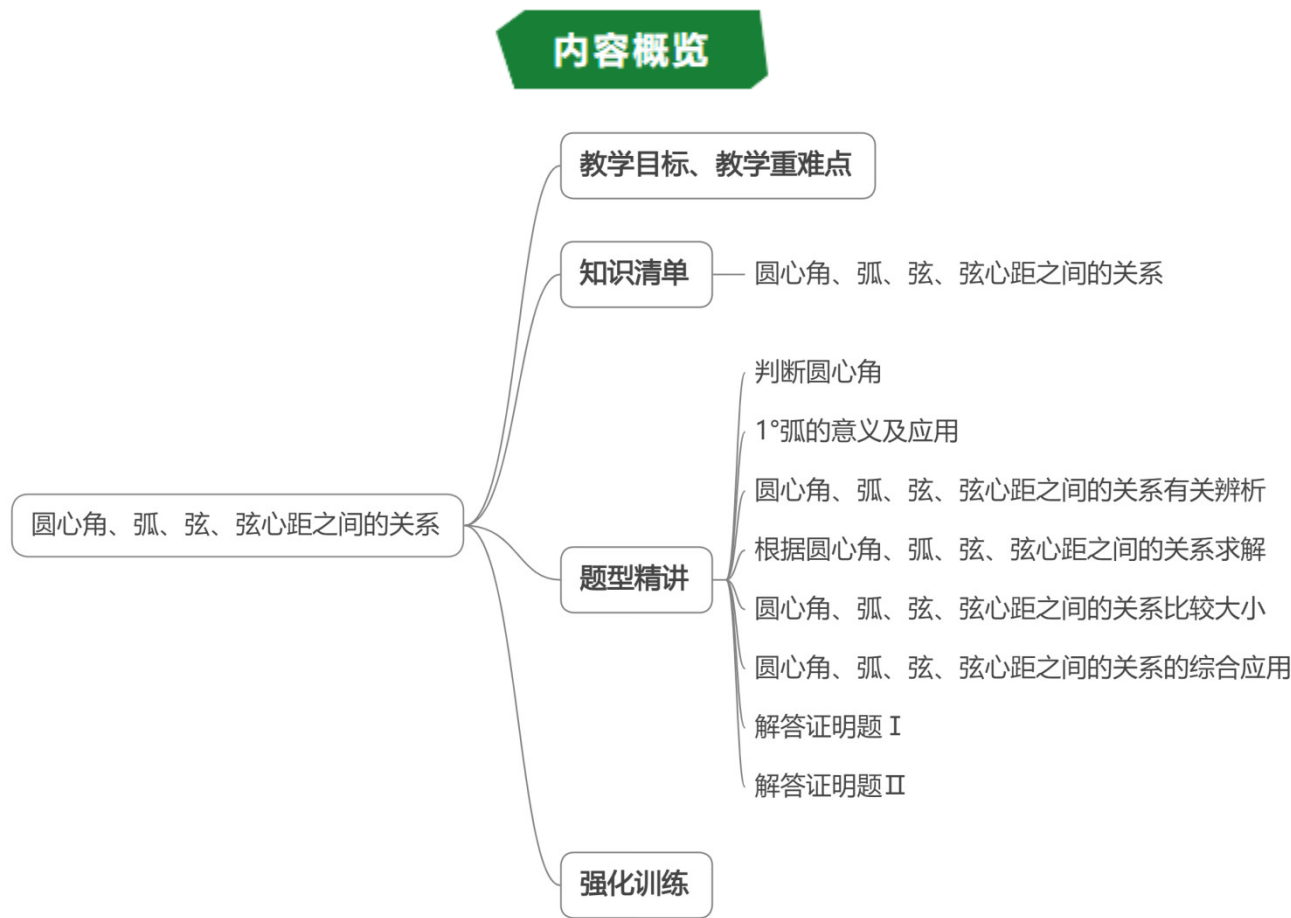


专题 27.2 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系



教学目标、教学重难点

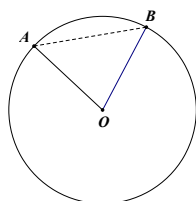
教学目标	1. 了解圆心角、弦心距等概念； 2. 根据教材证明圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系的定理及推论； 3. 应用圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系求解或证明。
教学重难点	1.重点 (1) 圆心角、弧、弦、弦心距的概念及辨析； (2) 圆心角、弧、弦、弦心距，“知一求三”； (3) 圆心角、弧、弦、弦心距的几何应用。 2.难点 (1) 根据圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系进行有关几何证明； (2) 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系的综合应用。

