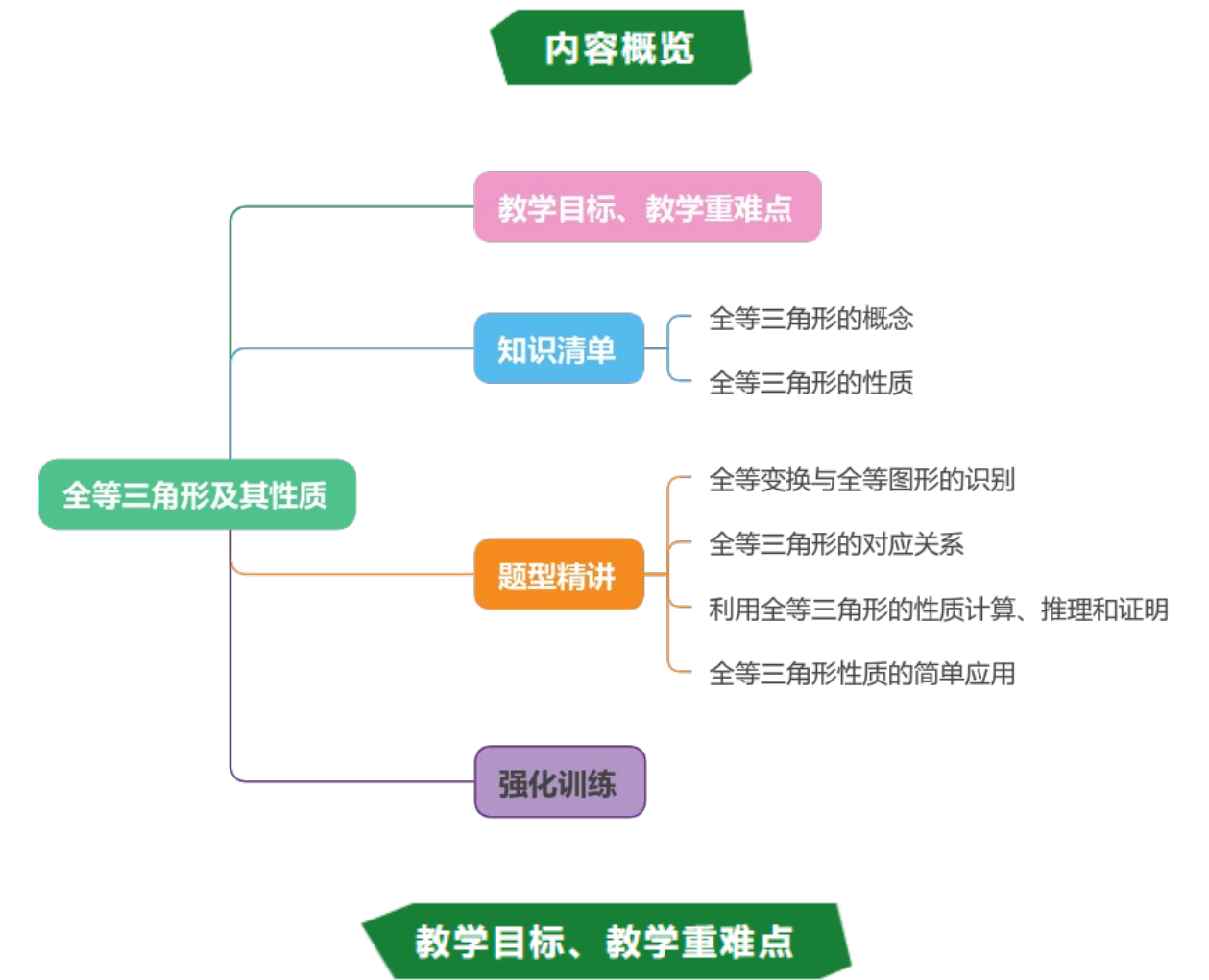


专题 17.3 全等三角形及其性质



教学目标	1. 理解全等图形、全等三角形的概念、全等图形与全等变换之间的关系； 2. 理解全等三角形的性质，全等三角形对应边相等、对应角相等，并能应用全等三角形的性质进行简单的计算、推理、证明； 3. 能熟练地识别全等变换图形，准确地在全等三角形中找到对应顶点、对应角、对应边.
教学重难点	1.重点 全等三角形的核心性质：全等三角形对应边相等，对应角相等； 2.难点

