

专题 03 平行四边形中的动点问题

题型归纳

题型一：动点最值问题

题型二：运动路径长度问题

题型三：存在性问题

题型四：面积变化问题

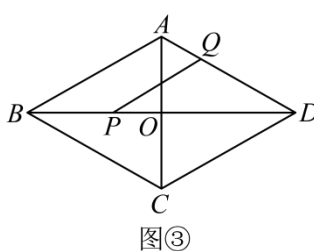
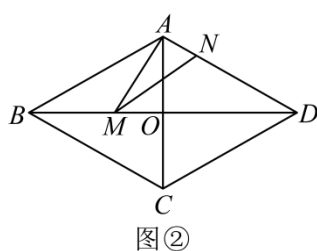
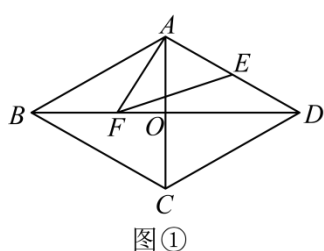
题型专练

题型 01 动点最值问题

动点最值问题常从根本上可分为两种基本题型：

1. 两点之间线段最短问题
2. 垂线段最短问题

【典例 1】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·福建·期中）如图，在菱形 $ABCD$ 中， AC 、 BD 交于 O 点。



(1) 若 F 为对角线 BD 上一动点， E 是 AD 的中点，请在图①中画出当 $EF + AF$ 取得最小值时的点 F ，简单

写出点 F 的做法，不需要证明；

(2) 如图②， M 为对角线 BD 上一动点， N 为边 AD 上一动点，若 $MN + AM$ 的最小值为 $3\sqrt{3}$ ，这个值恰好

与 (1) 中 $EF + AF$ 的最小值相等，求菱形的边长（要求画出必要的图形）；

【分析】(1) 这是典型的“将军饮马问题”，连接 CE ，交 BD 于 F' ，当点 F 在 F' 处时， $EF + AF$ 最小（两点之间线段最短）；

(2) 连接 CM ，要使 $CM + MN$ 最小，首先要保证 C 、 M 、 N 三点共线，其次保证 $CN \perp AD$ ，根据“垂线段最短”即可找符合条件的动点 M 、 N ；题目中说此时最小值与 (1) 中结果相同，说明 CN 既是 AD 边上的高又是 AD 边上的中线，所以 $\triangle ACD$ 是等边三角形。

【变式 1】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·江苏苏州·期中）【问题情境】

课外兴趣小组活动时，老师提出了如下问题：

(1) 如图 1， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $AC = 12$ ， $BC = 5$ ，点 M 是斜边 AB 上一动点，求线段 CM 的最小值。

小明在组内经过合作交流，得到了如下的解决方法：

根据直线外一点和直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短，得到：

当 $CM \perp AB$ 时，线段 CM 取得最小值。根据小明的思路可以求出这个最小值为_____。

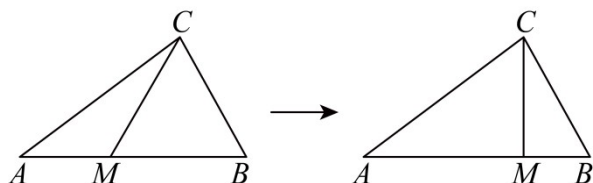


图1

(2) 【思维运用】如图 2，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ， M 为斜边 AB 上一动点，过 M 作

$MD \perp AC$ 于点 D ，过 M 作 $ME \perp BC$ 于点 E ，求线段 DE 的最小值。

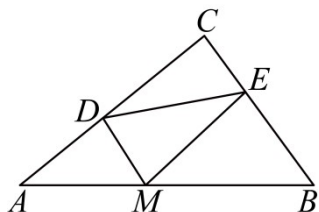


图2

(3) 【问题拓展】如图 3， $AB = 12$ ， P 为线段 AB 上的一个动点，分别以 AP ， PB 为边在 AB 的同侧作菱形

$APCD$ 和菱形 $PBFE$ ，点 P ， C ， E 在一条直线上。 $\angle DAP = 60^\circ$ ， M ， N 分别是对角线 AC ， BE 的中点，