知识清单

知识点 1 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系

一、圆心角与弧的定义

1. **圆心角定义**：顶点在圆心的角叫做圆心角。如图所示， $\angle AOB$ 就是一个圆心角。

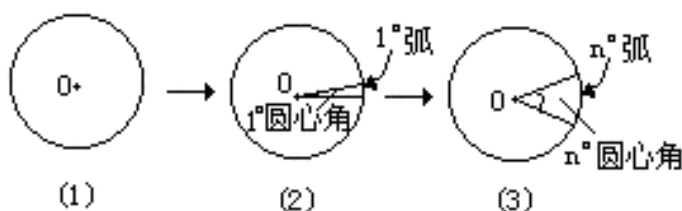


要点：(1) 一个角要是圆心角，必须具备顶点在圆心这一特征；

(2) 圆心角 $\angle AOB$ 所对的弦为线段 AB ，所对的弧为弧 AB 。

2. 1° 的弧的定义

1° 的圆心角所对的弧叫做 1° 的弧。如下图，



要点：

(1) 圆心角的度数和它所对的弧的度数相等。注意不是角与弧相等。即不能写成圆心角 $\angle AOB = \widehat{AB}$ 。

(2) 在同圆或等圆中，能够互相重合的弧叫等弧。等弧的长度相等，所含度数相等（即弯曲程度相等）。

二、弦心距

圆心到弦的距离叫做弦心距。在图 27-9 中，过圆心 O 作弦 AB 的垂线，垂足为 C ，则垂线段 OC 的长是弦 AB 的弦心距。

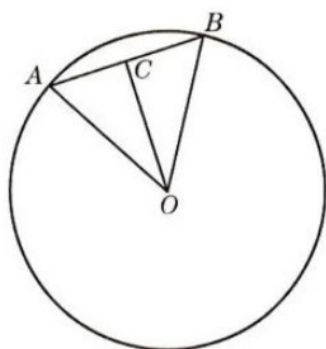


图 27-9

三、圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理：

① **定理** 在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等。

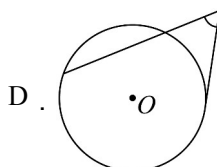
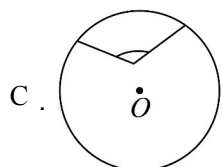
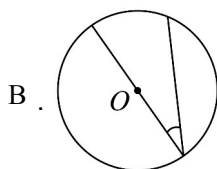
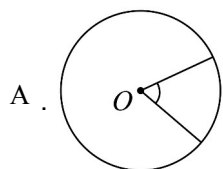
② **推论** 圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理有以下推论：

推论 在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条劣弧(或优弧)、两条弦、两条弦的弦心距得到的四组量中有

一组量相等，那么它们所对应的其余三组量也分别相等.

【即学即练】

1. 下列图形中的角是圆心角的是 ()



2. 下列说法正确的是 ()

A. 等弧所对的弦相等

B. 相等的弦所对的弧相等

C. 相等的圆心角所对的弧相等

D. 相等的圆心角所对的弦相等

3. $\odot O$ 中的一段劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数为 80° ，则 $\angle AOB = ()$

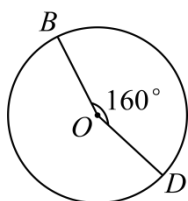
A. 10°

B. 80°

C. 170°

D. 180°

4. 如图，在 $\odot O$ 中， $\angle BOD = 160^\circ$ ，则 $\overset{\frown}{BD}$ 度数是 ()



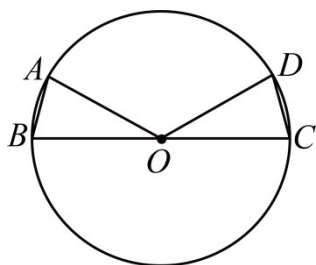
A. 200°

B. 160°

C. 120°

D. 80°

5. 如图，已知在 $\odot O$ 中， BC 是直径， $AB = DC$ ，则下列结论不一定成立的是 ()



A. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DC}$

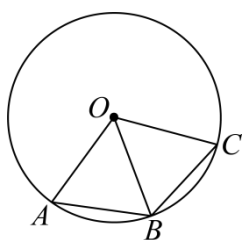
B. $OA = OB = AB$

C. O 到 AB 、 CD 的距离相等

D. $\angle AOB = \angle COD$

6. 如图， AB, BC 是 $\odot O$ 的弦，连接 OA, OB, OC ，若 $\angle AOB = \angle BOC$ ，则弦 AB ， BC 之间的数量关系为 ()