在复杂图形中准确、快速辨认出对应元素。

知识清单

知识点 01 全等三角形的概念

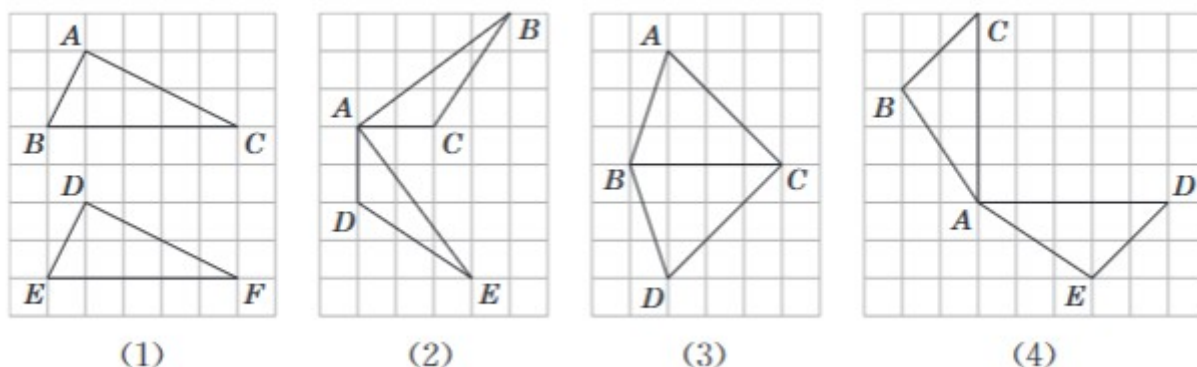
1. 定义 如果一个图形经过平移、旋转、翻折后，与另一个图形能够完全重合，那么这两个图形叫作_____，是全等形的两个三角形叫作_____。

2. 全等变换

常见的全等变换有：_____、_____、_____。

【即学即练】

例 1 如图所示，图中有四对三角形，每对中的 $\triangle ABC$ 通过怎样的运动与另一个三角形重合？



解：图 (1) $\triangle ABC$ 向下_____四个单位与 $\triangle DEF$ 重合；

(2) $\triangle ABC$ 绕点_____顺时针旋转_____与 $\triangle AEF$ 重合；

(3) $\triangle ABC$ 沿着直线_____翻折与 $\triangle DBC$ 重合；

(4) $\triangle ABC$ 先绕点_____顺时针旋转_____，再沿着_____边所在的直线翻折与 $\triangle AED$ 重合。

【点睛】全等变换的辨析是学好三角形全等的基础与核心，全等变换是理解全等性质的前提，也是学习全等判定、证明的基础，有利于我们从整体上培养“图感”，直观地快速、准确发现全等对应元素是基本功。

知识点 02 全等三角形的性质

1. 对应顶点、对应边、对应角

把两个全等三角形重合到一起，重合的顶点叫作_____，重合的边叫作_____，重合的角叫作_____。

在上图(1)中， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是全等三角形，记作 $\triangle ABC$ _____，符号“ $\cong$ ”表示_____，读作“_____”。

2. 全等三角形的性质

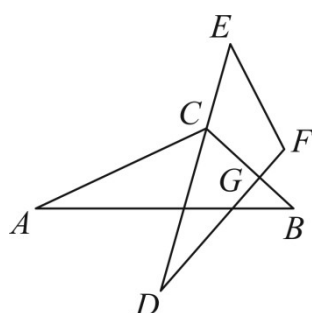
全等三角形的**对应边**_____，**对应角**_____。

3. 全等三角形的传递性

如果两个三角形都和第三个三角形全等，那么这两个三角形全等，这个性质叫作_____。

【即学即练】

例2 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ， CD 平分 $\angle BCA$ ， BC 与 DF 交于点 G 。若 $\angle D = 30^\circ$ ， $\angle CGF = 88^\circ$ ，则 $\angle E$ 的度数是 ()



- A . 50° B . 44° C . 34° D . 30°

解： $\because \angle CGF = \angle D + \angle BCD$ ， $\angle D = 30^\circ$ ， $\angle CGF = 88^\circ$ ，