当点 P 在线段 AB 上移动时，点 M ， N 之间的距离的最小值为——。（直接写出结果，不需要写过程）

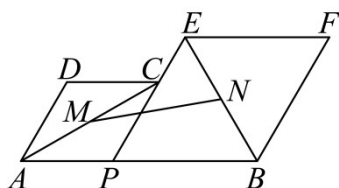


图3

【分析】（1）根据勾股定理求出 AB ，根据三角形的面积公式求出 CM ，根据垂线段最短得到答案；

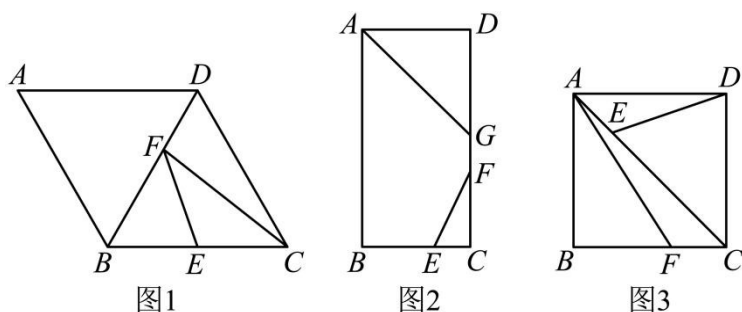
（2）根据勾股定理求出 AB ，根据矩形的性质得到 $CM = DE$ ，仿照（1）的方法解答；

（3）连接 DP 、 FP ，延长 AC 交 BE 于 H ，连接 PH ，证明四边形 $PNHM$ 是矩形，得出 $MN = PH$ ，仿照

（2）的方法即可求解。

【变式 2】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·山东威海·期末）数学研究小组发现，求线段最值问题的解决策略：对两条线

段作某种变换（平移、轴对称、旋转等），最终转化为“两点之间线段最短问题”去解决．



(1)如图 1，已知菱形 $ABCD$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， $AB = 2$ ，点 E 是 BC 边中点，点 F 是对角线 BD 边上的动点．连接

EF ， CF ，则 $EF + CF$ 的最小值为_____；

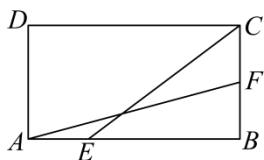
(2)如图 2，已知矩形 $ABCD$ ， $AB = 6$ ， $BC = 3$ ．点 E 是 BC 上的点，且 $CE = 1$ ，点 F ， G 是 CD 上的动点，

且 $FG = 1$ ，连接 AG ．则 $EF + FG + AG$ 的最小值为_____；

【变式 3】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·山东淄博·期中）

如图，矩形 $ABCD$ ， $AB = 6$ ， $BC = 3$ ，点 E 是边 AB 上的动点，点 F 是射线 BC 上的动点，且 $BF = AE$ ，连接

AF ， CE ，求 $AF + CE$ 的最小值．



【变式 4】（²⁴⁻²⁵ 八年级上·浙江宁波·期中）（¹）如图 1，在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = BC = 4$ ，

$\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是 BC 边的中点， E 是 AB 边上一动点，则 $EC + ED$ 的最小值是_____．

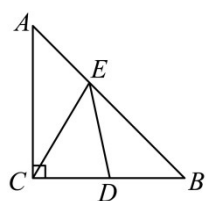


图1

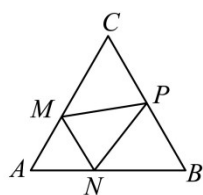


图2

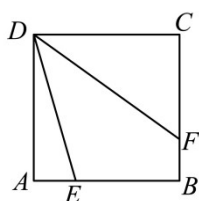


图3

(2) 如图2, 在正 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4$, P 、 M 、 N 分别是 BC 、 CA 、 AB 上的动点, $PM + MN$ 的最小值为
_____;

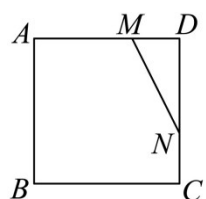
(3) 如图3, 正方形 $ABCD$ 的边长为4, E 、 F 分别是边 AB 和 BC 上的动点且始终满足 $AE = BF$, 连结 DE 、 DF , 求 $DE + DF$ 的最小值.