)



A. $AB = 2BC$

B. $AB = \frac{1}{2}BC$

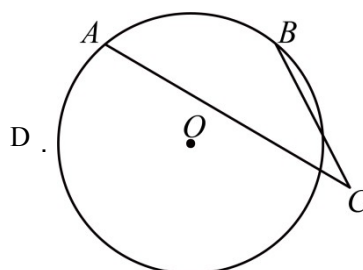
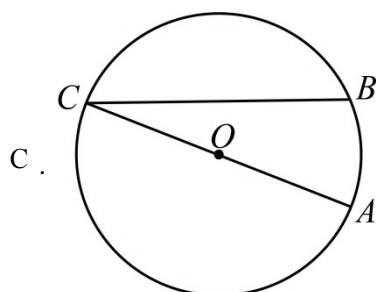
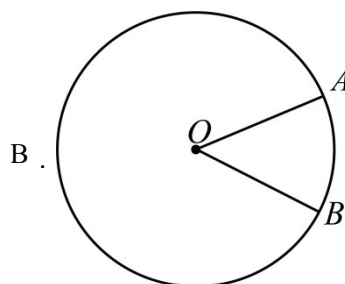
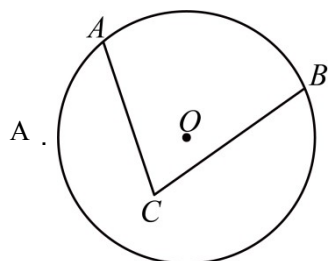
C. $AB = BC$

D. $AB = \frac{1}{3}BC$

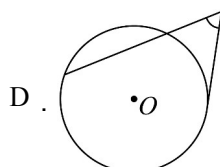
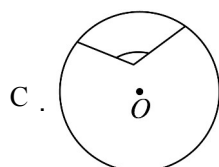
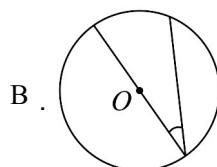
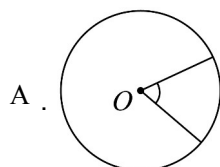
题型精讲

题型 01 判断圆心角

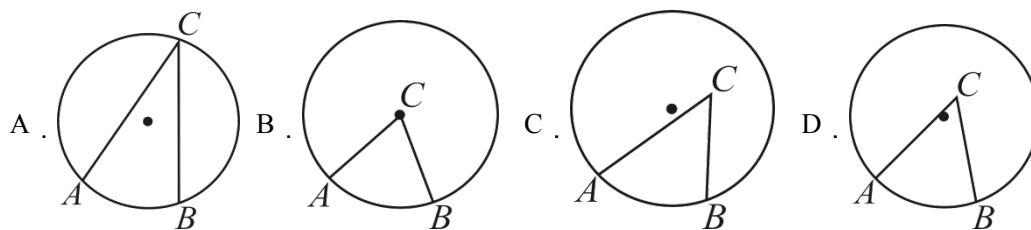
【典例 1】. 下列图形中的角是圆心角的是 ()



【变式 1】. 下列图形中的角是圆心角的是 ()

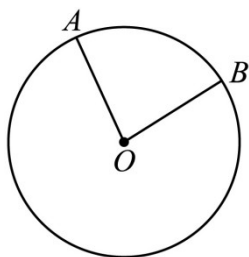


【变式 2】. 图中是圆心角的是 ()



题型 02 1° 弧的意义及应用

【典例 1】. 如图，在 $\odot O$ 中，劣弧 AB 的度数为 75° ，则圆心角 $\angle AOB = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



【变式 1】. 若将一个圆等分成三个扇形，则其中一个扇形圆心角的度数为 $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

【变式 2】. 将一个圆分割成三个扇形，它们圆心角度数的比 $1:3:5$ ，则最大扇形的圆心角的度数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

题型 03 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系有关辨析

【典例 1】. 在同圆或等圆中，若 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度等于 $\overset{\frown}{CD}$ 的长度，则下列说法正确的有 ()

① $\overset{\frown}{AB}$ 的度数 = $\overset{\frown}{CD}$ 的度数；② $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角等于 $\overset{\frown}{CD}$ 所对的圆心角；③ $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 是等弧；④ $\overset{\frown}{AB}$ 所对的弦长等于 $\overset{\frown}{CD}$ 所对的弦长.