$\therefore \angle BCD = \angle CGF - \underline{\hspace{2cm}} = 88^\circ - 30^\circ = 58^\circ$ (_____)，

$\because CD$ 平分 $\angle BCA$ ，

$\therefore \angle ACD = \angle BCD = 58^\circ$ ，

$\therefore \angle ACB = 2 \times 58^\circ = 116^\circ$

$\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，

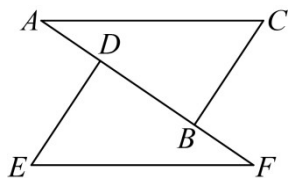
$\therefore \angle DFE = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ (_____)，

$\therefore \angle E = 180^\circ - 30^\circ - 116^\circ = 34^\circ$ (_____)。

故选：C。

【点睛】 理解全等三角形的对应角相等的性质是解决本题的关键.

例 3 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle FDE$ ($\angle A$ 与 $\angle F$ ， $\angle C$ 与 $\angle E$ 分别对应)， $AD = 2$ ， $BD = 3$ ，则 FD 的值为



解： $\because AD = 2$ ， $BD = 3$ ，

$\therefore AB = AD + BD = 5$ ，

$\because \triangle ABC \cong \triangle FDE$ ，

$\therefore FD = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ ($\underline{\hspace{2cm}}$) .

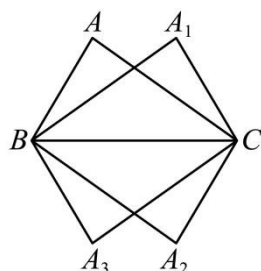
故答案为：5 .

【点睛】 理解全等三角形的对应边相等的性质是解决本题的关键.

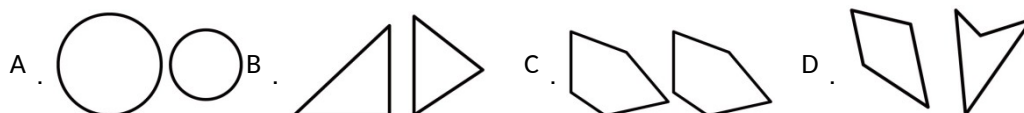
题型精讲

题型 01 全等变换与全等图形的识别

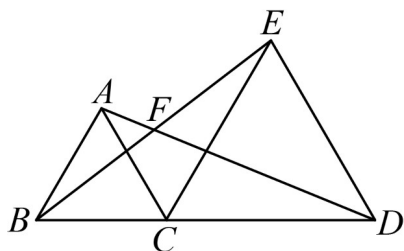
【典例 1】 如图，已知图形是由 $\triangle ABC$ 通过图形的变换得到的，请说出图中的与 $\triangle ABC$ 全等的三角形，并说出它们是如何经过变换得到的？



【变式 1】 下列各组中的两个图形为全等形的是 ()

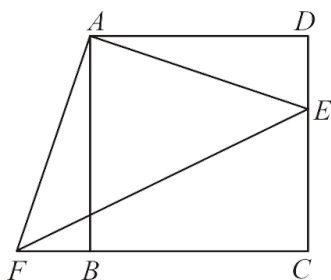


【变式2】 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 都是等边三角形， AD 与 BE 相交于 F 。



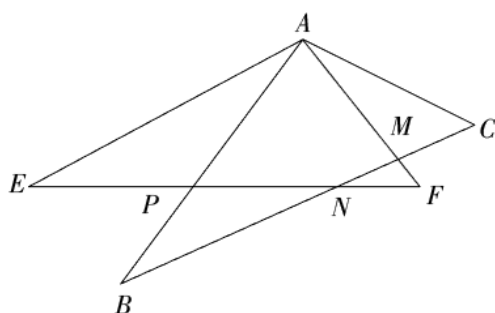
$\triangle BCE$ 可以看作是由 $\triangle ACD$ 经过平移、翻折或旋转中的一种变换得到，请写出得到 $\triangle BCE$ 的变换过程；

【变式3】 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形， E ， F 分别是 DC 和 CB 的延长线上的点，且 $DE = BF$ ，连接 AE ， AF ， EF 。



$\triangle ABF$ 可以看作是 $\triangle ADE$ 经过平移、轴对称或旋转中的一种变换得到，请写出得到 $\triangle ABF$ 的变换过程；

