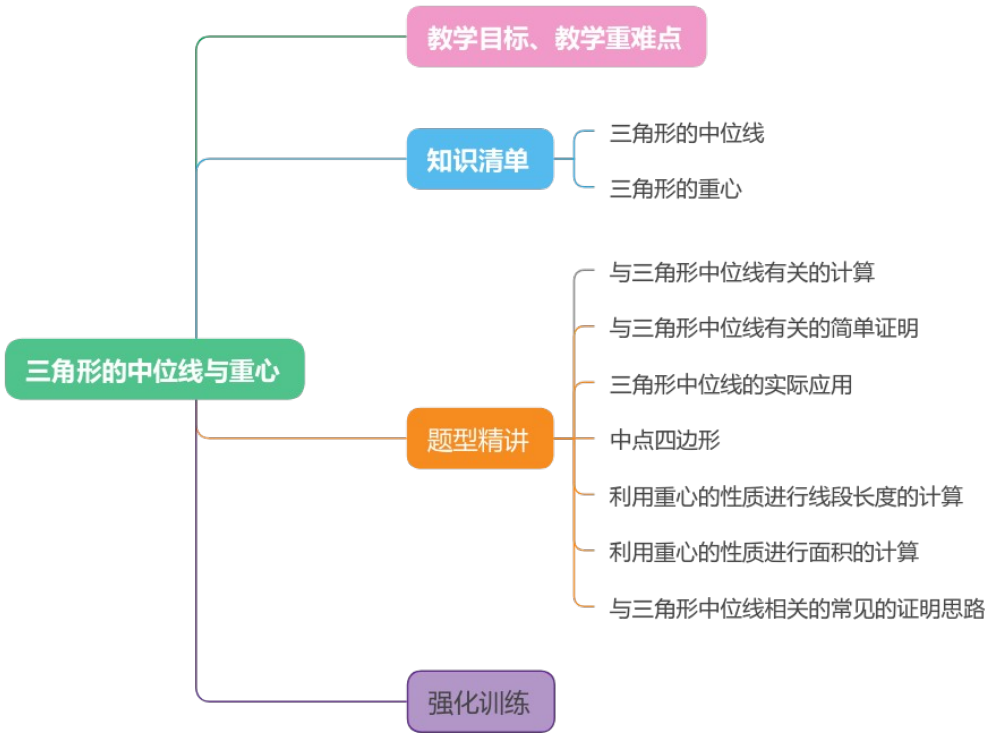


专题 23.4 三角形的中位线与重心

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1.理解三角形中位线的定义，掌握三角形中位线定理，能运用定理进行简单的几何计算（如线段长度求解）和几何证明（如平行关系、线段倍分关系证明）。 2.能综合运用三角形中位线定理与平行四边形、全等三角形的相关知识，解决简单的数学问题和实际应用问题，初步学会通过构造中位线转化几何问题的思路。 3.理解三角形重心的定义，掌握三角形重心的性质，能运用该性质进行相关线段长度、图形面积的计算和简单证明。
教学重难点	1.重点 （1）三角形中位线定理的理解与应用； （2）三角形重心定义及性质的理解与应用； 2.难点 灵活运用三角形中位线定理解决综合性问题，学会根据题目条件构造中位线，实现线

段关系、平行关系的转化。

知识清单

知识点 01 三角形的中位线

1. 定义

连接三角形两边中点的线段叫做三角形的_____.

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是边 AB、AC 的中点，于是线段 DE 就是 $\triangle ABC$ 的一条中位线.

如图 2，每一个三角形有三条中位线

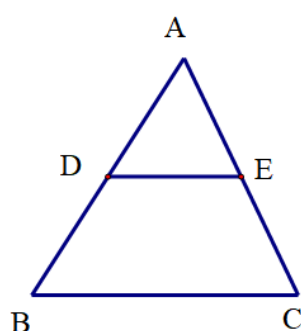


图1

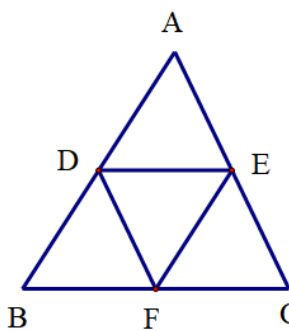


图2

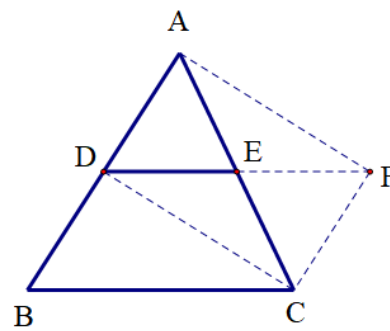


图3

2.三角形中位线定理：(如图 2) 三角形的中位线_____，并且_____.

