

专题 01 二次函数 压轴题

题型归纳

题型一：存在性问题

题型二：角度问题

题型三：最值、取值范围问题

题型四：动态问题

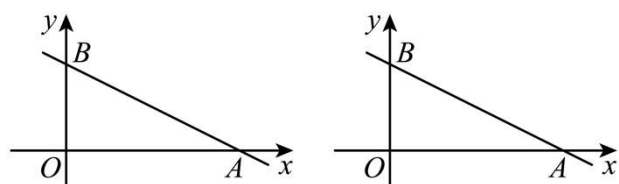
题型五：定点、定值问题

题型六：新定义题

题型专练

题型一：存在性问题

1. 在平面直角坐标系 xOy 中点 A 、 B 的坐标分别是 $(4,0)$ 和 $(0,2)$.



备用图

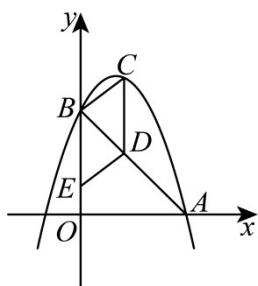
(1) 求出直线 AB 的解析式 .

(2) 过原点的抛物线 W 的顶点 P 在线段 AB 上，与 x 轴正半轴交于点 Q .

(i) 向右平移抛物线 W 得到抛物线 W' ，若 W' 同时过点 Q 和点 A ，求平移的距离和 W' 的表达式 .

(ii) 延长 QP 交 y 轴于点 C ，将线段 OC 绕原点逆时针旋转 90° 得到线段 OC' . 当 $\triangle C'OP$ 和 $\triangle AQP$ 相似时，求点 P 的坐标 .

2. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(3,0)$ ，点 B 在 y 轴上 . 已知：抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 关于直线 $x = 1$ 对称，且经过点 A 、 B ，



(1)求该抛物线的表达式；

(2)如果点 $C(x, y)$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 上，且满足 $1 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq 2t - 1$ ，

①试结合函数的图像，求 t 的取值范围；

②过点 C 作 y 轴的平行线交 AB 于点 D ，如果点 E 在 y 轴上，且四边形 $BCDE$ 是菱形，求点 E 的坐标。

3. 如图 1，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴相交于 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ 两点，抛物线与 y 轴相交于点 C 。

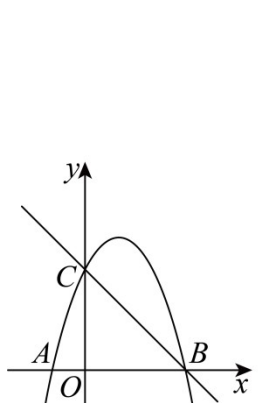


图1

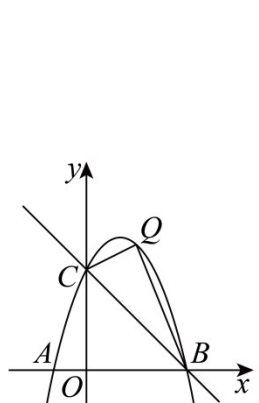


图2

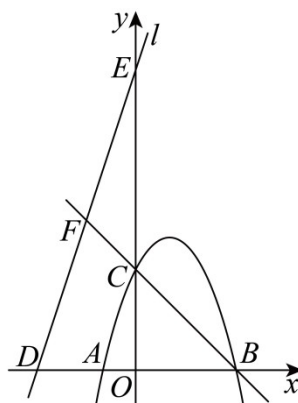


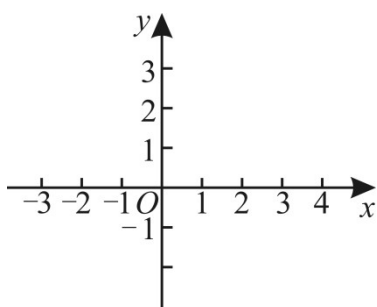
图3

(1)求该抛物线对应的函数表达式；

(2)如图 2，点 Q 是直线 BC 上方抛物线上一动点，求 $\triangle QBC$ 面积的最大值；

(3)如图 3，已知直线 $l: y = 3x + 9$ 与 x ， y 轴分别相交于点 D ， E ，直线 BC 与 l 相交于点 F ，在第三象限内的抛物线上是否存在点 P ，使得 $\angle PBF = \angle DFB$ ？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由。