【变式4】 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle AEF$ 中， $\angle EAB = 26^\circ$ ， $\angle F = 54^\circ$ 。



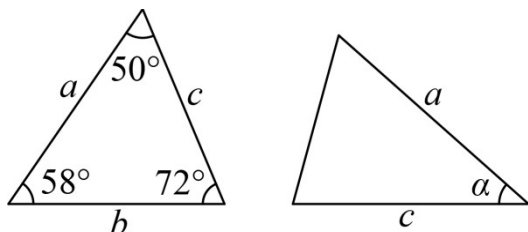
(1) $\triangle ABC$ 可以经过图形的变换得到 $\triangle AEF$ ，请你描述这个变换；

(2) 求 $\angle AMB$ 的度数。

题型 02 全等三角形的对应关系

【典例1】 如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle BAD$ 全等，可表示为_____， $\angle C$ 与 $\angle D$ 是对应角， AC 与 BD 是对应边，其余的对应角是_____，其余的对应边是_____。

【变式1】) 已知图中的两个三角形全等，则 $\angle \alpha$ 度数是()



A. 50°

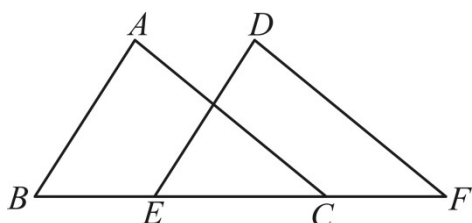
B. 58°

C. 60°

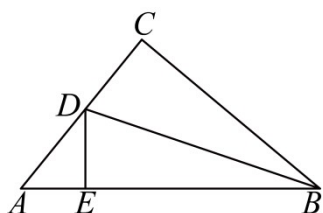
D. 72°

【变式2】) 已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ， $\angle A = \angle B = 35^\circ$ ，则 $\angle F =$ _____。

【变式3】 如图， $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，点 A 、 B 、 C 的对应点分别是点 D 、 E 、 F ， B 、 E 、 C 、 F 四点在同一直线上， $BC = 7$ ， $BF = 10$ ，那么 EC 的长为_____。

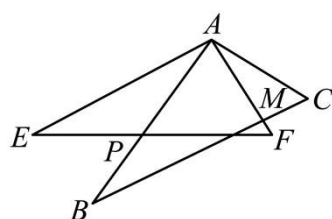


【变式4】 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AC 、 AB 上， $AB = 8\text{cm}$ ， $BC = 6\text{cm}$ ， $AC = 5\text{cm}$ 。若 $\triangle CBD \cong \triangle EBD$ ，则 $\triangle ADE$ 的周长为_____ cm 。



题型 03 利用全等三角形的性质计算、推理和证明

【典例1】 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle AEF$ 中， $\angle EAB = 25^\circ$ ， $\angle F = 57^\circ$ 。

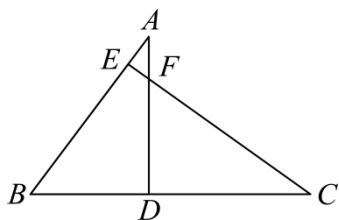


(1) 请说明： $\angle EAB = \angle CAF$ ；

(2) $\triangle ABC$ 可以经过图形的变换得到 $\triangle AEF$ ，请你描述这个变换；

(3) 求 $\angle AMB$ 的度数．

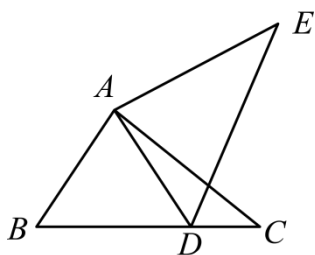
【变式 1】 如图， $\triangle ABD \cong \triangle CFD$ ，且点 B, D, C 在一条直线上，点 F 在 AD 上，延长 CF 交 AB 于点 E ．



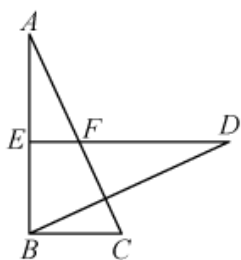
(1) 试说明： $CE \perp AB$ ．

(2) 若 $BD = 3$ ， $AF = 1$ ，求 BC 的长．

【变式 2】 如图， $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，且点 D 在 BC 上，求证： $\angle BAD = \angle EDC$ ．