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【变式 1】. 如果在两个圆中有两条相等的弦，那么 ()

A. 这两条弦所对的圆心角相等

B. 这两条弦所对的弧相等

C. 若两圆为等圆，则这两条弦所对的圆心角相等

D. 这两条弦所对的弦心距相等

【变式 2】. 下列四个命题：

① 同圆或等圆中，相等的弦所对的弧相等；

② 同圆或等圆中，相等的弧所对的弦相等；

③同圆或等圆中，相等的弦的弦心距相等；

④同圆或等圆中，相等的弧所对的圆心角相等．

真命题的个数有 ()

A . 1 个

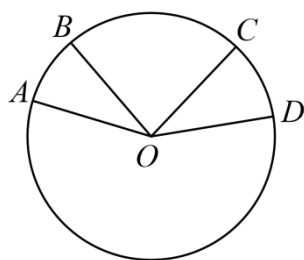
B . 2 个

C . 3 个

D . 4 个

题型 04 根据圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系求解

【典例 1】 . 如图，在 $\odot O$ 中，若 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ ， $\angle AOB = 35^\circ$ ，则 $\angle COD$ 的度数为 ()



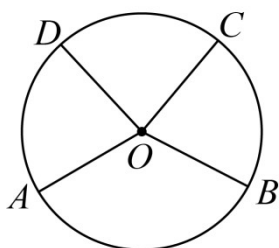
A . 35°

B . 45°

C . 55°

D . 65°

【变式 1】 . 如图， $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC}$ ，且 $\angle AOB = 120^\circ$ ，则 $\angle BOC$ 的度数为 ()



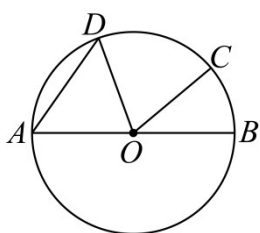
A . 90°

B . 80°

C . 70°

D . 60°

【变式 2】 . 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}$ ， $\angle COB = 40^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数是 ()



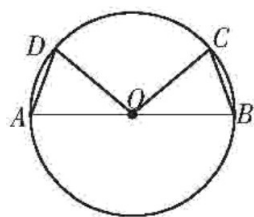
A . 50°

B . 55°

C . 60°

D . 65°

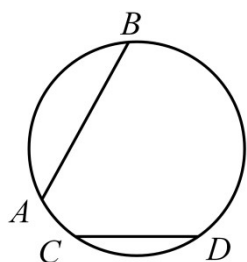
【变式 3】 . 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C, D 在 $\odot O$ 上， $\angle BOC = 40^\circ$ ， $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$ ，则 $\angle AOD$ 的度数是 ()



- A . 20° B . 40° C . 50° D . 60°

题型 05 根据圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系比较大小

【典例 1】 . 如图： $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{CD}$ ，则下列正确的是 ()



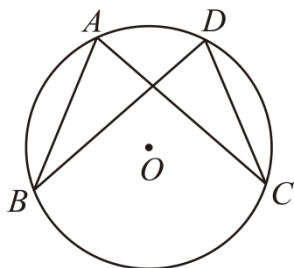
- A . $AB = 2CD$ B . $AB < 2CD$ C . $AB > 2CD$ D . 无法确定

【变式 1】 . 已知 $\odot O$ 中， $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{CD}$ ，则弦 AB 和 $2CD$ 的大小关系是_____ .

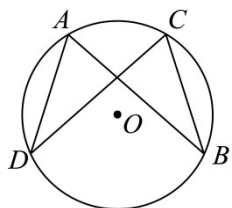
【变式 2】 . 如图，点 A, B, C, D 在 $\odot O$ 上 .

(1) 若 $AB = CD$ ，则 $\overset{\frown}{AB}$ _____ $\overset{\frown}{CD}$ ；

(2) 若 $BD = AC$ ，则 $\overset{\frown}{BD}$ _____ $\overset{\frown}{AC}$.