作用：可以证明线段的**倍分关系**；

可以证明线段**位置关系**——平行.

3.三角形中位线的知识点归纳：(如图 2)

- (1) 三角形共有三条中位线，并且它们又重新构成一个新的三角形；
- (2) 三条中位线组成一个三角形，其周长为原三角形周长的一半；
- (3) 三条中位线将原三角形分割成的四个三角形全等；
- (4) 三条中位线分割原三角形后形成三个平行四边形.

【即学即练】

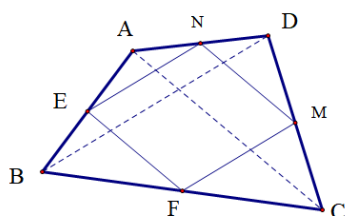
1. 如上图 1,在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是边 AB、AC 的中点

求证： $DE \parallel BC$, 且 $DE = \frac{1}{2}BC$

知识点 02 中点四边形

1. 顺次连接四边形各边中点得到的新四边形叫作原四边形的中点四边形；

如图所示，E、F、M、N 分别是四边形 ABCD 各边的中点，四边形 EFMN 就是中点四边形。



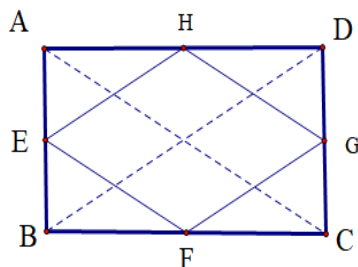
2. 性质：任意四边形的中点四边形一定是平行四边形；

在上图中，如果 $AC=BD$ ，那么四边形 EFMN 还是菱形；

如果 $AC \perp BD$ ，那么四边形 EFMN 还是矩形。

【即学即练】

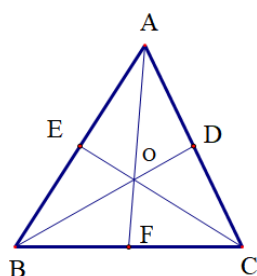
1. 求证：顺次连接矩形各边中点得到的四边形是菱形。



知识点 03 三角形的重心

1. 定义：三角形的三条中线交于一点，此交点叫作三角形的_____。

如图，在 $\triangle ABC$ 中，E、F、D 分别为三角形三边的中点，则 AF、BD、CE 交于一点 O，O 叫作 $\triangle ABC$ 的_____。



2. 三角形重心的性质

三角形重心定理：三角形的重心到一个顶点的距离等于它到对边中点的距离的_____.

3. 其他性质

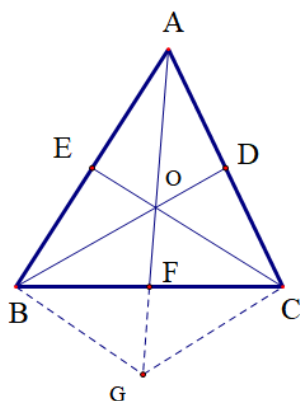
三角形的三条中线把三角形分成面积相等的六个小三角形.

在上图中在上图中 $S_{\triangle AEO} = S_{\triangle BEO} = S_{\triangle BFO} = S_{\triangle CFO} = S_{\triangle CDO} = S_{\triangle ADO}$

【即学即练】

1. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，BD、CE 分别是边 AC、AB 上的中线，BD 和 CE 交于点 O，连接 AO 并延长交边 BC 于点 F.

求证：(1) AF 是边 BC 上的中线；(2) $OF = \frac{1}{2}AO$



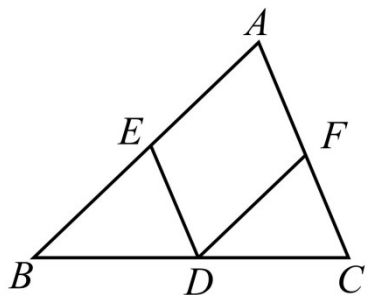
题型精讲

题型 01 与三角形中位线有关的计算

【典例 1】 (24-25 八年级下·全国·课后作业) 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 5$ ， $BC = 12$ ，则连结两条直角边中点的线段长为_____.