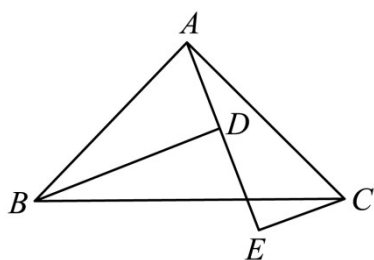
【变式 3】 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEB$ ，点 E 在 AB 上， DE 与 AC 相交于点 F ．



(1) 当 $DE = 8$ ， $BC = 5$ 时，求线段 AE 的长；

(2) 已知 $\angle D = 35^\circ$ ， $\angle C = 60^\circ$ ，求 $\angle DBC$ 与 $\angle AFD$ 的度数．

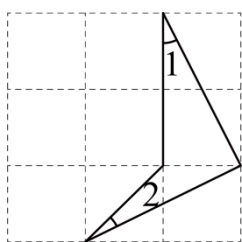
【变式 4】 如图， A, D, E 三点在同一条直线上，且 $\triangle BAD \cong \triangle ACE$ ．



- (1) 求证： $BD = CE + DE$ ；
- (2) 当 $\angle BAC$ 满足什么条件时， $BD \parallel CE$ ？并说明理由。

题型 04 全等三角形性质的简单应用

【典例 1】 如图，图形的各个顶点都在 3×3 的正方形（每个小正方形的边长为 1）网格的格点上，则 $\angle 1 + \angle 2$ 的度数为_____。



【变式 1】 图（1），图（2）都是由边长为 1 的小正方形和腰长为 1 的等腰直角三角形组成的图形。



图(1)

图(2)

- (1) 用实线把图（1）分割成六个全等图形；
- (2) 用实线把图（2）分割成四个全等图形。

【变式 2】 一个三角形的三边长为 $x, 5, 7$ ，另一个与它全等的三角形的三边长为 $3, y, 5$ ，那么以 x, y 为腰长和底边长的等腰三角形的周长等于_____。

【变式 3】 如图 1 和图 2，点 B, C, D, E 在同一条直线上，且 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

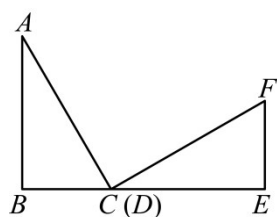


图1

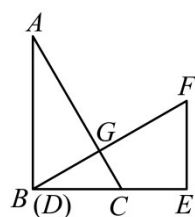


图2

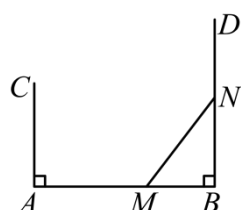
(1)如图 1，点 D 与点 C 重合，求证： $BE = AB + EF$ ；

(2)将图 1 中的 $\triangle DEF$ 沿直线 BD 向左平移至点 D 与点 B 重合时停止，如图 2 所示， DF 与 AC 交于点 G 。

①判断此时 AC 与 BF 之间的位置关系，并说明理由；

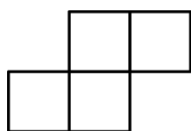
②已知 $S_{\triangle ABC} = 20$, $CG = \frac{1}{5}AC$ ，求四边形 $CEFG$ 的面积。

【变式 4】 如图，已知线段 $AB = 60$ 米，射线 $AC \perp AB$ 于点 A ，射线 $BD \perp AB$ 于 B ， M 点从 B 点向 A 运动，每秒走 2 米， N 点从 B 点向 D 运动，每秒走 3 米， M 、 N 同时从 B 出发，若射线 AC 上有一点 P ，使得某时刻 $\triangle PAM$ 和 $\triangle MBN$ 全等，则线段 AP 的长度为_____米。

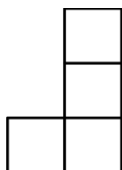


强化训练

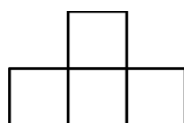
1. 下列图形与如图所示的图形全等的是 ()



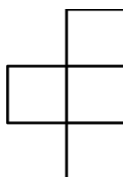
A.



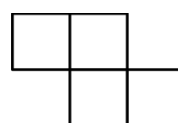
B.



C.



D.