【变式5】 (24-25 八年级下·吉林长春·期末) **【问题呈现】** 小明在数学小组活动时遇到一个几何问题: 如

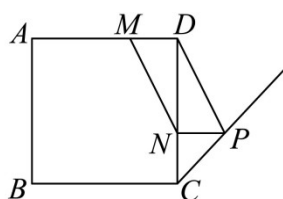
图①, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, 点 M 、 N 分别在边 AD 、 CD 上, 且 $DM = CN$, 试探究线段 MN 长度的最小值.

【问题分析】 小明通过构造平行四边形, 将双动点问题转化为单动点问题, 再通过定角发现这个动点的运动路径, 进而解决上述几何问题.

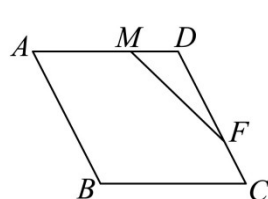
【问题解决】 如图②, 过点 D 、 N 分别作 MN 、 AD 的平行线, 并交于点 P , 作射线 CP . 在**【问题呈现】**的条件下, 完成下列问题:



图①



图②



图③

(1) 求证： $NC = NP$.

(2) $\angle DCP$ 的大小为——度，线段 MN 长度的最小值为—— .

【方法运用】(3) 如图③，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，点 E 、 F 分别在边 AD 、 CD 上，且

$DE = CF$ ，则 $\triangle DEF$ 周长的最小值为—— .

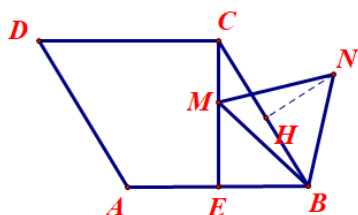
题型 02 运动路径长度问题

动点路径问题核心就两件事：先定路径形状，再算路径轨迹长度。

初中阶段动点路径只有 2 类：线段型、圆弧型，其中考试高频是线段型。

【典例 1】(2026 八年级上·上海·专题练习) 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 2， $\angle ABC = 60^\circ$ ， M 是高 CE 上的一个动点，以 BM 为边向上作等边 $\triangle BMN$ ，在点 M 从点 C 到点 E 的运动过程中，点 N 所经过的路径长是

()



- A . 2 B . $\frac{\pi}{2}$ C . $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ D . $\sqrt{3}$

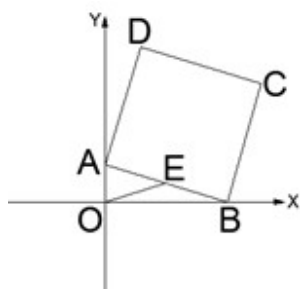
【分析】取 BC 的中点 H ，连接 NH ，证明 $\triangle EBM \cong \triangle HBN(SAS)$ ，进而得到 $HN = EM$ ，再计算出 CE ，即可

求出点 N 所经过的路径长 .

