

专题 09 《二元一次方程组》高分突破题型

题型归纳

知识点 01：整体代入法解二元一次方程组

知识点 02 轮换对称法解二元一次方程组

知识点 03 换元法解二元一次方程组

知识点 04 二元一次方程组的整数

知识点 05 解含参二元一次方程组的解法

题型专练

知识点 01：整体代入法解二元一次方程组

1. (24-25 六年级下·上海·期末) 【阅读材料】在解二元一次方程组时，我们常常也会采用一种“整体代入

消元”的方法将二元一次方程组转化为一元一次方程求解，比如，解方程组
$$\begin{cases} 2x + 5y = 3 \text{ ①} \\ 4x + 11y = 5 \text{ ②} \end{cases}$$
，首先将方程②

变形得 $4x + 10y + y = 5$ ，即 $2(2x + 5y) + y = 5$ ③，其次把方程①代入③得： $2 \times 3 + y = 5$ ，即 $y = -1$ ，最后把

$y = -1$ 代入方程①，得 $x = 4$ ，所以方程组的解为
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$
。

【解决问题】

请用“整体代入消元”的方法解方程组
$$\begin{cases} 3x + 4y = 16 \textcircled{1} \\ 6x + 10y = 25 \textcircled{2} \end{cases}$$
 ;

2. (24-25 六年级下·上海·期末) 已知 x, y 满足方程组
$$\begin{cases} x + xy + 3y = 10 \textcircled{1} \\ 3x - xy + 9y = 10 \textcircled{2} \end{cases}$$
 , 求 xy 的值 .

3. (24-25 六年级下·上海·期末) 定义：我们把关于 x, y 的二元一次方程 $(a+n)x + (b+n)y = c+n$ 叫做方

程 $ax + by = c$ ($abc \neq 0$, n 为正整数) 的“ n 阶方程” .

(1) 方程 $2x + 3y = 7$ 的“2 阶方程”为：_；

(2) 方程 $-x + 2y = k$ 的“4 阶方程”和 $x + 3y = k + 1$ 的“1 阶方程”有无数组相同的解，求 k 的值；

(3) 若 $\begin{cases} x = m + 1 \\ y = m - 3 \end{cases}$ 是关于 x, y 的方程 $ax + by = c$ 与它的“3 阶方程”构成的方程组的解，求 $-5a + 3b + 2c - 4$ 的值 .

知识点 02 轮换对称法解二元一次方程组

1. (24-25 六年级下·上海·期末) 解方程组：
$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \textcircled{1} \\ 3y + 4z = 25 \textcircled{2} \\ 4z + 2x = 18 \textcircled{3} \end{cases}$$

2. (24-25 六年级下·上海虹口·期末) 解方程组
$$\begin{cases} 14x + 15y = 16 \textcircled{1} \\ 17x + 18y = 19 \textcircled{2} \end{cases}$$
 由于 x, y 的系数及常数项的数值较大，

如果用常规的代入消元法、加减消元法来解，那么计算量很大，且易出现运算错误，而采用下面的解法会

比较简单 . $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ ，得 $3x + 3y = 3$ ，所以 $x + y = 1 \textcircled{3}$ ， $\textcircled{3} \times 14$ ，得 $14x + 14y = 14 \textcircled{4}$ ， $\textcircled{1} - \textcircled{4}$ ，得 $y = 2$ ，从

而得 $x = -1$ ，所以原方程组的解为 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ 。

(1) 请运用上述方法解方程组： $\begin{cases} 28x + 33y = 18 \\ 32x + 37y = 22 \end{cases}$ ；

(2) 请直接写出关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} ax + (a+d)y = a+2d \textcircled{1} \\ (a+3d)x + (a+4d)y = a+5d \textcircled{2} \end{cases}$ (a, d 是常数, $d \neq 0$) 的解：_____。

3. (24-25 六年级下·上海·期末) 我们把关于 x 、 y 的两个二元一次方程 $ax + by = c$ 与 $bx + ay = c$ ($a \neq b$) 叫作

互为共轭二元一次方程；二元一次方程组 $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + ay = c \end{cases}$ ，叫做关于 x 、 y 共轭二元一次方程组。例如：

$2x - y = 3$ 与 $-x + 2y = 3$ 互为共轭二元一次方程，二元一次方程组 $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$ ，叫做关于 x 、 y 共轭二元一

次方程组； $2(x-1) - (y+2) = 3$ 与 $-(x-1) + 2(y+2) = 3$ 互为共轭二元一次方程，二元一次方程组

$\begin{cases} 2(x-1) - (y+2) = 3 \\ -(x-1) + 2(y+2) = 3 \end{cases}$ ，叫做关于 $x-1$ 、 $y+2$ 的共轭二元一次方程组。

(1) 若关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} x + 2y = b + 2 \\ (1-a)x + y = 3 \end{cases}$ ，为共轭方程组，则 $a =$ _____， $b =$ _____；

(2) 若二元一次方程 $x + by = 1$ 中 x 、 y 的值满足下列表格：

x	1	0
y	0	2

则这个方程的共轭二元一次方程是_____；

(3) 解下列方程组（直接写出方程组的解即可）：
$$\begin{cases} 2024x - 2025y = 1 \\ -2025x + 2024y = 1 \end{cases}$$
 的解为_____。

(4) 发现：若方程组
$$\begin{cases} ax + by = c + a + 2b \\ bx + ay = c + 2a + 3b \end{cases}$$
是共轭方程组，且方程组的解是
$$\begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$$
，请计算