2. 下列说法中正确的是 ()

A. 两个面积相等的图形，一定是全等图形

B. 若两个图形周长相等，则它们一定是全等图形

C. 两个等边三角形一定是全等图形

D. 能够完全重合的两个图形是全等图形

3. 下列说法其中正确的个数有 ()

①能够完全重合的两个三角形是全等三角形；

②通过旋转得到的两个图形全等，全等的两个图形旋转后一定能重合；

③大小相同的两个图形是全等图形；

④一个图形经过平移、翻折、旋转后，得到的图形一定与原图形全等。

A. 0 个

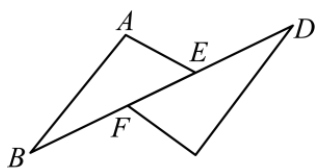
B. 1 个

C. 2 个

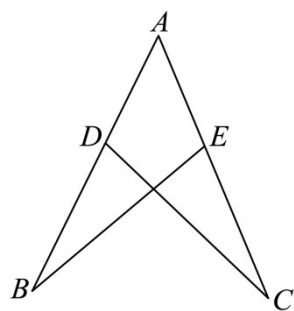
D. 3 个

4. 如果 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ $\triangle DEF \cong \triangle OPQ$ ，那么 $\triangle ABC \cong \triangle OPQ$ 的推理依据是_____。

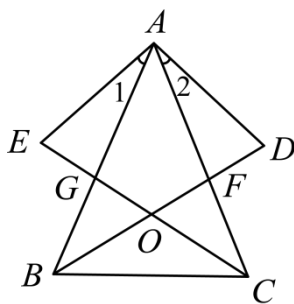
5. 如图，若 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ， $BE = 5$ ， $DE = 3$ ，则 EF 的长是_____。



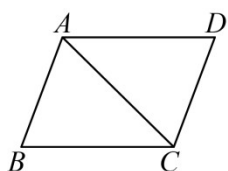
6. 如图，已知 $\triangle ADC \cong \triangle AEB$ ， $AB = 7$ ， $CE = 4$ ，则 AD 的长度为_____。



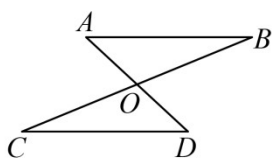
7. 如图，已知 $\triangle AEC \cong \triangle ADB$ ，如果 $\angle 2 = 25^\circ$ ， $\angle AGE = 80^\circ$ ，那么 $\angle D =$ _____°。



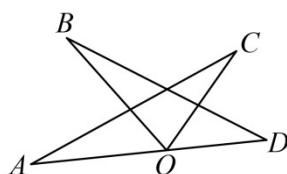
8. 一个图形经过平移、翻折、旋转前后的图形全等。根据下列全等三角形写出对应的边和角。



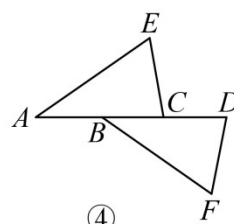
①



②



③



④

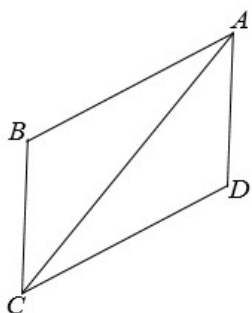
(1) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, 对应边是_ , 对应角是_ ;

(2) $\triangle AOB \cong \triangle DOC$, 对应边是_ , 对应角是_ ;

(3) $\triangle AOC \cong \triangle BOD$, 对应边是_ , 对应角是_ ;

(4) $\triangle ACE \cong \triangle BDF$, 对应边是_ , 对应角是_ .

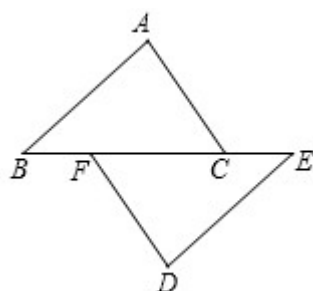
9. 如图 , $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, AB 和 CD , BC 和 DA 是对应边 . 写出其他对应边及对应角 .



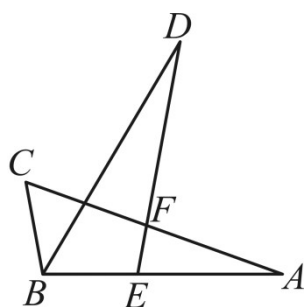
10. 如图 , $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, 点 A 对应点 D , 点 B 对应点 E , 点 B, F, C, E 在一条直线上 , $\angle A = 85^\circ$, $\angle E = 50^\circ$, $AB = 4$, $EF = 6$.

