可以将其进一步化

简： $\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{3}-1$ ，以上这种化简的步骤叫做分母有理化。

②学习数学，最重要的是学习数学思想，其中一种数学思想叫做换元的思想，它可以简化我们的计算，比

如我们熟悉的下面这个题：已知 $a+b=2$ ， $ab=-3$ ，求 a^2+b^2 。我们可以把 $a+b$ 和 ab 看成是一个整体，

令 $x=a+b$ ， $y=ab$ ，则 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=x^2-2y=4+6=10$ 。这样，我们不用求出 a ， b 就可以得到最后的结果。

(1)计算： $\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ；

(2)若 m 是正整数， $a=\frac{\sqrt{m+1}-\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}}$ ， $b=\frac{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}-\sqrt{m}}$ ，且 $a+b+3ab=2025$ ，求 m 的值；

(3)若 $\sqrt{15+x^2}-\sqrt{26-x^2}=1$ ，则 $\sqrt{15+x^2}+\sqrt{26-x^2}$ 的值是_____。（直接写出答案结果）

20. 阅读材料，并完成下列任务：

材料一：裂项求和

小华在学习分式运算时，通过具体运算： $\frac{1}{1 \times 2}=1-\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{2 \times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{3 \times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ ，……

发现规律： $\frac{1}{n \cdot (n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ （ n 为正整数），并证明了此规律成立。

应用规律：快速计算 $\frac{1}{1 \times 2}+\frac{1}{2 \times 3}+\frac{1}{3 \times 4}+\cdots+\frac{1}{9 \times 10}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$ 。

材料二：根式化简

例1 $\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ；

$$\text{例 2} \quad \frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{15}(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

任务一：化简．

$$(1) \text{化简：} \frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}$$

$$(2) \text{猜想：} \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (n \text{ 为正整数}) .$$

任务二：应用

$$(3) \text{计算：} \frac{1}{3+\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{49\sqrt{47}+47\sqrt{49}} ;$$

任务三：探究

$$(4) \text{已知 } x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\times 5} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5}\times 7} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{1+\sqrt{2023}+\sqrt{2025}+\sqrt{2023}\times 2025} ,$$

比较 x 和 y 的大小，并说明理由．

21．材料：如何将双重二次根式 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \pm 2\sqrt{b} > 0$) 化简呢？如能找到两个数 m , n

($m > 0$, $n > 0$) , 使得 $(\sqrt{m})^2 + (\sqrt{n})^2 = a$, 即 $m+n=a$, 且使 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{b}$, 即 $m \cdot n = b$, 那么

$a \pm 2\sqrt{b} = (\sqrt{m})^2 + (\sqrt{n})^2 \pm 2\sqrt{m} \cdot \sqrt{n} = (\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2$, $\therefore \sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = |\sqrt{m} \pm \sqrt{n}|$, 双重二次根式得以化简．

例如化简： $\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}$,

因为 $3 = 1 + 2$ 且 $2 = 1 \times 2$,

$$\therefore 3 \pm 2\sqrt{2} = (\sqrt{1})^2 + (\sqrt{2})^2 \pm 2\sqrt{1} \times \sqrt{2} ,$$

$$\therefore \sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} = |1 \pm \sqrt{2}|$$

由此对于任意一个二次根式只要可以将其化成 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ 的形式，且能找到 m , n ($m > 0$, $n > 0$) , 使得 $m+n=a$, 且 $m \cdot n = b$, 那么这个双重二次根式一定可以化简为一个二次根式．

请同学们通过阅读上述材料，完成下列问题：

$$(1) \text{填空：} \sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}} = \underline{\hspace{1cm}} , \sqrt{12 \pm 2\sqrt{35}} = \underline{\hspace{1cm}} ;$$

(2)化简： $\sqrt{9 \pm 6\sqrt{2}}$ ；

(3)计算： $\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$ 。

22. 定义：我们将 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ 与 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 称为一对“对偶式”。因为

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$ ，可以有效地去掉根号，所以有一些题可以通过构造“对偶式”来解决。

例如：已知 $\sqrt{18-x}-\sqrt{11-x}=1$ ，求 $\sqrt{18-x}+\sqrt{11-x}$ 的值，可以这样解答：

因为 $(\sqrt{18-x}-\sqrt{11-x}) \times (\sqrt{18-x}+\sqrt{11-x})=(\sqrt{18-x})^2-(\sqrt{11-x})^2=18-x-11+x=7$ ，所以 $\sqrt{18-x}+\sqrt{11-x}=7$ 。