$n^2 - mn - n + m + 2025$ 的值。

题型 03 换元法解二元一次方程组

1. (24-25 六年级下·上海杨浦·期末) 解方程组：
$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{3} = 2 \\ \frac{3(x-y)}{2} - \frac{4(x+y)}{3} = 13 \end{cases}$$
。

2. (24-25 六年级下·上海·期末) 已知方程组
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$
的解是
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$
，则方程组

$$\begin{cases} a_1(x+3) + b_1(y-2) = c_1 \\ a_2(x+3) + b_2(y-2) = c_2 \end{cases}$$
 的解_____。

3. (24-25 六年级下·上海·期末) 已知关于 x, y 的方程组
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$
的解是
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$
则关于 m, n 的方程组

$$\begin{cases} a_1(m+n) + b_1(m-n) = c_1 \\ a_2(m+n) + b_2(m-n) = c_2 \end{cases}$$
 的解是_____。

4. (24-25 六年级下·上海·期末) 阅读探索，知识累积。解方程组
$$\begin{cases} (a-1) + 2(b+2) = 6 \\ 2(a-1) + (b+2) = 6 \end{cases}$$
。

解：设 $a-1 = x$ ， $b+2 = y$ ，原方程组可变为
$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

解方程组得：即 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ ， $\begin{cases} a-1=2 \\ b+2=2 \end{cases}$ ，所以 $\begin{cases} a=3 \\ b=0 \end{cases}$ 。这种解方程组的方法叫换元法。

(1) 拓展提高

运用上述方法解下列方程组：
$$\begin{cases} \left(\frac{a}{3}-1\right)+2\left(\frac{b}{5}+2\right)=4 \\ 2\left(\frac{a}{3}-1\right)+\left(\frac{b}{5}+2\right)=5 \end{cases}$$
；

(2) 能力运用

已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ 。直接写出关于 m, n 的方程组

$\begin{cases} 5a_1(m+3)+3b_1(n-2)=c_1 \\ 5a_2(m+3)+3b_2(n-2)=c_2 \end{cases}$ 的解为_____。

知识点 04 二元一次方程组的整数解

1. (24-25 六年级下·上海闵行·期末) 二元一次方程 $x+4y=7$ 的非负整数解是_____。

2. (24-25 六年级下·上海·期末) 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x-y=2m+1 \\ x+2y=3m \end{cases}$ 。

(1) 求方程组的解 (用含 m 的代数式表示)；

(2) 若方程组的解满足 $x>3$ ， $y<1$ ，求 m 的整数解。

3. (24-25 六年级下·上海·期末) 阅读下列材料，解答下面的问题。

我们知道每一个二元一次方程都有无数组解，例如 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x=4 \\ y=0.5 \end{cases}$ 都是方程 $x+2y=5$ 的解，但

在实际生活中，我们往往只需求出其正整数解即可。

例：求二元一次方程 $2x + 5y = 24$ 的正整数解。

解：∵ $2x + 5y = 24$ ，∴ $x = 12 - \frac{5y}{2}$ 。

∵ x 、 y 为正整数，

∴ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases}$ 。

【解决问题】

(1) 若 $\frac{20-x}{3}$ 为非负整数，且 $8 < x < 14$ ，则满足条件的整数 x 的值为——；

(2) 求方程 $2x + 3y = 8$ 的正整数解；

(3) 若要把一根长为 32m 的绳子截成长为 3m 和 4m 两种规格的绳子若干段（两种规格都有），请你在不浪费

材料的情况下，通过计算来设计几种不同的截法。

4. (24-25 六年级下·上海·期末) 某商场用 2750 元购进 A, B 两种新型节能台灯共 50 盏，这两种台灯的进

价，标价如下表所示：

类型	A 型	B 型
进价 (元/盏)	40	65
标价 (元/盏)	60	100

(1) 这两种台灯各购进多少盏？

(2) 若 A 型台灯按标价的 9 折出售，B 型台灯按标价的 8 折出售，那么这批台灯全部售出后，商场共获利多少元？

(3) 远东二中准备用 1560 元，按进价购买 A 型、B 型台灯（两种型号均购买），刚好 1560 元全部用完，那么学校有哪几种购买方案？

知识点 05 含参二元一次方程组的解法

1. (24-25 六年级下·上海·期末) 已知关于 x, y 的方程组
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2y + mx = -5 \end{cases}$$
.

(1) 请直接写出方程 $x + 2y = 3$ 的所有非负整数解.

(2) 若该方程组的解也满足方程 $x + y = 2$ ，求 m 的值.

2. (24-25 六年级下·上海·期末) 已知关于 x, y 的方程组
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 4ax + 5by = -22 \end{cases}$$
 和
$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ ax - by = 8 \end{cases}$$
 有相同的解，求：

(1) 它们相同的解；

(2) $(-a)^b$ 的值.

3. (24-25 六年级下·上海·期末) 若方程组
$$\begin{cases} 3x - y = 4k - 5 \\ -x + 3y = -2k + 7 \end{cases}$$
 的解满足 $x + y = 2026$ ，求 k 的值.

4. (24-25 六年级下·上海·期末) 已知关于 x, y 的方程组
$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ 2x - y + my - 5 = 0 \end{cases}$$

(1) 请直接写出方程 $2x + y - 6 = 0$ 的所有正整数解；

(2) 无论数 m 取何值，方程 $2x - y + my - 5 = 0$ 总有一个固定的解，请直接写出这个解；

(3) 若方程组的解满足 $x + y = 0$ ，求 m 的值；

(4) 若方程组的解中 y 恰为整数， m 也为整数，求 m 的值。