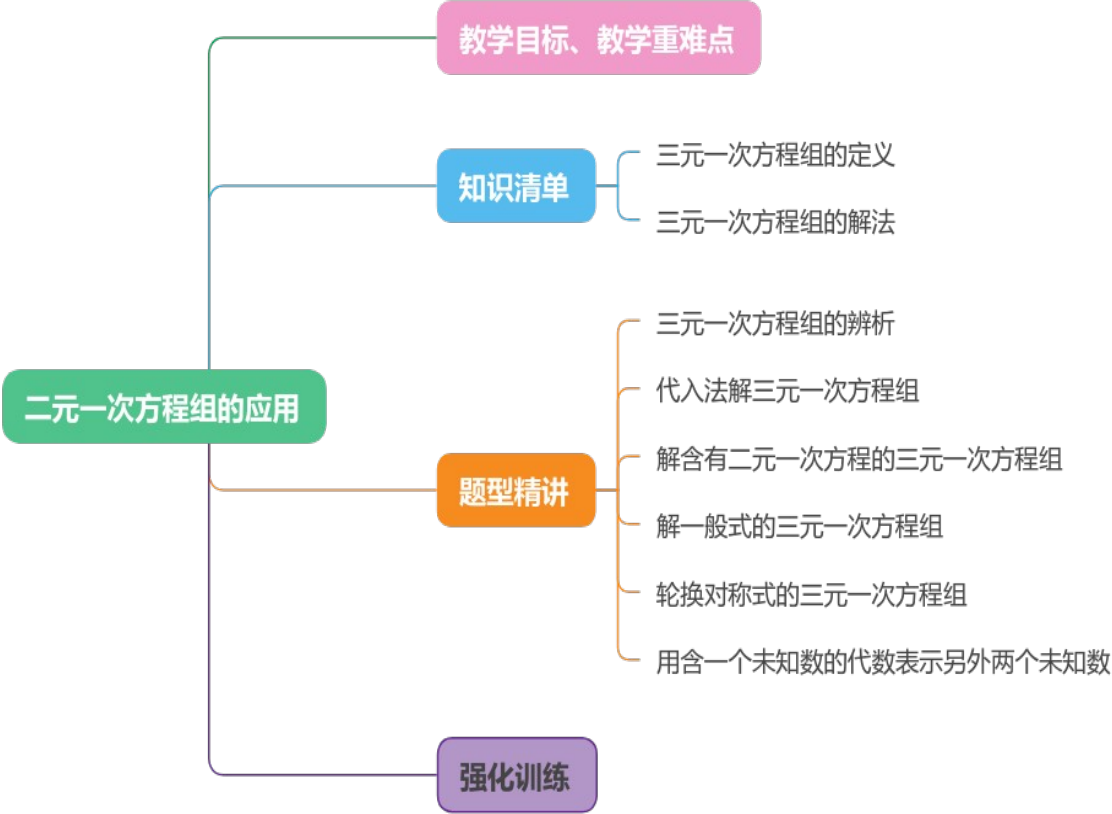


专题 9.4 三元一次方程组

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1.理解三元一次方程组的概念，能识别三元一次方程组； 2.掌握三元一次方程组的基本解法（代入消元法、加减消元法），能将三元一次方程组转化为二元一次方程组求解； 3. 能根据方程组的特点，选择合适的消元方法，提高解题能力.
教学重难点	1.重点 解三元一次方程组. 2.难点

灵活选择消元方法.

知识清单

知识点 01 三元一次方程组的定义

如果方程组中含有三个未知数，且含未知数的项都是一次项，这样的方程组就叫作_____.

如，下列两个方程组都是三元一次方程组.

$$\begin{cases} x+y+z=5, \\ 4x-2y+z=-4 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 2x-4y+8z=5, \\ 3x-6y-z=10 \end{cases}$$

知识点 02 三元一次方程组的解法

解三元一次方程组的基本思路是：

三元一次方程组 $\xrightarrow{\text{消元}}$ 二元一次方程组 $\xrightarrow{\text{消元}}$ 一元一次方程

【即学即练】

$$\text{解方程组：} \begin{cases} z = -4x & \text{①} \\ x + y + z = 5 & \text{②} \\ 4x - 2y + z = -4 & \text{③} \end{cases}$$

解：将①分别代入②和③可实现消去_____的目的，

整理得二元一次方程组_____.

解这个方程组，得_____.

所以，原方程组的解是_____.