4. 在平面直角坐标系 xOy 中（如图），已知二次函数 $y = ax^2 + bx + 2$ 的图像与 x 轴负半轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，且 $OA = OB$ 。



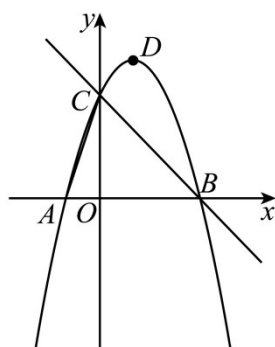
(1) 当 $x = -\frac{1}{a}$ 时，求该二次函数的函数值；

(2) 定义：对于一个函数 $y = f(x)$ ，满足 $f(x) = x$ 的实数 x 叫做这个函数的不动点。如果二次函数 $y = ax^2 + bx + 2$ 存在唯一的一个不动点，试求出这个不动点；

(3) 将 $\triangle AOB$ 绕点 B 逆时针旋转，点 O 落在点 C 处，点 A 落在点 D 处，当四边形 $ABCD$ 是梯形时，点 C 恰好落在该二次函数图像上，求该二次函数的解析式。

题型二：角度问题

5. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = -x^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于点 A 、 B （点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C ，联结 AC ， $\tan \angle CAO = 3$ ，抛物线的顶点为点 D 。



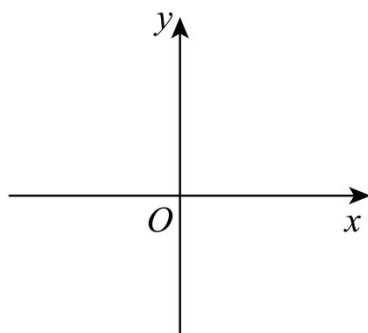
(1) 求 b 的值和点 D 的坐标；

(2) 点 P 是抛物线上一点（不与点 B 重合），点 P 关于 x 轴的对称点恰好在直线 BC 上。

① 求点 P 的坐标；

② 点 M 是抛物线上一点且在对称轴左侧，连接 BM ，如果 $\angle MBP = \angle ABD$ ，求点 M 的坐标。

6. 如图，在直角坐标平面 xOy 内，以点 C 为顶点的抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(4, 3)$ ，且与 y 轴交于点 B ，对称轴为直线 $x = 2$ 。



(1) 求抛物线的表达式；

(2) 平移上述抛物线，所得的新抛物线的对称轴为直线 $x=t$ ，顶点为点 P 。

① 联结 AB ，如果点 P 在 x 轴上且新抛物线与线段 AB 有公共点，求 t 的取值范围；

② 设新抛物线与直线 $x=2$ 交于点 D ，如果点 P 在原抛物线 $y=x^2+bx+c$ 上，且在直线 $x=2$ 的右侧， $\angle CPD=2\angle CBO$ ，求点 P 的坐标。

题型三：最值、取值范围问题

7. 如图 1，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ 两点，与 y 轴交于点 $C(0,3)$ ，直线 $y=x+1$ 与抛物线交于 A, D 两点。

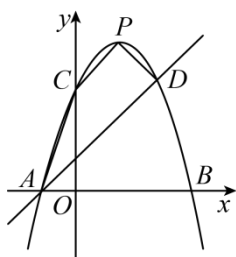


图1

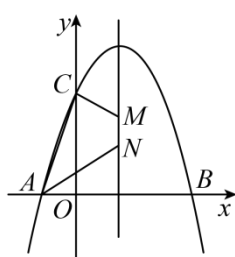


图2

(1) 求该抛物线的表达式及点 D 的坐标；

(2) 抛物线上是否存在点 P ，使 $\angle BAP = \angle CAD$ ？若存在，求出点 P 的横坐标；若不存在，请说明理由；

(3) 如图 2，点 M 、 N 是对称轴上的两个动点，且 $MN=1$ ，点 M 在点 N 的上方，求四边形 $ACMN$ 的周长的最小值。

8. 已知直线 $l: y=kx+4-k$ 经过定点 M ，以 M 为顶点的抛物线 $C_1: y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (A 左 B 右)。