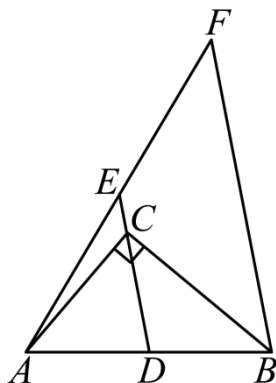
【变式1】三角形的三边长分别是 3cm ， 5cm ， 6cm ，则连结三边中点所围成的三角形的周长是_____ cm 。

【变式2】如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， E ， D ， F 分别是 AB ， BC ， CA 的中点， $AB=6$ ， $AC=4$ ，则四边形 $AEDF$ 的周长是（ ）



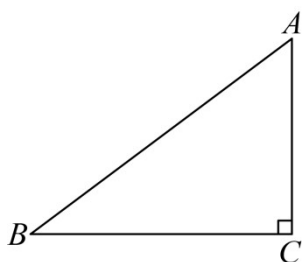
- A. 10 B. 20 C. 30 D. 40

【变式3】如图， $\angle ACB=90^\circ$ ， D 为 AB 的中点，连接 DC 并延长到 E ，使 $CE=\frac{1}{3}CD$ ，过点 B 作 $BF\parallel DE$ ，与 AE 的延长线交于点 F ，若 $AB=6$ ，则 BF 的长为（ ）



- A. 6 B. 7 C. 8 D. 10

【变式4】如图，一张三角形纸片 ABC ，其中 $\angle C=90^\circ$ ， $AC=6$ ， $BC=8$ 。某同学将纸片做两次折叠：第一次使点 A 落在 C 处，折痕记为 m ；然后将纸片展平做第二次折叠，使点 A 落在 B 处，折痕记为 n 。则 m 、 n 的长度分别是（ ）



A. $4, \frac{15}{4}$

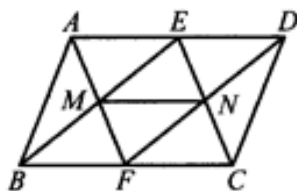
B. $4, 3$

C. $4, \frac{12}{5}$

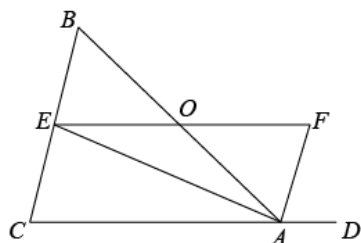
D. $3, 5$

题型 02 与三角形中位线有关的证明

【典例 1】 如图所示，已知在 $\square ABCD$ 中， E, F 分别是 AD, BC 的中点，求证： $MN \parallel BC$ 。



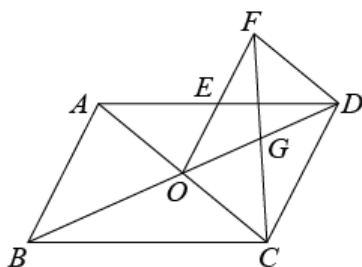
【变式 1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， AE 是 $\angle BAC$ 的角平分线，点 O 为 AB 的中点，延长 EO 交 $\triangle ABC$ 的外角平分线于点 F 。



(1) 求证： $EO=OF$ ；

(2) 连接 BF ，试判断四边形 $AEBF$ 的形状，并证明你的结论。

【变式 2】 已知：平行四边形 $ABCD$ ，对角线 AC, BD 相交于点 O ， E 是 AD 的中点，连接 OE 并延长至 F 使得 $OE=EF$ ，连接 FD, FC ， FC 交 BD 于点 G 。



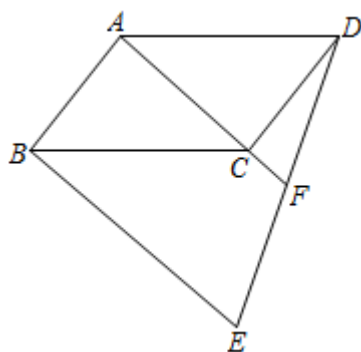
求证：

(1) $OF=DC$ ；

(2) 连接 AF ，请判断四边形 $AODF$ 的形状，并证明你的结论。

【变式 3】 如图，点 E 在 $\square ABCD$ 外，连接 BE, DE ，延长 AC 交 DE 于 F ， F 为 DE 的中点。

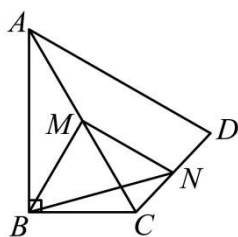
求证： $AF \parallel BE$ ；



【变式4】如图，在四边形ABCD中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AC = AD$ ，M，N分别为AC，CD的中点，连接BM，MN，BN。

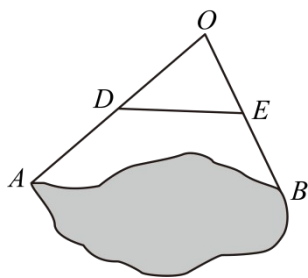
(1) 求证： $BM = MN$ ；

(2) $\angle BAD = 60^\circ$ ，AC平分 $\angle BAD$ ， $AC = 2$ ，求BN的长。



题型 03 三角形中位线的简单应用

【典例1】如图，为测量池塘边A、B两点的距离，小明在池塘的一侧选取一点O，测得OA、OB的中点分别是点D、E，且 $DE = 14\text{m}$ ，则A、B间的距离是（ ）。