例2 解方程组
$$\begin{cases} 3x - y + z = 4 & \text{①} \\ 2x + 3y - z = 12 & \text{②} \\ x + y - 2z = 3 & \text{③} \end{cases}$$
，以下解法不正确的是（ ）

- A. 由①，②消去 z ，再由①，③消去 z
- B. 由①，③消去 z ，再由②，③消去 z
- C. 由①，③消去 y ，再由①，②消去 y
- D. D. 由①，②消去 z ，再由①，③消去 y

【解析】由①+②得到 _____ 消去了 _____ ；

再由①+③得到 _____ 消去了 _____ ；

整理得到的新方程组 _____

但是新方程组含有3个未知数，仍然属于三元一次方程组，所以消元失败.

所以选D.

【点睛】用加减法消元的时候，前后两次的消元必须消 **同一个未知数**.

题型精讲

题型 01 三元一次方程组的辨析

【典例1】下列方程组中，是三元一次方程组的是（ ）

- A.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ y + z = 5 \\ x^2 + y = 2 \end{cases}$$
- B.
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ 3x - 4y + z = -1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$
- C.
$$\begin{cases} 3x + y + z = -2 \\ y - 3z = 5 \\ x + 7z = 9 \end{cases}$$
- D.
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ y + 4x = 5 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

【变式1】下列方程组中，是三元一次方程组的是（ ）

$$A. \begin{cases} x+y=1 \\ 4x-y=5 \\ 4y-2z=-1 \end{cases}$$

$$B. \begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 4x+3y+2z=4 \\ 3x-m=0 \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} x-y=-1 \\ 2x-2y=-2 \\ -3x+4y=0 \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} a+2b=-1 \\ ax-by=2 \\ -x+2y=6 \end{cases}$$

【变式2】 下列方程组中，不属于三元一次方程组的是（ ）

$$A. \begin{cases} x+y-z=6 \\ x-3y+2z=1 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases} \quad B. \begin{cases} x+y=3 \\ y+z=5 \\ x+z=6 \end{cases} \quad C. \begin{cases} x+y-z=6 \\ x+2z=1 \\ 2y-z=4 \end{cases} \quad D. \begin{cases} x+6y=3 \\ 3y+x=5 \\ x+2y=6 \end{cases}$$

【变式3】 下列方程组中，是三元一次方程组的是（ ）

$$A. \begin{cases} x+z=2 \\ xy+x=4 \\ z-x=1 \end{cases} \quad B. \begin{cases} x-\frac{3}{y}=4 \\ x+z=6 \\ y-2z=7 \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} x=9 \\ x-y=4 \\ z-y=5 \end{cases} \quad D. \begin{cases} x+y=8 \\ y-m=3 \\ z-x=5 \end{cases}$$

【变式4】 下列是三元一次方程组的是（ ）

$$A. \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=7 \\ x+z=10 \end{cases} \quad B. \begin{cases} x+y-z=5 \\ xy+z=4 \\ x-y=4 \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} 3x=6 \\ x^2+y=9 \\ x+y+z=8 \end{cases} \quad D. \begin{cases} \frac{4}{x}=y+z \\ x-y=6 \\ y=1 \end{cases}$$

题型 02 用代入法解三元一次方程组

【典例1】 解下列三元一次方程组：

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 5x + 3y + 2z = 2 \\ 3x - 4z = 4 \end{cases}$$

【变式1】解下列三元一次方程组：

$$\begin{cases} x = 2y - 14 \\ 2x - 3z = 0 \\ x + y + z = 150 \end{cases}.$$

【变式2】解下列三元一次方程组：

$$\begin{cases} x + y + z = 22 \\ 3x + y = 47 \\ x = 4z + 2 \end{cases}$$

【变式3】解方程组：

$$\begin{cases} x : y : z = 1 : 2 : 3 \\ 2x + y - 3z = 15 \end{cases}$$

【变式4】解方程组
$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 4a - c = 7 \\ a + b + c = 0 \end{cases}.$$

题型 03 含有二元一次方程的三元一次方程组

【典例1】解方程组
$$\begin{cases} x - z = 4 \textcircled{1} \\ x - y + z = 1 \textcircled{2} \\ 2x + 3y + 2z = 17 \textcircled{3} \end{cases}$$

【变式1】解方程组：

$$\begin{cases} x - z = -4 \\ x + y - z = -1 \\ z - 2y = -1 \end{cases};$$

【变式2】解方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=26 \textcircled{1} \\ x-y=1 \textcircled{2} \\ 2x+z-y=18 \textcircled{3} \end{cases};$$