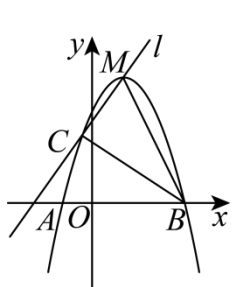


图1

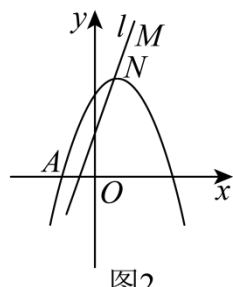


图2

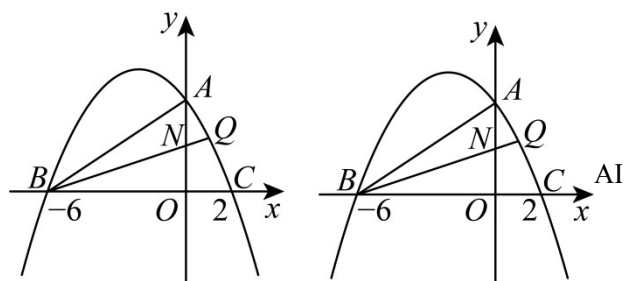
(1) 点 M 的坐标是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ， $b=\underline{\hspace{1cm}}$ ， $c=\underline{\hspace{1cm}}$ (直接写出结果)；

(2) 如图 1，若直线 l 与抛物线 C_1 交于另一点 C ，且 BC 恰好平分 $\angle ABM$ ，求 k 的值；

(3) 如图 2，将抛物线 C_1 沿直线 l 平移得到抛物线 C_2 ，且抛物线 C_2 恒经过点 A 。 N 是抛物线 C_2 的顶点 (不与

M 重合)， $P(t, t-4)$ 是坐标平面内一点，求 N, P 两点之间距离的最小值。

9. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 交 y 轴于点 A ，交 x 轴于点 $B(-6, 0)$ 和点 $C(2, 0)$ ，点 Q 在第一象限的抛物线上，连接 AB, AQ, BQ ， BQ 与 y 轴交于点 N 。



备用图

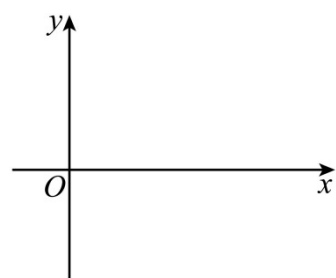
(1) 求抛物线表达式；

(2) 点 $Q(1, \frac{7}{3})$ ，点 M 在 x 轴上，点 E 在平面内，若 $\triangle BME \cong \triangle AOM$ ，且四边形 $ANEM$ 是平行四边形。

① 求点 E 的坐标；

② 设射线 AM 与 BN 相交于点 P ，交 BE 于点 H ，将 $\triangle BPH$ 绕点 B 旋转一周，旋转后的三角形记为 $\triangle BP_1H_1$ ，求 $BP_1 + \sqrt{2}OH_1$ 的最小值。

10. 已知抛物线 $C_1: y = -x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $A(0, 3)$ ，顶点 P 在直线 $x = 1$ 上。



(1) 求抛物线 C_1 的解析式及顶点 P 的坐标；

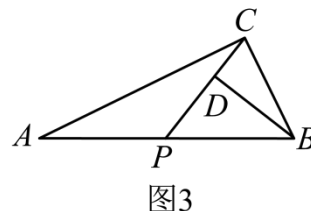
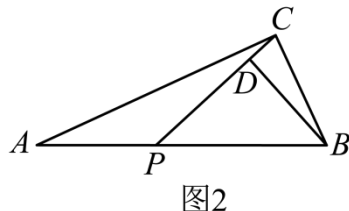
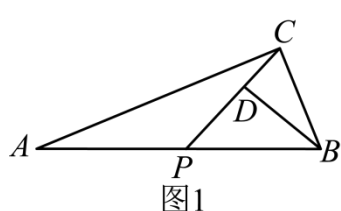
(2) 将抛物线 C_1 向右平移 $m(m > 0)$ 个单位，再向下平移 $n(n > 0)$ 个单位，得到新抛物线 C_2 ，新抛物线 C_2 的顶点为 Q ，与抛物线 C_1 的交点为点 B ，如果四边形 $PABQ$ 是平行四边形，求 m, n 之间的关系式；

(3) 在 (2) 的条件下，抛物线 C_2 的对称轴与直线 AP 交于点 E ，与抛物线 C_1 交于点 F ，且

$S_{\triangle PEQ} : S_{\triangle BFQ} = 3:1$ ，求此时抛物线 C_1 上落在平行四边形 $PABQ$ 内部的点 (不包括与平行四边形的交点) 的横坐标 t 的取值范围。