【典例 2】（²⁵⁻²⁶ 八年级上·上海黄浦·练习）如图，在平面直角坐标系中，面积为 100 的正方形 ABCD 的两个

顶点 A、B 在坐标轴上滑动，点 B 由原点 O 出发沿 x 轴正方向移动，点 A 沿 y 轴正半轴向原点 O 移动，当

$\angle ABO = 36^\circ$ 时，边 AB 的中点 E 经过的路径长是_____；



【分析】 根据题意，可知 OE 为定值，E 经过的路径即为以 OE 为半径的圆弧，根据弧所对的度数即可求出弧长。

【变式 1】（²⁰²⁵ 八年级上·上海·专题练习）在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(10,0)$ ，点 P 在线段 OA 上

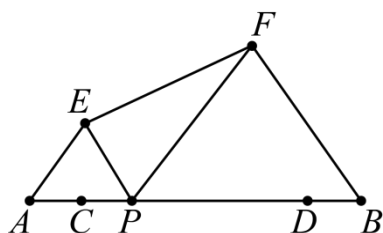
运动，分别以 OP、PA 为边在 x 轴上方作等边 $\triangle OPM$ 和等边 $\triangle PAN$ ，连接 MN，Q 为 MN 的中点，当点 P

从 O 运动至点 A 时，点 Q 运动的路径长为 _____。

【变式 2】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·上海长宁·期末）如图，已知 C、D 是线段 AB 上两点，且 $AC = BD = 1$ ，P 是

线段 CD 上一动点，在 AB 同侧分别作等边三角形 APE 和等边三角形 PBF，若 G 为线段 EF 的中点，当点

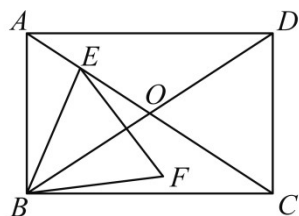
P 由点 C 移动到点 D 时，则点 G 移动的路径长度 y 与线段 AB 的长 $x (x > 2)$ 之间的函数关系式为_____。



【变式3】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·广东汕头·期末）如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，

$BC = 4$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ，点 E 在线段 AO 上从点 A 至点 O 运动，连接 BE ，以 BE 为边作等边三角形 BEF ，

点 F 和点 A 分别位于 BE 两侧，则点 F 运动的路径长是_____。



【变式4】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·河南·期末）如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AD = 10$ ，动点 E ， F 分别在边

DC ， CB 上移动，且满足 $DE = CF$ 。连接 AE 和 DF ，交于点 P 。

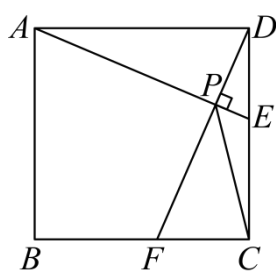


图4

①请你写出 AE 与 DF 的数量关系和位置关系，并说明理由；

②点 E 从点 D 开始运动到点 C 时，点 P 也随之运动，请求出点 P 的运动路径长。

题型 03 存在性问题

常见的与动点相关的存在性问题包括：是否存在平行四边形？矩形？菱形？正方形？等腰三角形和直角三角形。

【典例 1】 如图 1，将矩形 $OABC$ 放在平面直角坐标系中， O 为原点，点 C 在 x 轴上，点 A 在 y 轴上，

$OA = 4$ ， $OC = 8$ ，把矩形 $OABC$ 沿着对角线 OB 所在直线翻折，点 C 落在点 D 处， OD 交 AB 于点 E 。

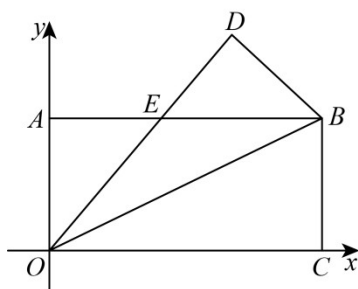


图 1

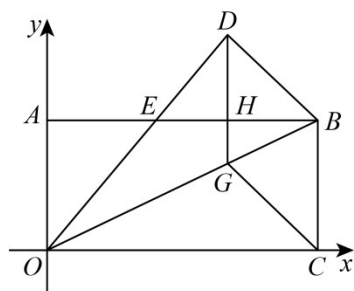


图 2

(1) 求点 E 的坐标；

(2) 如图 2，过点 D 作 $DG \parallel BC$ ，交 OB 于点 G ，交 AB 于点 H ，连接 CG ，试判断四边形 $BCGD$ 的形状，并