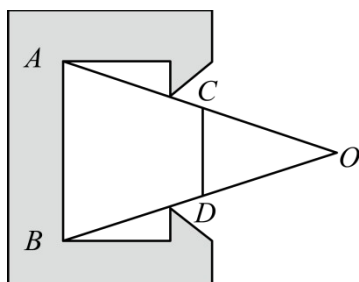
A . 18m

B . 24m

C . 28m

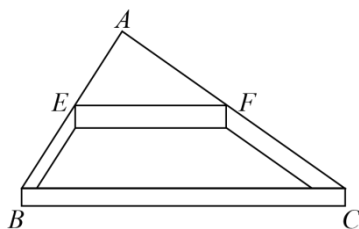
D . 30m

【变式1】如图，把两根钢条 OA ， OB 的一个端点连在一起， C ， D 分别是 OA ， OB 的中点，若 $CD = 5\text{cm}$ ，则该工件内槽宽 AB 的长为 ()



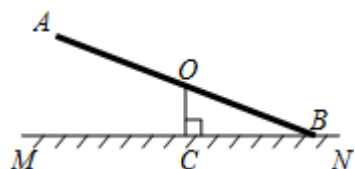
- A . 8cm B . 9cm C . 10cm D . 11cm

【变式2】如图，小棒家有一块三角形的空地 ABC ，测量三边 $AB=6$ 米， $BC=8$ 米， $AC=9$ 米，且 E 、 F 分别是 AB 、 AC 边的中点，小棒妈妈想把四边形 $BCFE$ 用木栅栏围一圈放养鹤鹑，则需要木栅栏的长是 ()

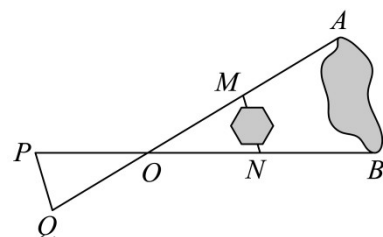


- A . 18.5 米 B . 19.5 米 C . 19 米 D . 20 米

【变式3】如图， O 为跷跷板 AB 的中点，支柱 OC 与地面 MN 垂直，垂足为点 C ，且 $OC=50\text{cm}$ ，当跷跷板的一端 B 着地时，另一端 A 离地面的高度为 _____ cm 。

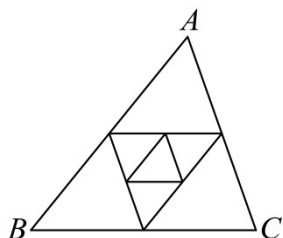


【变式4】成都大运会主火炬塔位于东安湖体育公园，如图，小明想测量东安湖 A ， B 两点间的距离，他在东安湖的一侧选取一点 O ，分别取 OA ， OB 的中点 M ， N ，但 M ， N 之间被障碍物遮挡，故无法测量线段 MN 的长，于是小明在 AO ， BO 延长线上分别选取 P ， Q 两点，且满足 $OP=ON$ ， $OQ=OM$ ，小明测得线段 $PQ=90$ 米，则 A ， B 两点间的距离是 _____ 米。



题型 04 中点四边形

【典例 1】 如图，已知 $\triangle ABC$ 周长为 1，连接 $\triangle ABC$ 三边的中点构成第 2 个三角形，再连接第 2 个三角形三边中点构成第 3 个三角形，依此类推，则第 2025 个三角形的周长是 ()



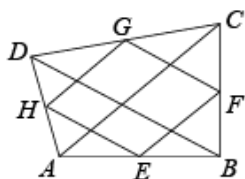
A . 2024

B . $\frac{1}{2^{2024}}$

C . 2025

D . $\frac{1}{2^{2025}}$

【变式 1】 如图，任意四边形 $ABCD$ 各边中点分别是 E, F, G, H ，若对角线 AC, BD 的长都为 20cm，则四边形 $EFGH$ 的周长是 ()



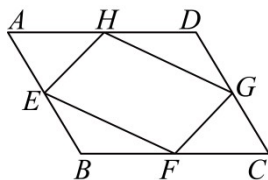
A . 80cm

B . 40cm

C . 20cm

D . 10cm

【变式 2】 如图，在四边形 $ABCD$ 中，点 E, F, G, H 分别是各边的中点．甲说：若四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则四边形 $EFGH$ 也是平行四边形；乙说：若四边形 $EFGH$ 是平行四边形，则四边形 $ABCD$ 也是平行四边形．下列说法正确的是 ()