【变式3】解方程组：

$$\begin{cases} x-2y+4z=12 \textcircled{1} \\ 3x+2y+z=1 \textcircled{2} \\ 4x-z=7 \textcircled{3} \end{cases};$$

【变式4】解三元一次方程组：

$$\begin{cases} 4x-9z=17 \\ 3x+y+15z=18 \\ x+2y+3z=2 \end{cases}$$

题型 04 用加减消元法解一般式的三元一次方程组

【典例1】解三元一次方程组：

$$\begin{cases} 3x-y+z=4, \\ 2x+3y-z=12, \\ x+y+z=6. \end{cases}$$

【变式1】解三元一次方程组：

$$\begin{cases} 3x-2y+z=5 \\ 2x+y-z=6 \\ 4x+3y+2z=-1 \end{cases}.$$

【变式2】解三元一次方程组：

$$\begin{cases} 2x+4y+3z=9 \\ 3x-2y+5z=11 \\ 5x-6y+7z=13 \end{cases}$$

【变式3】解三元一次方程组

$$\begin{cases} x+3y+2z=3 \\ 2x-3y-z=-2 \\ 4x+3y-3z=-2 \end{cases}$$

【变式4】解方程组：

$$\begin{cases} x+y-z=6 & \text{①} \\ x-3y+2z=1 & \text{②} \\ 3x+2y-z=3 & \text{③} \end{cases}$$

题型 05 轮换对称型三元一次方程组

【典例1】

解方程组

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=4 \\ z+x=2 \end{cases}$$

【变式1】解方程组

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=6 \\ y+z=3 \end{cases}$$

【变式2】解三元一次方程组

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=4 \\ z+x=5 \end{cases}$$

【变式3】解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=13 & \text{①} \\ 3y+4z=25 & \text{②} \\ 4z+2x=18 & \text{③} \end{cases}$$

【变式4】解方程组

$$\begin{cases} x-2y=-5 \textcircled{1} \\ -2y+3z=10 \textcircled{2} \\ 3z+x=15 \textcircled{3} \end{cases}$$

题型 06 用含一个未知数的代数式表示另外两个未知数

【典例 1】 已知 $xyz \neq 0$ ，且 $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 5x+4y-4z=0 \end{cases}$ ，求 $\frac{x^2+6y^2-10z^2}{3x^2-4yz+5z^2}$ 的值。

【变式 2】 已知方程组 $\begin{cases} 2x+3y+z=8 \\ 3x+5y+z=11 \end{cases}$ ，求 $x+y+z$ 的值。

【变式 3】 数学活动：探究不定方程

小张，小王两位同学在学习方程过程中，发现三元一次方程组 $\begin{cases} 3x+2y+z=9 \textcircled{1} \\ 2x+3y+4z=11 \textcircled{2} \end{cases}$ 虽然解不出 x, y, z 的具体数值，但可以解出 $x+y+z$ 的值。请在以下横线处补全两人的解法。

小张的方法：

$\textcircled{2} \times 3 - \textcircled{1} \times 2$ ，整理可得： $y = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \times 2$ ，整理可得： $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

$\therefore x+y+z = 4$

小王的方法： $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ ： $\underline{\hspace{2cm}} \textcircled{3}$ ；

$\therefore \underline{\hspace{2cm}}$ 得： $x+y+z = 4$ 。

【变式 4】 已知方程组 $\begin{cases} x+y=3a \textcircled{1} \\ y+z=5a \textcircled{2} \\ x+z=4a \textcircled{3} \end{cases}$ 的解也是方程 $x-2y+3z=-10$ 的解，求 a 的值。

强化训练

一、单选题

1. 下列方程组中，是三元一次方程组的是 ()

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \begin{cases} 3x+2y=4 \\ y+z=5 \\ x^2+y=2 \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \\ 3x-4y+z=-1 \\ x+z=2 \end{cases} \\ \text{C. } \begin{cases} 3x+y+z=-2 \\ y-3z=5 \\ x+7z=9 \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x-y=2 \\ y+4x=5 \\ 2x+y=0 \end{cases} \end{array}$$

2. 解方程组 $\begin{cases} 2x+y-3z=5 \\ -4x-y+2z=12 \\ 5x+y+7z=14 \end{cases}$ ，最简便的消元方法是 ()

A. 先消去 x B. 先消去 y C. 先消去 z D. 先消去常数项

3. 解方程组 $\begin{cases} 3x+z=6 \\ 4x-y+2z=11 \\ 5x+2y-3z=4 \end{cases}$ 时，要使解法较为简便，应 ()

A. 先消去 x B. 先消去 y C. 先消去 z D. 先消去常数

4. 已知方程组 $\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=-6 \\ z+x=9 \end{cases}$ ，则 $x+y+z$ 的值是 ()

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

二、填空题

5. 已知方程 $(m-1)x^{|m|}+y+5z=4$ 是关于 x, y, z 的三元一次方程，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 2x - y = m + 3 \\ x + 2y = 4 - 7m \end{cases}$ ，若 $x - 3y = 7$ ，则 $m =$ _____.