说明理由；

(3) 在 (2) 的条件下，点 M 是坐标轴上的一点，直线 OB 上是否存在一点 N ，使以点 O, D, M, N 为顶点

的四边形是平行四边形？若存在，请直接写出点 N 坐标；若不存在，请说明理由。

【分析】 (1) 证明 $OE = EB$ ，设 $AE = x$ ，则 $OE = BE = 8 - x$ ，在 $Rt\triangle AEO$ 中，利用勾股定理构建方程求

解即可。

(2) 四边形 $BCGD$ 是菱形，根据邻边相等的平行四边形是菱形证明即可。

(3) 以 OD 为边、对角线分类讨论，共有 5 种情形，画出图形分别求解即可。

【变式 1】 已知：正方形 $ABCD$ 的边长为 8，点 E 是 BC 边的中点，点 F 是边 AB 上的动点，联结 DE 、

EF .

(1) 如图 1, 如果 $BF=2$, 求证: $EF \perp DE$;

(2) 如图 2, 如果 $BF=3$, 求证: $\angle DEF=3\angle CDE$;

(3) 联结 DF , 设 DF 的中点为 G , 四边形 $AFEG$ 是否可能为菱形? 请说明理由 .

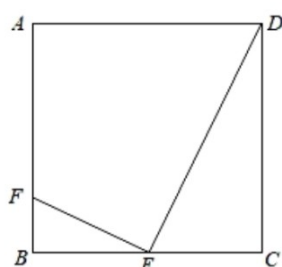


图 1

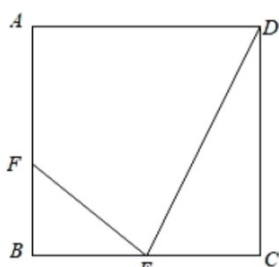


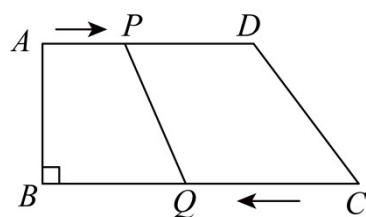
图 2

【变式 2】 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, 且 $AD = 12\text{cm}$, $AB = 8\text{cm}$, $DC = 10\text{cm}$,

若动点 P 从 A 点出发, 以每秒 1cm 的速度沿线段 AD 向点 D 运动; 动点 Q 从 C 点出发以每秒 2cm 的速度沿

CB 向 B 点运动, 当 Q 点到达 B 点时, 动点 P, Q 同时停止运动, 设点 P, Q 同时出发, 并运动了 t 秒, 回

答下列问题:



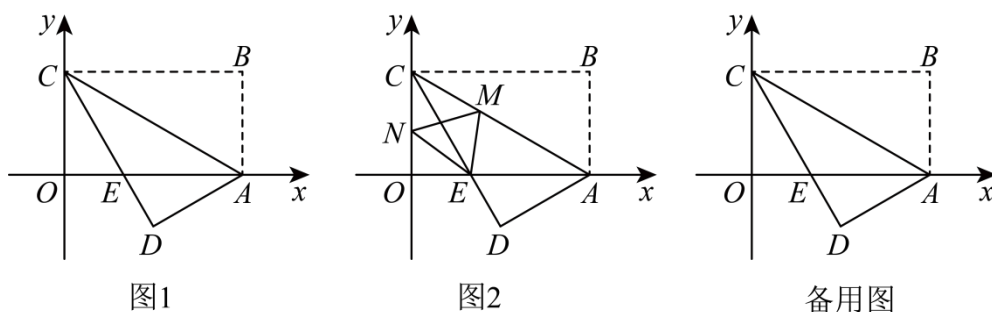
(1) $BC = \underline{\hspace{1cm}} \text{cm}$;

(2) 当 $t = \underline{\hspace{1cm}}$ 秒时, 四边形 $PQBA$ 成为矩形 .