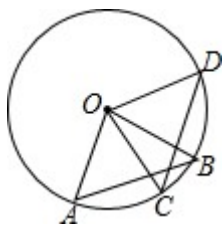
【变式 3】 . 如图， A, B, C, D 是 $\odot O$ 上的四点，且 $AD = BC$ ，则 AB 与 CD 的大小关系为 ()



- A . $AB > CD$ B . $AB = CD$ C . $AB < CD$ D . 不能确定

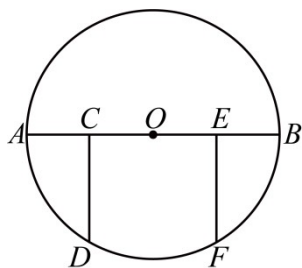
题型 06 圆心角、弧、弦、弦心距之间的综合应用

【典例 1】 如图，在 $\odot O$ 中，已知 $AB=CD$ ，则 AC 与 BD 的关系是 ()



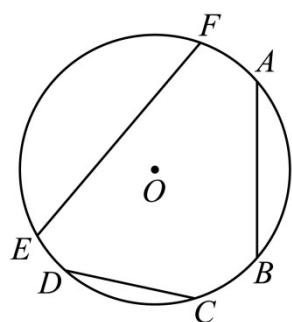
- A. $AC = BD$ B. $AC < BD$ C. $AC > BD$ D. 不确定

【变式 1】 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， CD 是 AO 的垂直平分线， EF 是 OB 的垂直平分线，则下列结论正确的是 ()



- A. $AD = DF = FB$ B. $AD > DF$
C. $DF < FB$ D. $AD = FB \neq DF$

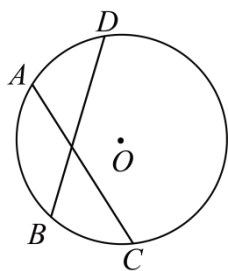
【变式 2】 如图，在一个圆内有 AB 、 CD 、 EF ，若 $AB+CD=EF$ ，则 $AB+CD$ 与 EF 的大小关系是 ()



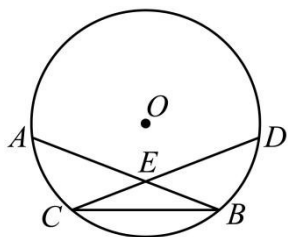
- A. $AB+CD = EF$ B. $AB+CD < EF$ C. $AB+CD \leq EF$ D. $AB+CD > EF$

题型 07 解答证明题

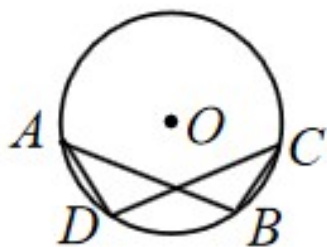
【典例 1】 已知： A 、 B 、 C 、 D 是 $\odot O$ 上的四个点，且 $\widehat{BC} = \widehat{AD}$ ，求证： $AC=BD$ 。



【变式1】 . 如图，在 $\odot O$ 中，弦 AB 与弦 CD 相交于点 E ，且 $AB = CD$. 求证： $CE = BE$.

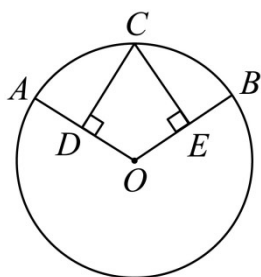


【变式2】 . 已知：如图， $\odot O$ 中弦 $AB = CD$. 求证： $AD = BC$.

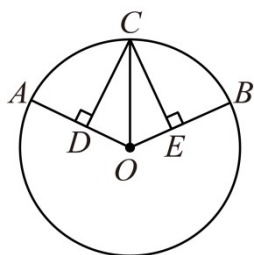


题型 08 解答证明题II

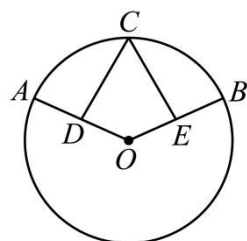
【典例1】 . 如图，在 $\odot O$ 中，弧 $AC = BC$ ， $CD \perp OA$ 于 D ， $CE \perp OB$ 于 E . 求证： $AD = BE$.



【变式1】 . 如图， D, E 分别是 $\odot O$ 的半径 OA, OB 上的点，且 $CD \perp OA$ ， $CE \perp OB$ ，垂足分别为 D, E ， $CD = CE$. 求证： C 是 $\widehat{AB}$ 的中点 .



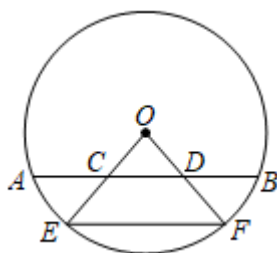
【变式2】 . 如图, $\widehat{AC} = \widehat{CB}$, D, E 分别是半径 OA, OB 的中点. 求证: $CD = CE$.