(1) 求 $\angle ACB$ 的度数 .

(2) 求 AC 边的取值范围 .

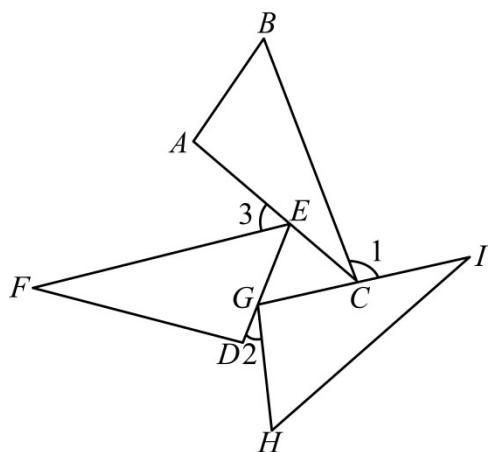


11. 如图 , $\triangle ABC \cong \triangle DEB$, 顶点 A, C 分别与顶点 D, B 对应 , 点 E 在边 AB 上 , 边 DE 与边 AC 相交于点 F .

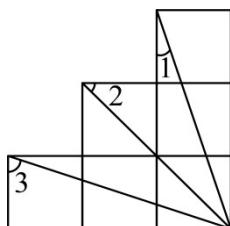


- (1) 若 $DE = 10, BC = 4$, 求线段 AE 的长 ;
 (2) 若 $\angle D = 20^\circ, \angle C = 60^\circ$, 求 $\angle DBC$ 的度数

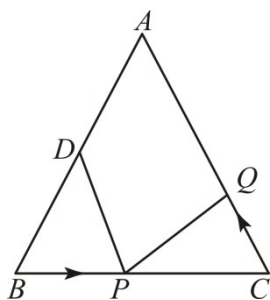
12 . 如图 , 已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF \cong \triangle GHI$, 并将它们摆成如图所示的形式 , 那么 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ 的度数等于__



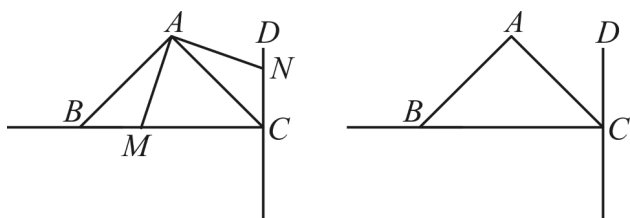
13. 如图是由 6 个边长相等的正方形组合成的图形 , $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 =$ _____ .



14 . 如图 , 在 $\triangle ABC$ 中 , $AB = AC = 24$ 厘米 , $BC = 18$ 厘米 , 且 $\angle B = \angle C$, 点 D 为 AB 的中点 . 如果点 P 在线段 BC 上以 v 厘米/秒的速度由 B 点向 C 点运动 , 同时 , 点 Q 在线段 CA 上由 C 点向 A 点运动 . 若点 Q 的运动速度为 4 厘米/秒 , 则当 $\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等时 , v 的值为_____ .



15. 如图，在等腰三角形 ABC 中， $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, $BC = 10\text{cm}$ ，过点 C 作直线 $CD \perp BC$ ，若点 M 从点 C 出发，以每秒 2cm 的速度沿射线 CB 向左运动，同时，点 N 也从点 C 出发，以每秒 1cm 的速度在直线 CD 上向上或向下运动．连接 AM ， AN ，设运动时间为 $t\text{s}$ ，当 t 为何值时， $\triangle ABM$ 与 $\triangle ACN$ 全等？（分两种情况讨论）



综上所述，当 $t = \frac{10}{3}$ 秒或 10 秒时， $\triangle ABM$ 与 $\triangle ACN$ 全等．

16. 综合与探究．

将两块全等的特制直角三角板 ($\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$) 按如图所示的方式放置，其中点 A ， O ， D 在同一直线上，点 B ， O ， C 也在同一直线上，连接 AC ， BD ．若 $AD = 14$ ， $S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOD} = 50$ ，求一块直角三角板的面积．