题型四：动态问题

11. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，已知 $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 P 是边 AB 上的一个动点，联结 CP ，过点 B 作 $BD \perp CP$ ，垂足为 D 。

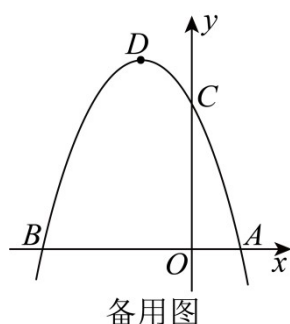


(1) 如图 1，当 CP 经过 $\triangle ABC$ 的重心时，求证： $\triangle BCD \sim \triangle ABC$ ；

(2) 如图 2，若 $BC = 2\text{cm}$ ， $AC = 4\text{cm}$ ，点 P 从点 A 向点 B 运动（不与点 A, B 重合），点 P 的速度是 $\sqrt{5}\text{cm/s}$ ，设点 P 运动的时间为 $t\text{s}$ ， $\triangle BCD$ 的面积为 $y\text{cm}^2$ ，求出 y 关于 t 的函数解析式，并写出它的定义域；

(3) 如图 3，在第 (2) 小题的条件下，若 $\triangle PBC$ 是以 CP 为腰的等腰三角形，求 $\triangle BCD$ 的面积。

12. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B ， $A(1, 0)$ ， B 在 x 轴负半轴，与 y 轴交于点 $C(0, 3)$ ，顶点为 D 。

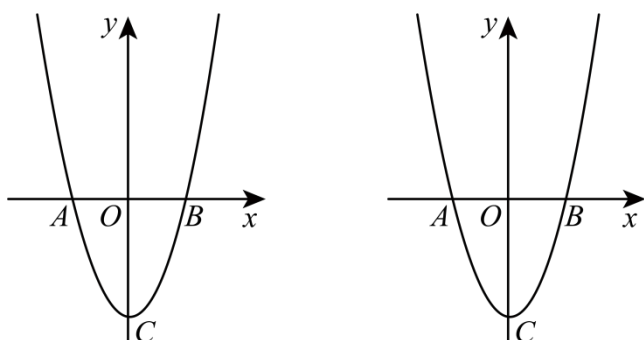


(1) 用关于 a 的式子表示 b ；

(2) 联结 AD, BD ， AD 交 y 轴于点 E ，若 $S_{\triangle ABD} = 8S_{\triangle AEO}$ ，求 B 坐标；

(3) 平移抛物线使新抛物线的顶点 D' 在直线 AC 上， B 的对应点 B' 在 y 轴上， C 的对应点为 C' ， $C'B'$ 交直线 AC 于 H ，若 $\triangle B'CH$ 为直角三角形，求平移后新抛物线的解析式。

13. 已知在直角坐标平面 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(-2, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(0, -4)$ 三点。



备用图

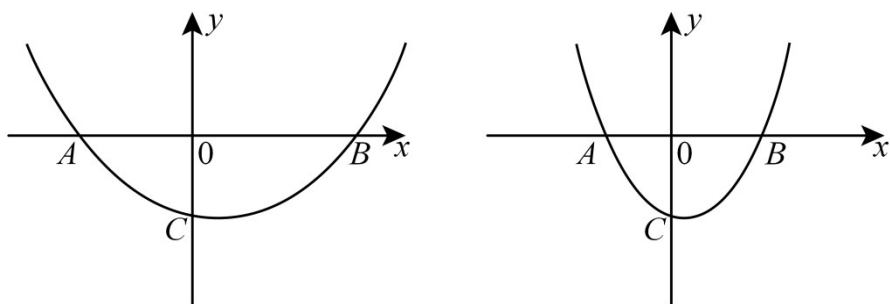
(1)求该抛物线的表达式：

(2)点 P 是抛物线上在第一象限内的动点，点 P 的横坐标为 m

①如果 $\triangle PAC$ 是以 PC 为斜边的直角三角形，求 m 的值；

②在 y 轴正半轴上存在点 H ，当线段 PH 绕点 H 逆时针方向旋转 90° 时，恰好与抛物线上的点 Q 重合，此时点 Q 的横坐标为 n ($n > 0$)，求 $n - m$ 的值。

14. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ ， $B(4, 0)$ ，与 y 轴交于点 C 。