(1)已知： $\sqrt{20-x}+\sqrt{4-x}=8$ ，求：

① $\sqrt{20-x}-\sqrt{4-x}=\underline{\hspace{1cm}}$ ；

②结合已知条件和第①问的结果，解方程： $\sqrt{20-x}+\sqrt{4-x}=8$ ；

(2)代数式 $\sqrt{10-x}+\sqrt{x-2}$ 中 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ；

(3)计算： $\frac{1}{3\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{2023\sqrt{2021}+2021\sqrt{2023}}=\underline{\hspace{1cm}}$ 。

考点 07 二次根式——最值问题

23. 阅读下面材料：

我们在学习二次根式时，熟悉的是分母有理化以及应用，其实，还有一个方法叫做“分子有理化”，与分母有理化类似，分母和分子都乘以分子的有理化因式，从而消掉分子中的根式比如：

$$\sqrt{7}-\sqrt{6}=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$$
，分子有理化可以用来比较某些二次根式的大小，也可以用来处

理一些二次根式的最值问题。例如：比较 $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ 和 $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ 的大小可以先将它们分子有理化如下：

$$\sqrt{7}-\sqrt{6}=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}, \quad \sqrt{6}-\sqrt{5}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$$
，因为 $\sqrt{7}+\sqrt{6}>\sqrt{6}+\sqrt{5}$ ，所以 $\sqrt{7}-\sqrt{6}<\sqrt{6}-\sqrt{5}$ 。再例如：

求 $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$ 的最大值。做法如下：解：由 $x+2\geq 0$ ， $x-2\geq 0$ 可知 $x\geq 2$ ，而

$$y=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=\frac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$$
，当 $x=2$ 时，分母 $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$ 有最小值2，所以 y 的最大值是

2。

解决下述问题：

(1)由材料可知， $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ；

(2)比较 $3\sqrt{2}-4$ 和 $2\sqrt{3}-\sqrt{10}$ 的大小；

(3)式子 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$ 的最小值是_____。

24. 阅读材料一：利用整体思想解题，运用代数式的恒等变形，使不少依照常规思路难以解决的问题找到

简便解决方法，例如， $ab=1$ ，求证： $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = 1$ 。证明：

$$\text{左边} = \frac{ab}{ab+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{b}{1+b} + \frac{1}{1+b} = 1 = \text{右边}。$$

阅读材料二：基本不等式 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ($a>0, b>0$)，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，它是解决最值问题的有力

工具。例如：在 $x>0$ 的条件下， $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ ，当且仅当 $x = \frac{1}{x}$ ，即 $x=1$ 时， $x + \frac{1}{x}$ 有最小值，

最小值为 2。请根据阅读材料解答下列问题

(1)若正数 x ，则 $x + \frac{9}{x}$ 的最小值为_____。

(2)若正数 a, b 满足 $ab=1$ ， $m = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$ ， n 为 $x + \frac{4}{x+1}$ ($x>-1$) 的最小值，求 n^{-m} ；

(3)若正数 a, b 满足 $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，若不等式 $\frac{2m-5}{m+1} + 9 < a+b$ 恒成立，求实数 m 的取值范围。

25. 阅读下面材料并解决有关问题：

(一) 由于 $(a-b)^2 \geq 0$ ，所以 $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ ，即 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ，并且当 $a=b$ 时， $a^2 + b^2 = 2ab$ ；对于两个非负实数 a, b ，由于 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ ，所以 $(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0$ ，即 $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$ ，所以 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ，并且当 $a=b$ 时， $a+b = 2\sqrt{ab}$ ；

(二) 分式和分数有着很多的相似点，如类比分数的基本性质，我们得到了分式的基本性质。小学里，把分子比分母小的数叫做真分数，类似的，我们把分子的次数小于分母的次数的分式称为真分式，反之，称为假分式。对于任何一个假分式都可以化成整式与真分式的和的形式，如：

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}；$$

(1)在① $\frac{2x+3}{x+1}$ 、② $\frac{x^2+1}{x}$ 、③ $\frac{x}{x^2+1}$ 、④ $\frac{x^4+1}{x^2}$ 这些分式中，属于假分式的是_____（填序号）；

(2)已知： $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$ ，求代数式 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值；

(3)当 x 为何值时， $\frac{x+3\sqrt{x+2}+5}{\sqrt{x+2}+1}$ 有最小值？并求出最小值。（写出解答过程）

26. 阅读材料：

已知 a, b 为非负实数， $\because a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ ，