【变式3】 . 已知: 如图, 在 $\odot O$ 中, 弦 AB 与半径 OE, OF 交于点 C, D , $AC = BD$, 求证:

(1) $OC = OD$;

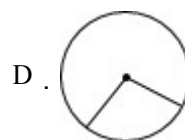
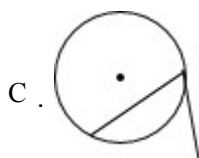
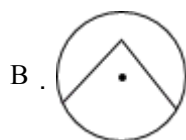
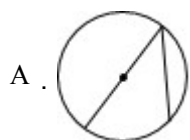
(2) $\widehat{AE} = \widehat{BF}$.



强化训练

一、单选题

1. 下列各角中, 是圆心角的是 ()



2. 下列说法中, 正确的是 ()

A. 等弦所对的弧相等

B. 等弧所对的弦相等

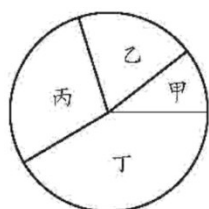
C. 圆心角相等, 所对的弦相等

D. 弦相等所对的圆心角相等

3. 下列说法中, 不正确的是 ()

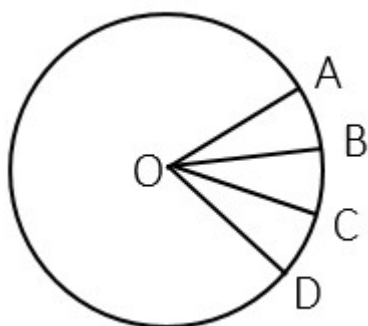
- A. 在同圆或等圆中，若两弧相等，则它们所对的弦相等
- B. 在同一个圆中，若弦长等于半径，则该弦所对的劣弧的度数为 60°
- C. 在同一个圆中，若两弧不等，则优弧所对的圆心角较大
- D. 若两弧的度数相等，则这两条弧是等弧

4. 如图，已知甲、乙、丙、丁四个扇形的面积之比为 $2:3:4:6$ ，则丁扇形的圆心角的度数为 ()



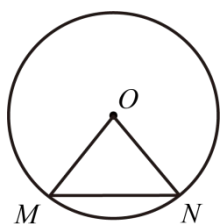
- A. 48° B. 72° C. 144° D. 96°

5. 如图，圆心角 $\angle AOB = 25^\circ$ ，将弧 AB 旋转 n° 得到弧 CD ，则 $\angle COD$ 等于 ()



- A. 25° B. $25^\circ + n^\circ$ C. 50° D. $50^\circ + n^\circ$

6. 如图所示，MN 为 $\odot O$ 的弦， $\angle N = 52^\circ$ ，则 $\angle MON$ 的度数为 ()

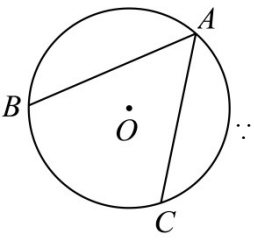
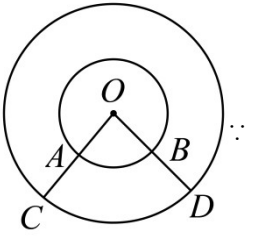
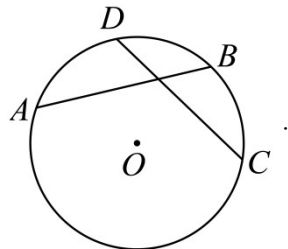
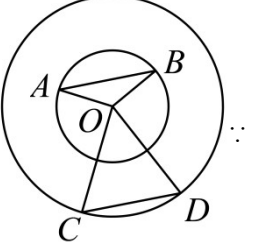


- A. 38° B. 52° C. 76° D. 104°

7. 在 $\odot O$ 中，AB，CD 为两条弦，下列说法：①若 $AB = CD$ ，则 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ ；②若 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ ，则 $AB = 2CD$ ；③若 $AB = 2CD$ ，则弧 $AB = 2$ 弧 CD ；④若 $\angle AOB = 2\angle COD$ ，则 $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{CD}$. 其中正确的有 ()

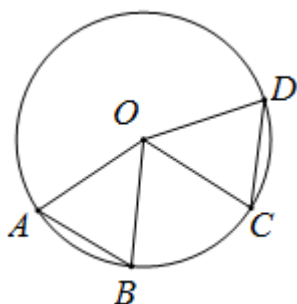
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