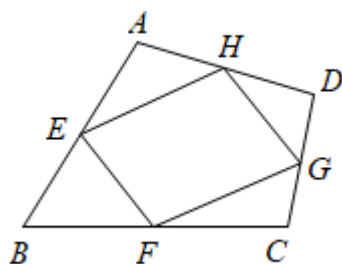
A . 甲、乙都正确

B . 甲正确，乙错误

C . 甲错误，乙正确

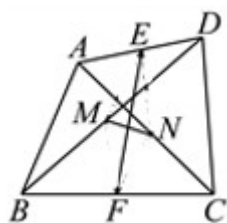
D . 甲、乙都错误

【变式 3】 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中， E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 的中点．求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形．



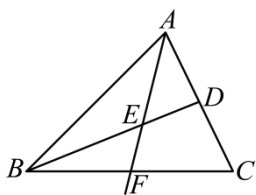
【变式 4】 如图， AC 、 BD 是四边形 $ABCD$ 的对角线， E 、 F 分别是 AD 、 BC 的中点， M 、 N 分别是 BD 、 AC 的中点。

求证： EF 与 MN 互相平分。



题型 05 利用重心的性质计算线段的长度

【典例 1】 如图， $\triangle ABC$ 中， $BC = 6$ ， BD 是中线， E 是 BD 上一点，作射线 AE ，交 BC 于点 F ，若 $BE = 2DE$ ，则 $FC =$ ()



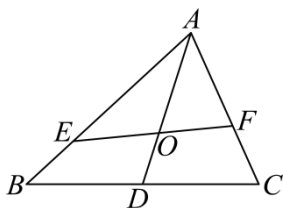
A . 2

B . 2.5

C . 3

D . 3.5

【变式 1】 已知点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，连接 AO 并延长交 BC 于 D 点，过点 O 作直线分别交 AB ， AC 于 E 点， F 点，则下列说法正确的是 ()



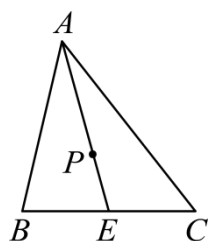
A . $BD = CD$

B . $\angle BAD = \angle CAD$

C. $OE = OF$

D. $BE = CF$

【变式2】 如图， AE 经过 $\triangle ABC$ 的重心 P ，如果 $AE = 12$ ，那么 PE 的长为 ()



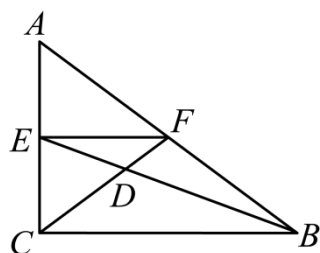
A. 3

B. 4

C. 6

D. 8

【变式3】 如图 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 是 $\triangle ABC$ 的重心，连接 BD 并延长交 AC 于点 E ，连接 CD 并延长交 AB 于点 F ，连接 EF 。若 $AE = 3$ ， $CF = 5$ ，则 $EF =$ ()



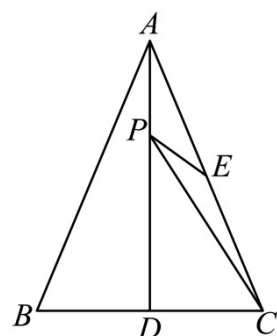
A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【变式4】 在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 、 E 分别是 BC ， AC 的中点，点 P 是线段 AD 上的一个动点，当 $\triangle PCE$ 的周长最小时， P 点的位置在 ()



A. $\triangle ABC$ 的重心处

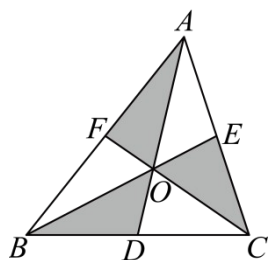
B. AD 的中点处

C. A 点处

D. D 点处

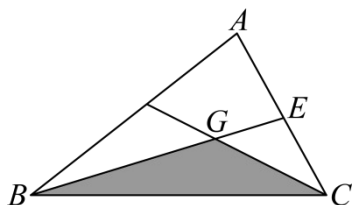
题型 06 利用重心的性质计算图形的面积

【典例 1】 如图， O 是 $\triangle ABC$ 的重心．若 $\triangle ABC$ 的面积是 6，则阴影部分的面积的和是 ()



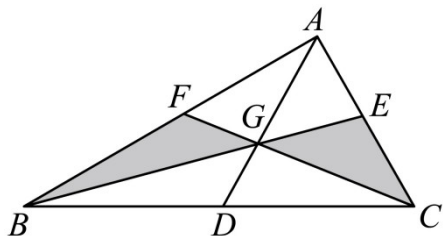
- A . 2 B . 3 C . 4 D . 6

【变式 1】 如图， G 是 $\triangle ABC$ 的重心，若 $S_{\triangle ABC} = 45$ ，则图中阴影部分的面积是 ()