$\therefore a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ，当且仅当“ $a=b$ ”时，等号成立。

这个结论就是著名的“均值不等式”，“均值不等式”在一类最值问题中有着广泛的应用。

例：已知 $x > 0$ ，求函数 $y = x + \frac{4}{x}$ 的最小值。

解：令 $a = x$ ， $b = \frac{4}{x}$ ，则由 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ，得 $y = x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$ 。

当且仅当 $x = \frac{4}{x}$ ，即 $x = 2$ 时，函数取到最小值，最小值为4。

根据以上材料解答下列问题：

(1)已知 $x > 0$ ，则当 $x =$ _____时，函数 $y = x + \frac{3}{x}$ 取到最小值，最小值为_____；

(2)用篱笆围一个面积为 100m^2 的矩形花园，则当这个矩形花园的长、宽各为多少时，所用的篱笆最短？最短的篱笆的长度是多少米？

(3)已知 $x > 0$ ，则自变量 x 取何值时，函数 $y = \frac{x}{x^2-2x+9}$ 取到最大值？最大值为多少？

27. 若三个实数 x, y, z 满足 $xyz \neq 0$ ，且 $x+y+z=0$ ，则有： $\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} = \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right|$ （结论不需要证明）

例如： $\sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}} = \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{(-5)^2}} = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{(-5)} \right| = \frac{19}{30}$

根据以上阅读，请解决下列问题：

【基础训练】

(1) 求 $\sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}}$ 的值；

【能力提升】

(2) 设 $S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}}$ ，求 S 的整数部分．

【拓展升华】

(3) 已知 $x + y + z = 0 (xyz \neq 0, x > 0)$ ，其中，且 $y + z = 3yz$ ．当 $\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} + \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right|$ 取得最小值时，求 x 的取值范围．

考点 08 二次根式——几何应用

28．已知 $\triangle ABC$ 三条边的长度分别是 $\sqrt{x+1}$ ， $\sqrt{(5-x)^2}$ ， $4 - (\sqrt{4-x})^2$ ，记 $\triangle ABC$ 的周长为 $C_{\triangle ABC}$ ．

(1) 当 $x = 2$ 时， $\triangle ABC$ 的周长 $C_{\triangle ABC} =$ _____ (请直接写出答案) ．

(2) 请用含 x 的代数式表示 $\triangle ABC$ 的周长 $C_{\triangle ABC}$ (结果要求化简)，并求出 x 的取值范围．如果一个三角形的

三边长分别为 a ， b ， c ，三角形的面积为 S ，则 $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}$ ．

若 x 为整数，当 $C_{\triangle ABC}$ 取得最大值时，请用秦九韶公式求出 $\triangle ABC$ 的面积．

29．已知三角形三边之长能求出三角形的面积吗？

海伦公式告诉你计算的方法是： $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ，其中 S 表示三角形的面积， a, b, c 分别表示三

边之长， p 表示周长之半，即 $p = \frac{a+b+c}{2}$ ．

我国宋代数学家秦九韶提出的“三斜求积术”与这个公式基本一致，所以这个公式也叫“海伦-秦九韶公式”．

请你利用公式解答下列问题．

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB = 5$ ， $BC = 6$ ， $CA = 7$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2) 计算 (1) 中 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高．

30．请阅读下列材料，并完成相应的任务．

古希腊几何学家海伦，在数学史上以解决几何测量问题而闻名．在他的著作《度量》一书中，给出了三角

形面积的计算公式(海伦公式)：如果一个三角形的三边长分别为 a, b, c ，记 $P = \frac{a+b+c}{2}$ ，那么三角形的面积是 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 。

印度算术家波罗摩笈多和婆什迦罗还给出了四边形面积的计算公式：如果一个四边形的四边长分别为

a, b, c, d ，记 $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ ，那么四边形的面积是 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{A+C}{2}}$ (其

中， A 和 C 表示四边形的一组对角的度数)

根据上述信息解决下列问题：

(1) 已知三角形的三边是 4, 6, 8，则这个三角形的面积是

(2) 小明的父亲是工程师，设计的某个零件的平面图是如图的四边形 $ABCD$ ，已知 $AB = 8$ ， $AD = 12$ ， $BC = 10 - \sqrt{10}$ ， $CD = 10 + \sqrt{10}$ ， $\angle B = 75^\circ$ ， $\angle D = 45^\circ$ 。求出这个零件平面图的面积。