8. 结合各自对应图形，给出的相应推理中，其中正确的是 ()

 $AB = AC$ $\therefore \angle AOB = \angle AOC$ (1)	 $\angle AOB = \angle COD$ $\therefore AB = CD$ (2)	 $AD = BC$ $\therefore AB = CD$ (3)	 $AB = CD$ $\therefore \angle AOB = \angle COD$ (4)
---	---	--	---

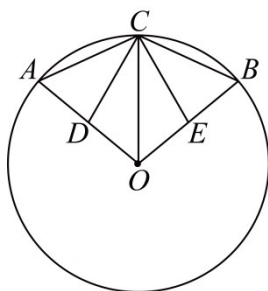
A. (1) (2) B. (3) (4) C. (1) (3) D. (2) (4)

9. 已知，如图， $\angle AOB = \angle COD$ ，下列结论不一定成立的是 ()



A. $AB = CD$ B. $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ C. $\triangle AOB \cong \triangle COD$ D. $\triangle AOB, \triangle COD$ 都是等边三角形

10. 如图，在 $\odot O$ 中， $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ ，D、E 分别是半径 OA 与 OB 的中点，连接 OC，AC，BC，CD，CE，则下列结论不一定成立的是 ()



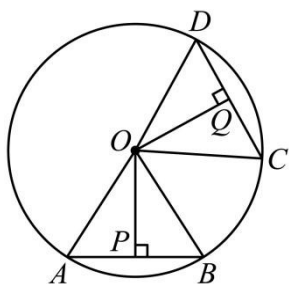
A. $AC = BC$ B. $CD = CE$ C. $\angle AOC = \angle COB$ D. $CD \perp OA$

二、填空题

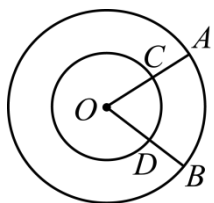
11. 120° 的圆心角是 360° 的 _____ 分之一，它所对的弧是相应圆周长的 _____ 分之一。

12. 如图，AB、CD 是 $\odot O$ 的两条弦， $OP \perp AB$ 于 P， $OQ \perp CD$ 于 Q。

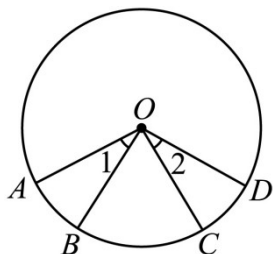
- (1) 如果 $AB = CD$, 那么 _____ , _____ , _____ ;
- (2) 如果 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$, 那么 _____ , _____ , _____ ;
- (3) 如果 $\angle AOB = \angle COD$, 那么 _____ , _____ , _____ ;
- (4) 如果 $OP = OQ$, 那么 _____ , _____ , _____ .



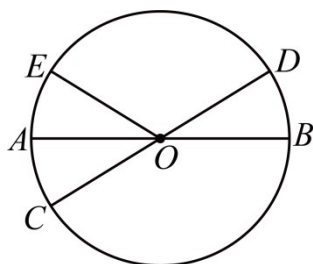
13. 如图, 在两个同心圆中, $\overset{\frown}{AB}$ 为 60° , 则 $\overset{\frown}{CD}$ 的度数为 _____ .



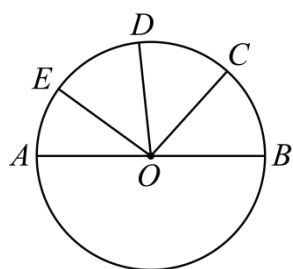
14. 如图, 在 $\odot O$ 中, 弧 AC 与弧 BD 相等, $\angle 1 = 30^\circ$, 则 $\angle 2 =$ _____ $^\circ$.



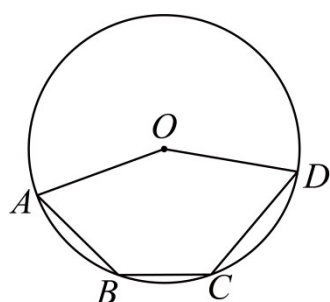
15. 如图, 已知 AB 、 CD 是 $\odot O$ 的直径, $AE = AC$, $\angle AOE = 32^\circ$, 则 $\angle COE =$ _____



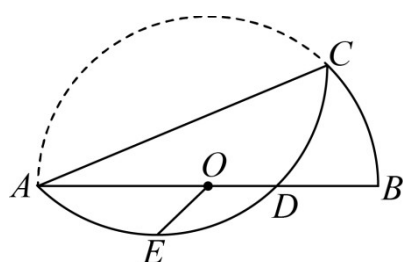
16. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE}$, $\angle COD = 48^\circ$, 则 $\angle BOE$ 的度数为 _____ .