7. 方程组 $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ z + x = 4 \end{cases}$ 的解为_____.

8. 方程组 $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x + y + z = 1 \\ x - z = 5 \end{cases}$ 的解为_____.

9. 相传洛书是一个三阶幻方，就是将已知 9 个数填入 3×3 的方格中，使每一行、每一竖列以及两条斜对角线上的数字之和都相等. 在如图的幻方中也有类似的规律，则 $a + b - c$ 的值为_____.

4	a	2
3	5	c
8	b	6

10. 若 $|x - 2y + 1| + |z + y - 5| + |x - z - 3| = 0$ ，则 $x + y + z =$ _____；

11. 已知 x, y, z 满足 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+5}{4}$ ，且 $x + 2y - z = 8$ ，则 $x =$ _____.

12. 若三元一次方程组 $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = -1 \\ y + z = -2 \end{cases}$ 的解使 $ax + 2y - z = 0$ ，则 $\frac{a}{a}$ 的值是_____.

三、解答题

13. 解方程组： $\begin{cases} x + y - z = 11 \text{①} \\ y + z - x = 5 \text{②} \\ z + x - y = 1 \text{③} \end{cases}$

14. 解方程组 $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ x + z = 6 \end{cases}$

15. 解方程组解三元一次方程组 $\begin{cases} a + b - c = 1 \text{①} \\ a + 2b - c = 3 \text{②} \\ 2a - 3b + 2c = 5 \text{③} \end{cases}$.

16. 解方程组.

$$\begin{cases} x+y=1 \textcircled{1} \\ 3x-z=7 \textcircled{2} \\ x-y+3z=0 \textcircled{3} \end{cases}$$

17. 在一堂数学课上，刘老师布置了这样一道题目：已知方程组 $\begin{cases} 3x+7y+z=28 \textcircled{1} \\ 4x+10y+z=32 \textcircled{2} \end{cases}$ ，求 $2x+2y+2z$ 的值。

针对此问题，乐乐同学认为可以用“整体思想”和“消元、转化”方法求解：用②-①得到 $x+3y=4$ ③，因为问题是求解 $2x+2y+2z$ 整体的值，因此可以在原方程组中“分离”出 $x+y+z$ 即可，即

$$\begin{cases} 2(x+3y)+(x+y+z)=28 \textcircled{4} \\ 3(x+3y)+(x+y+z)=32 \textcircled{5} \end{cases}$$
，接下来采用“代入消元法”或者“加减消元法”均可解决该问题了。

(1) 请你替乐乐同学完成接下来的步骤，求解出 $2x+2y+2z$ 的值；

(2) 请你用上述思想方法求解问题：已知 $\begin{cases} 4x-y+7z=13 \textcircled{1} \\ -3x+y-5z=-9 \textcircled{2} \end{cases}$ ，求 $x-y+z$ 的值。

18. 感悟思想：有些关于方程组的问题，要求的结果不是每一个未知数的值，而是关于未知数的代数式的值，如以下问题：已知实数 x, y 满足 $3x-y=5$ ①， $2x+3y=7$ ②，求 $x-4y$ 和 $7x+5y$ 的值。

思考：本题常规思路是将①②联立成方程组，解得 x, y 的值再代入要求值的代数式得到答案，有的问题用常规思路运算量比较大。其实，仔细观察两个方程未知数的系数之间的关系，本题还可以通过适当变形，整体求得代数式的值。如①-②可得 $x-4y=-2$ ；①+②×2可得 $7x+5y=19$ 。这样的解题思想就是通常所说的“整体思想”。

体会思想：

(1) 已知二元一次方程组 $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+2y=8 \end{cases}$ ，则 $x+y=$ _____；

(2) 三元一次方程组 $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x+2y+z=4 \\ x+y+2z=5 \end{cases}$ 的解是_____。