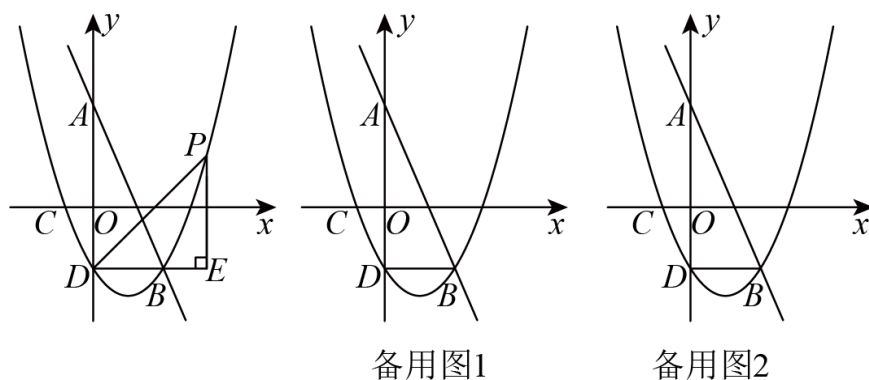
备用图

(1)直接写出抛物线的解析式；

(2)已知点 P 是坐标平面内一点，若线段 OA 关于点 P 的对称线段 $O'A'$ (点 O' ， A' 分别是点 O ， A 的对称点) 的两个端点恰好都落在该抛物线上，求点 P 的坐标；

(3)若点 M 为 x 轴上一动点，将线段 MC 绕点 M 逆时针旋转 90° 得到线段 MD ，试探究是否存在点 M ，使点 D 恰好落在该抛物线上？若存在，求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由。

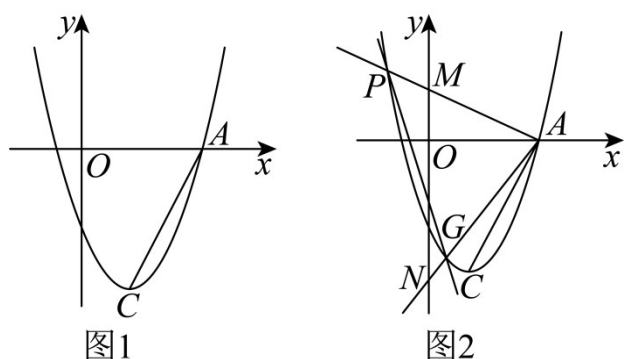
15. 如图，直线 $y = -2x + 4$ 交 y 轴于点 A ，交抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 于点 $B(3, -2)$ ，抛物线经过点 $C(-1, 0)$ ，交 y 轴于点 D ，点 P 是抛物线上的动点，作 $PE \perp DB$ 交 DB 所在直线于点 E 。



- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 当 $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形时，求：P 点坐标；
- (3) 在 (2) 的条件下，连接 PB ，将 $\triangle PBE$ 沿直线 AB 翻折，直接写出翻折后点 E 的对称点坐标。

题型五：定点、定值问题

16. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2 + mx - 3$ 经过点 $A(3, 0)$ ，点 C 是抛物线的顶点，连接 AC 。



- (1) 求抛物线的函数解析式及顶点 C 的坐标；
- (2) 设直线 $y = kx - k$ ($k \neq 0$) 与抛物线相交于 P 、 Q 两点 (点 P 在点 Q 的左侧且点 Q 在第四象限)，当直线 PQ 与直线 AC 相交所成的一个角为 45° 时，求点 Q 的坐标；
- (3) 如图 2，作直线 AP ， AG 分别交 y 轴正、负半轴于点 M 、 N ，交抛物线于点 P 、 G ，设点 M 、 N 的纵坐标分别为 m 、 n ，且 $mn = -3$ ，求证：直线 PG 经过一个定点。