(3) 当 t 为多少时, $PQ \parallel CD$?

(4) 是否存在 t ，使得 $\triangle DQC$ 是等腰三角形？若存在，请求出 t 的值；若不存在，说明理由。

【变式3】 如图1，在平面直角坐标系中有矩形 $OABC$ ，点 $C(0,4)$ ，将矩形 $OABC$ 沿 AC 折叠，使得点 B 落在点 D 处， CD 边交 x 轴于点 E ， $\angle OAC = 30^\circ$ 。



(1) 求点 E 的坐标；

(2) 如图2，在直线 AC 以及 y 轴上是否分别存在点 M ， N ，使得 $\triangle EMN$ 的周长最小？如果存在，求出 $\triangle EMN$ 周长的最小值；如果不存在，请说明理由；

(3) 点 P 为 y 轴上一动点，作直线 AP 交直线 CD 于点 Q ，是否存在点 P 使得 $\triangle CPQ$ 为等腰三角形？如果存在，请求出 $\angle OAP$ 的度数；如果不存在，请说明理由。

题型 04 面积变化问题

四边形动点面积问题，核心思想是：以静制动、动中找定、分段表示、公式求解。

点在边上运动变化时，图形形会发生变化，但通常情况下一定有不变的底或不变的高；

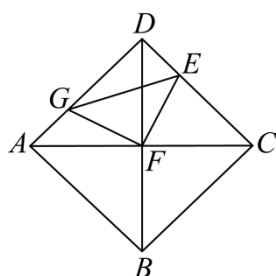
抓住动中不变的底或高，结合割补法利用面积公式解决问题。动点若跨顶点要分段讨论。

【典例1】 (24-25 八年级下·上海·期中) 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB=8$ ， F 是对角线 AC ， BD 的交点，

G, E 分别是 AD, CD 上的动点，且保持 $AG = DE$ ，连接 GE, GF, EF 。在此运动变化的过程中，有下

列结论：① $\triangle GFE$ 是等腰直角三角形；② 四边形 $DGFE$ 可能为正方形；③ GE 长度的最小值为 $4\sqrt{2}$ ；④ 四

边形 $DGFE$ 的面积保持不变。其中正确的是 ()



A. 仅①②③

B. 仅①②④

C. 仅②③④

D. ①②③④

【分析】先证 $\triangle AGF \cong \triangle DEF$ 可得 $GF = EF, \angle GFA = \angle DFE$ ，然后说明 $\angle GFE$ 可判断①；

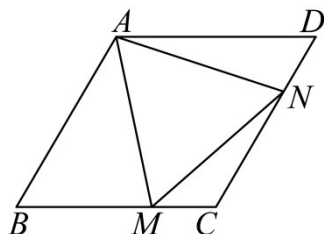
当 G, E 为 AD, BD 中点时，四边形 $DGEF$ 为正方形，可判断②；

先说明当 GF 最小时， GE 最小， $GF \perp AD$ 时， GF 最小为 4，然后运用勾股定理求得 GE 的最小值；

根据全等三角形的性质可得 $S_{\triangle DEF} = S_{\triangle AGF}$ ，即 $S_{\text{四边形} DGEF} = S_{\triangle AFD} = \frac{1}{4} \times 8 \times 8 = 16$ ，据此即可判定④。

【变式1】(23-24 八年级下·河北承德·期末) 如图，已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2， $\angle ABC = 60^\circ$ ，点 M 、

N 分别是边 BC, CD 上的两个动点， $\angle MAN = 60^\circ$ ，连接 MN 。



(1) $\triangle AMN$ 是等边三角形吗？如是，请证明；如不是，请说明理由。

(2) 在 M 、 N 运动的过程中，四边形 $CMAN$ 的面积是否发生变化？若不变化，求出面积的值；若变化，说明理由。

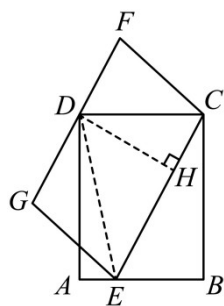
【变式 2】 (24-25 八年级下·山西大同·期中)