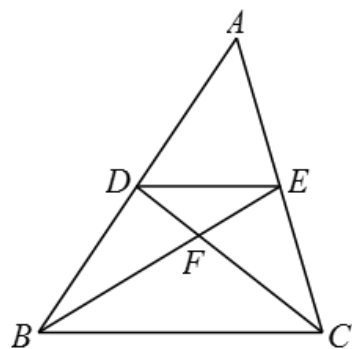
- A . 15 B . 25 C . 20 D . 10

【变式 2】 如图， $\triangle ABC$ 的三条中线 AD ， BE ， CF 交于同一点 G ，若 $S_{\triangle ABC} = 12$ ，则图中阴影部分面积是 ()



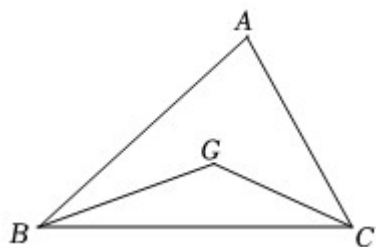
- A . 3 B . 4 C . 5 D . 6

【变式 3】 如图： $\triangle ABC$ 中， DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，连接 DC ， BE 相交于点 F ，若 $S_{\triangle DEF} = 1$ ，则 $S_{\triangle ADE}$ 为 ()



- A . 3 B . 4 C . 9 D . 12

【变式4】 如图，已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，那么 $S_{\triangle BCG} : S_{\triangle ABC}$ 等于 ()

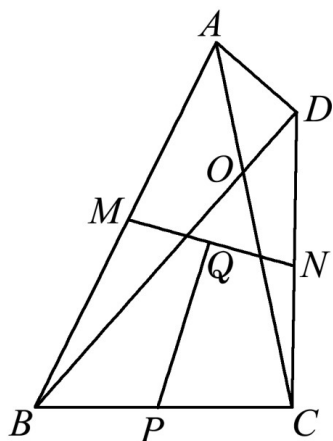


- A . 1 : 2 B . 1 : 3 C . 2 : 3 D . 2 : 5

题型 07 与中位线有关的证明思路

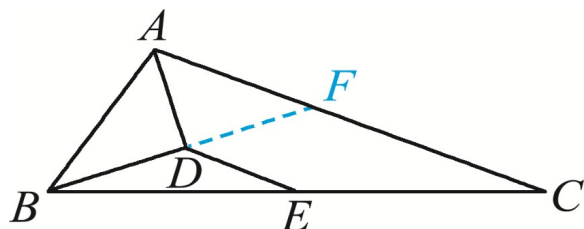
【典例1】 连结两点构造中位线

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O ， $AC = BD$ ， M ， P ， N 分别是边 AB ， BC ， CD 的中点， Q 是 MN 的中点，连结 PQ 。求证： $PQ \perp MN$ 。



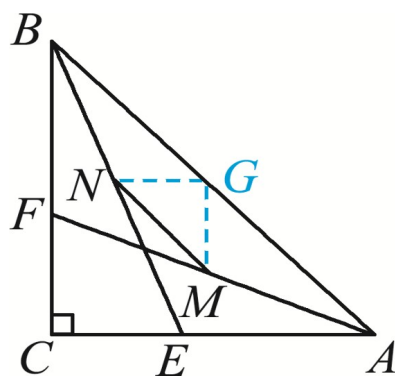
【变式1】 利用“角平分线 + 垂直”构造中位线

2.如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线， $BD \perp AD$ ， E 是边 BC 的中点，连结 DE 。如果 $AB = 6$ ， $AC = 14$ ，求 DE 的长。



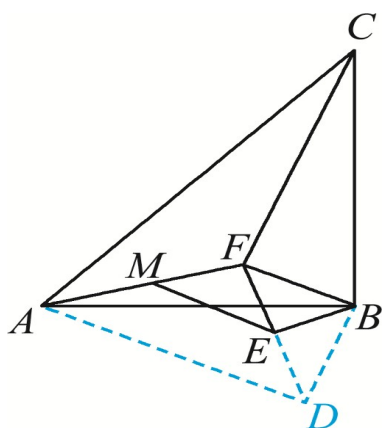
【变式2】 取中点构造中位线

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $CA = CB$ ，点 E, F 分别在边 CA, CB 上， $CE = CF$ ， M, N 分别为 AF, BE 的中点，连结 MN 。求证： $AE = \sqrt{2}MN$ 。



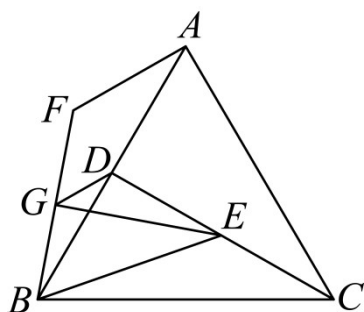
【变式3】 倍长构造中位线

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $BA = BC$ ， $\triangle BEF$ 为等腰直角三角形， $\angle BEF = 90^\circ$ ， M 为 AF 的中点，连结 ME 。求证： $ME = \frac{1}{2}CF$ 。