17. 如图， $\odot O$ 经过五边形 $OABCD$ 的四个顶点，若 $\angle AOD = 150^\circ$, $\angle A = 65^\circ$, $\angle D = 60^\circ$ ， $\widehat{BC}$ 所对的圆心角的度数为_____°.

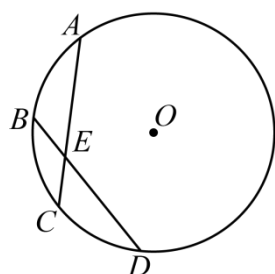


18. 如图，在半圆 O 中， C 是半圆上的一个点，将 $\widehat{AC}$ 沿弦 AC 折叠交直径 AB 于点 D ，点 E 是 $\widehat{AD}$ 的中点，连接 OE ，若 OE 的最小值为 $\sqrt{2} - 1$ ，则 $AB =$ _____.

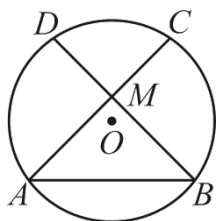


三、解答题

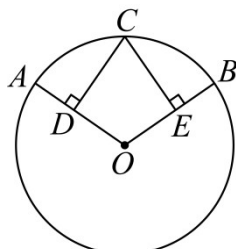
19. 如图，在 $\odot O$ 中，弦 AC ， BD 相交于点 E ， $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$ 。求证： $AC = BD$ 。



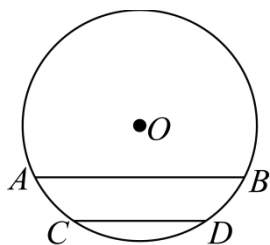
20. 如图，在 $\odot O$ 中，弦 AC ， BD 相交于点 M ，且 $AC = BD$ 。求证： $AM = BM$ 。



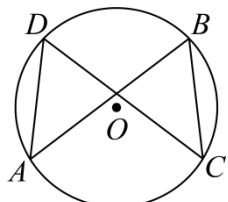
21. 如图，在 $\odot O$ 中， $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ ， $CD \perp OA$ 于 D ， $CE \perp OB$ 于 E ，求证： $OD = OE$ 。



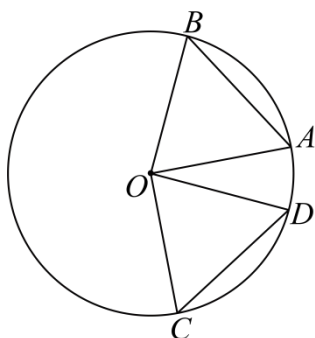
22. 如图， AB ， CD 是 $\odot O$ 的两条弦， $AB \parallel CD$ 。求证： $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ 。



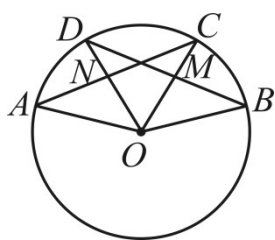
23. 如图，在 $\odot O$ 中，已知弦 $AD = BC$ 。求证： $AB = CD$ 。



24. 如图，点 A, B, C, D 在 $\odot O$ 上， $AB = CD$ 。求证： $BD = AC$ 。



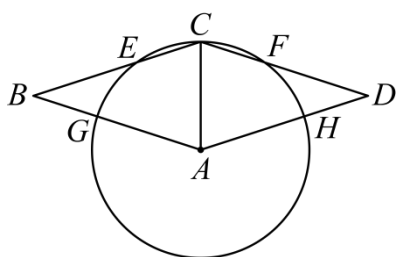
25. 如图， A, B, C, D 是 $\odot O$ 上的点， $AC = BD$ ， AC, BD 分别交 OD ， OC 于点 N, M 。求证：



(1) $\angle A = \angle D$;

(2) $CM = DN$.

26 . 如图，菱形 $ABCD$ ，以 A 为圆心， AC 长为半径的圆分别交边 BC ， DC ， AB ， AD 于点 E ， F ， G ， H .



(1) 求证： $CE = CF$;

(2) 当 E 为弧 CG 中点时，求证： $BE^2 = CE \cdot CB$.