17. 已知抛物线 $y = ax^2 - \left(5a + \frac{1}{2}\right)x + 4a + 2$ ($a < 0$)。

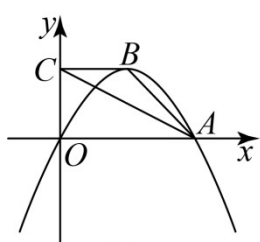


图1

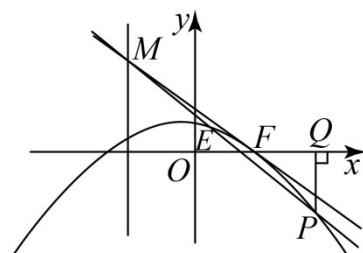


图2

- (1) 若抛物线的对称轴为 $x=2$ ，求该抛物线的解析式；
- (2) 如图1，在(1)的条件下，抛物线与 x 轴交于 O, A 两点，顶点为 B ，已知点 $C(0,2)$ ，连 AB, AC, BC ，若点 P 为抛物线上一点，且满足 $\angle OAC + \angle POA = \angle BAO$ ，求点 P 的坐标；
- (3) 如图2，抛物线过两个定点，其中一个定点为第一象限内的点 E ，另一个定点为 x 轴上的点 F ，过点 F 作直线 l 与抛物线有且只有一个交点 (l 不与 x 轴垂直)，直线 l 与直线 $x=-5$ 交于点 M 。直线 ME 交抛物线于另一点 P 。过点 P 作线段 $PQ \perp x$ 轴于点 Q ，求证：线段 FQ 的长为定值。

题型六：新定义题

18. 定义：把抛物线 C_1 上任意点 $P(a,b)$ 的横坐标和纵坐标乘以 k 后变为点 $P'(ka, kb)$ ，若点 P' 都在抛物线 C_2 上，则称抛物线 C_2 为抛物线 C_1 的“ k 倍抛物线”。例如：抛物线 $y=x^2$ 的任意一点 $P(n, n^2)$ ，乘以 -2 后变为 $P'(-2n, -2n^2)$ ，点 P' 都在抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 上，所以抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 是抛物线 $y=x^2$ 的“ -2 倍抛物线”。

已知抛物线 $C: y = -mx^2 + 2mx + n$ ，根据所给条件完成下列问题：

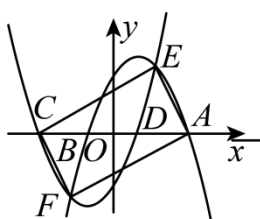


图1

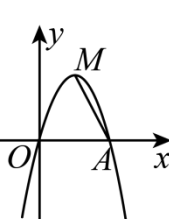
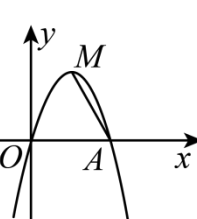


图2

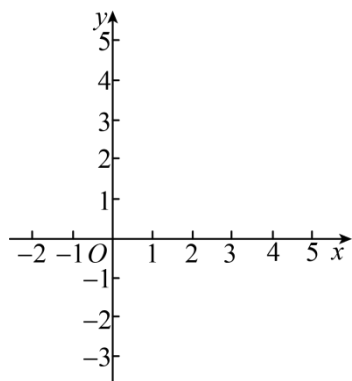


备用图

- (1) 当 $m=1, n=-1$ 时，求 C_1 的“2 倍抛物线” C_2 的解析式；
- (2) 如图1，当 $n=3m$ ，且 $m>0$ 时， C_1 与 x 轴交于点 A, B ， C_1 的“ -1 倍抛物线” C_3 与 x 轴交于点 C, D ，与 C_1 交于点 E, F ，是否存在合适的 m 值，使得四边形 $AECF$ 是矩形，如果存在求出 m 的值；如果不存在请说明理由；
- (3) 如图2，当 $m=\sqrt{3}, n=0$ 时，抛物线 C_1 的顶点记为 M ，与 x 轴的正半轴交于点 A ，抛物线 C_1 的“ k 倍抛物线”

线” C_4 顶点为 N ，点 P 在抛物线 C_4 上，满足 $S_{\triangle PMN} = S_{\triangle AMN}$ ，且 $\angle PNM = 90^\circ$ 。当 $|k| > 1$ 时，求 k 的值。

19. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于 $A(-1, 0)$ 、 B 两点，且与 y 轴交于点 $C(0, -2)$ 。



(1) 求抛物线的表达式；

(2) 如果点 D 是 x 正半轴上一点， $\angle ADC = 2\angle ACO$ ，且四边形 $AQCD$ 是菱形，请直接写出点 D 和点 Q 的坐标（不需要说明理由）；

(3) 由平面内不在同一直线上的一些线段首尾顺次连接所组成的封闭图形叫做多边形，对于平面内的一个多边形，画出它的任意一边所在的直线，如果其余各边都在这条直线的一侧，那么这个多边形叫做“凸多边形”；否则叫做“凹多边形”。如果点 E 是抛物线对称轴上的一个动点，纵坐标为 t ，且四边形 $ACBE$ 是凹四边形（线段 AE 与线段 BC 不相交），求 t 的取值范围。