如图，矩形 $ABCD$ 的边 AB 上有一动点 E ，以 EC 为边作 $\square ECFG$ ，且边 FG 过矩形的顶点 D ，在点 E 从点 A 移动到点 B 的过程中， $\square ECFG$ 的面积如何变化？

小亮的观点：过点 D 作 $DH \perp CE$ 于点 H ，连接 DE 。 CE 与 DH 的乘积始终等于 $CD \cdot AD$ ，所以 $\square ECFG$ 的面积不变。

小明的观点：在点 E 的运动过程中， CE 的长度在变化，而 CE 与 FG 两条平行线间的距离不变，所以 $\square ECFG$ 的面积变化。

任务：你认为小亮和小明谁的观点正确？正确的写出完整的证明过程。



【变式 3】 (24-25 八年级下·河北·期末) 如图 1，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 5$ ， E 是 BC 边上的一个

动点 (点 E 不与 B 、 C 重合)， $DF \perp AE$ ，垂足为点 F ，过点 D 作 $DG \parallel AE$ ，交 BC 的延长线于点 G 。

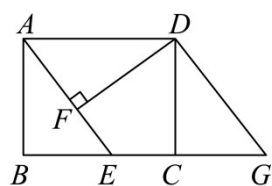


图1

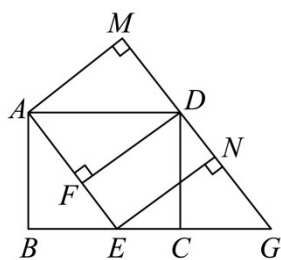


图2

(1) 若 $DF = AB$,

① 求证：四边形 $AEGD$ 是菱形；② 求四边形 $CDFE$ 的周长；

(2) 如图 2 , $AM \perp DG$ 于点 M , $EN \perp DG$ 于点 N , 探究：

① 当 CE 为何值时，四边形 $AFDM$ 是正方形；

② 点 E 在 BC 边上的运动过程中，四边形 $AENM$ 的面积是否发生变化，若不变，请求出该四边形的面积；

若变化，请说明理由 .

【变式 4】 (24-25 八年级下·江苏镇江·期末) 如图，矩形 $ABCD$ 中 $AB = 3$, $BC = 4$, 点 E 在边 AD 运动，

连接 EC 、 AF , 以 EC 为一边向左下方作正方形 $EFGC$, 请探究以下问题：

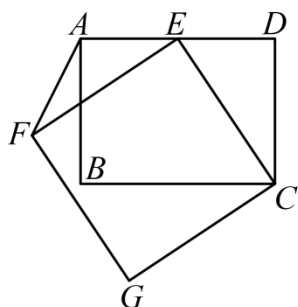


图1

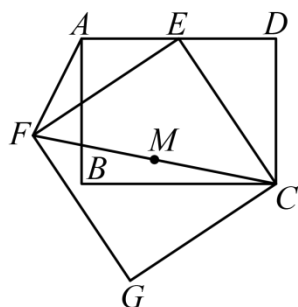


图2

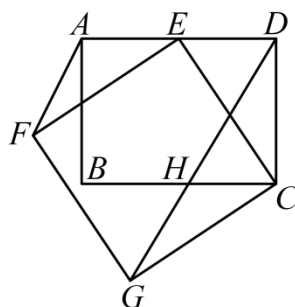


图3

(1) 如图 1 , 当 E 为 AD 中点时，求线段 AF 的长度；

(2)如图 2，连接 CF ，取线段 CF 的中点 M ，在运动过程中，点 M 经过的轨迹长为_____；

(3)如图 3，连接 DG 交 BC 于点 H ，

随着点 E 在边 AD 运动， $\triangle DGC$ 的面积变化吗？如果不变，请求出 $\triangle DGC$ 的面积；如果变化，请说明理由；