【变式4】利用三线合一找中点构造中位线

如图，已知等边 $\triangle ABC$ ， $CD \perp AB$ 于 D ， $AF \perp AC$ ， E 为线段 CD 上一点，且 $CE = AF$ ，连接 BE ， BF ， $EG \perp BF$ 于 G ，连接 DG 。



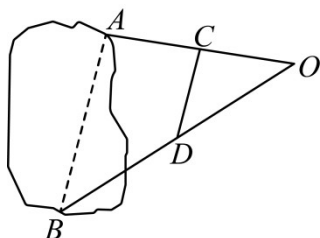
(1) 求证： $BE = BF$ ；

(2) 试说明 DG 与 AF 的位置关系和数量关系。

强化训练

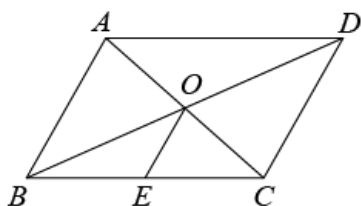
一、单选题

1. 如图，为了测量位于一水塘旁的两点 A, B 间的距离，在地面上确定点 O ，分别取 OA, OB 的中点 C, D ，量得 $CD = 12\text{m}$ ，则 A, B 之间的距离是 ()



- A. 18m B. 24m C. 30m D. 36m

2. 如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC, BD 交于点 O, E 是边 BC 边上的中点，若 $OE = 3, AD = 8$ ，则 $\square ABCD$ 的周长为 ()

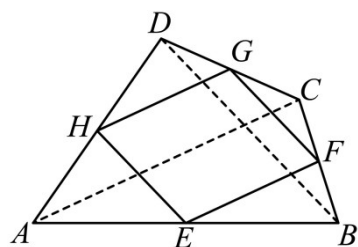


- A. 11 B. 14 C. 28 D. 33

3. 下列说法正确的是 ()

- A. 直角三角形只有一条高
- B. 三角形的重心是三条角平分线的交点
- C. 三角形的三条中线都在三角形内部，且交于一点
- D. 三角形越大，它的内角和就越大

4. 如图，点 E, F, G, H 分别为四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 的中点。下列三种说法：



- ①·四边形 $EFGH$ 一定是平行四边形；
- ②·若 $AC = BD$ ，则四边形 $EFGH$ 是菱形；
- ③·若 $AC \perp BD$ ，则四边形 $EFGH$ 是矩形。

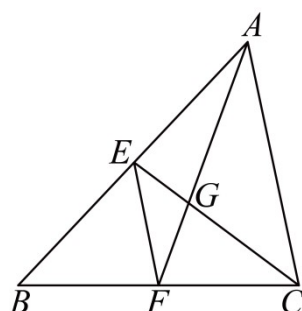
其中正确的是 ()

- A . ① B . ①② C . ①③ D . ①②③

5. 若一个三角形的两边长分别为 3 和 5，则该三角形第三边的中线可以取的值为 ()

- A . 1 B . 2 C . 4 D . 8

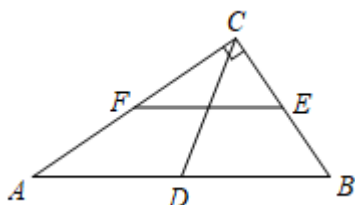
6. 如图，点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，连接 CG ， AG 并延长分别交 AB ， BC 于点 E ， F ，连接 EF ，若 $AB = 4.4$ ， $AC = 3.4$ ， $BC = 3.6$ ，则 EF 的长度为 ()



- A . 1.7 B . 1.8 C . 2.2 D . 2.4

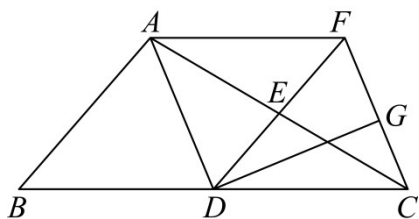
二、填空题

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D ， E ， F 分别为 AB ， BC ， CA 的中点。若 EF 的长为 10，则 CD 的长为_____。

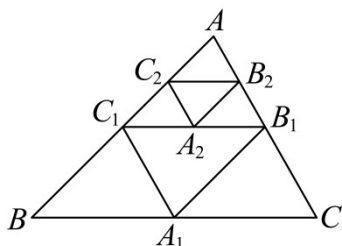


8. 如图， $\triangle ABC$ 的中线 BE ， CF 相交于点 G ，若 $\triangle ABC$ 的面积为 30，则四边形 $AFGE$ 的面积是_____

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别是边 BC 、 AC 的中点，过点 A 作 $AF \parallel BC$ 交 DE 的延长线于点 F ，连接 AD 、 CF ，过点 D 作 $DG \perp CF$ 于点 G 。若 $AB = 3$ ， $BC = 5$ ，四边形 $ADCF$ 是菱形，则 DG 的长为

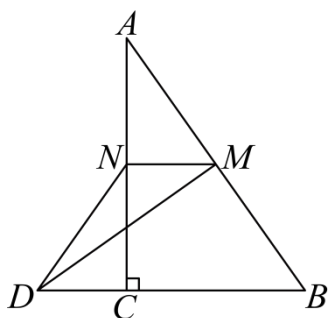


10. 如图， $\triangle ABC$ 的周长为 a ，以它的各边的中点为顶点作 $\triangle A_1B_1C_1$ ，再以 $\triangle A_1B_1C_1$ 各边的中点为顶点作 $\triangle A_2B_2C_2$ ，再以 $\triangle A_2B_2C_2$ 各边的中点为顶点作 $\triangle A_3B_3C_3$ ，……如此下去，则 $\triangle A_{2024}B_{2024}C_{2024}$ 的周长为_____。

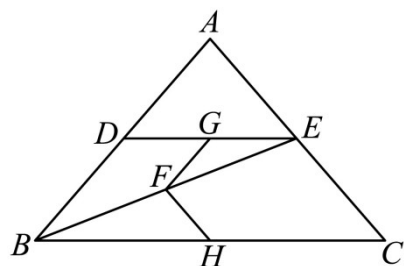


三、解答题

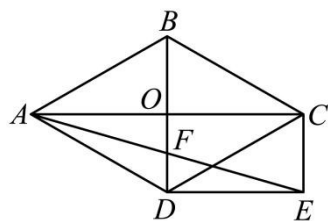
11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， M 、 N 分别是 AB 、 AC 的中点，延长 BC 到点 D ，使 $CD = \frac{1}{3}BD$ ，连接 DM 、 DN 、 MN ，若 $AB = 6$ ，求 DN 的长。



12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 上的点，连接 BE 、 DE ， $\angle ADE = \angle AED$ ，点 F 、 G 、 H 分别为 BE 、 DE 、 BC 的中点。求证： $FG = FH$ 。



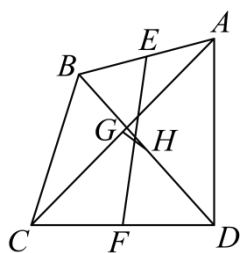
13. 如图，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 垂直 BD 于点 O ， O 、 F 分别为 AC 、 AE 中点，分别过点 C 、 D 作 $CE \parallel BD$ ， $DE \parallel AC$ ， CE 和 DE 交于点 E 。



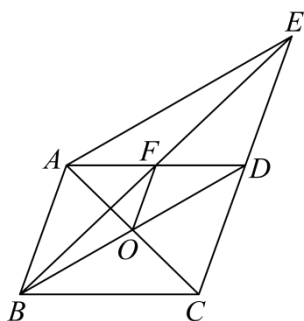
(1) 求证：四边形 $ODEC$ 是矩形；

(2) 若 $OF = 1$ ， $\angle CAE = 30^\circ$ 时，求 AC 的长。

14. 如图，已知四边形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 、 G 、 H 分别是 AB 、 CD 、 AC 、 BD 的中点。求证： EF 和 GH 互相平分。



15. 如图，在 $\square ABCD$ 中， AC 、 BD 相交于点 O ，延长 CD 到点 E ，使 $DE = CD$ ，连接 AE 。



(1) 求证：四边形 $ABDE$ 是平行四边形；

(2) 连接 BE ，交 AD 于点 F ，连接 OF ，求证： $CE = 4OF$ 。

16. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， D 为平面内一点，将线段 CD 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到线段 CE ，连接 AE ， AD ，取 AD 中点 F ，连接 BF 。

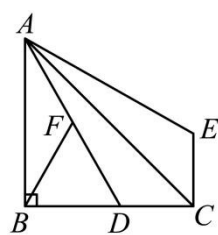


图1

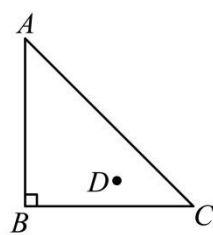


图2

(1) 如图 1，当点 D 在线段 BC 上，用等式表示 BF 与 AE 的数量关系，并证明；

(2) 如图 2，当点 D 在 $\triangle ABC$ 内部时，

① 依题意补全图 2；

② 判断 (1) 中 BF 与 AE 的数量关系是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请说明理由。