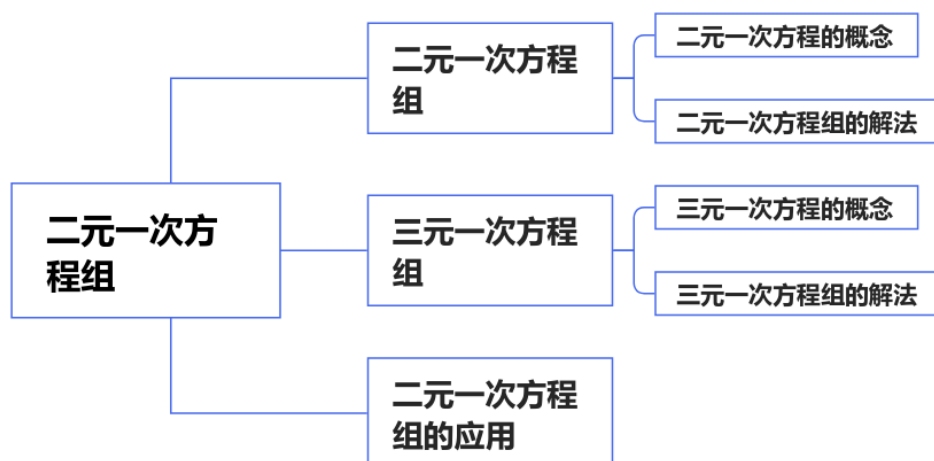


第九章 二元一次方程组单元复习

内容概览



知识清单

知识点 1 二元一次方程组的概念

1. 二元一次方程的概念

像“ $x+y=35$ 、 $2x+4y=94$ ”含有**两个未知数**的**一次方程**叫作**二元一次方程**。

2. 二元一次方程组的概念

由几个方程组成的一组方程叫作**方程组**。如果方程组中**含有两个未知数**，且**含未知数的项都是一次项**，这样的方程组就叫作**二元一次方程组**。

易错点睛：

二元一次方程组中强调**整个方程组含两个未知数**，而不是每个方程都要两个未知数。如
$$\begin{cases} x = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

就是一个二元一次方程组。

知识点 2 二元一次方程组的解法

1. 消元法

在解二元一次方程组的过程中，用适当的方法消去一个未知数，将二元一次方程组转化为一元一次方程，这种方法叫作**消元法**。

2. 代入消元

将二元一次方程组中的一个方程进行适当变形，**把一个未知数用另一个未知数表示**，就可以用“代入”的方法实现消元，进而求得这个二元一次方程组的解。

3. 加减消元

将二元一次方程组中的方程进行适当变形，使两个方程中有一个未知数的**系数相等**或**互为相反数**，就可以用“加减”的方法实现消元，进而求得这个二元一次方程组的解。

知识点 3 三元一次方程组的解法

如果方程组中含有三个未知数，且含未知数的项都是一次项，这样的方程组就叫作**三元一次方程组**。

解三元一次方程组的基本方法是：

$$\text{三元一次方程组} \xrightarrow{\text{消元}} \text{二元一次方程组} \xrightarrow{\text{消元}} \text{一元一次方程}$$

知识点 4 二元一次方程组的应用

二元一次方程组应用题的解题步骤：

1. 从实际问题中找出两个等量关系；
2. 正确设两个未知数，并列二元一次方程组；

3. 解方程组求出未知数的值；

3. 检验解是否合理，写出最终答案；

题型精讲

题型 01 二元一次方程组的概念

【典例 1】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海青浦·期末）下列方程中，是二元一次方程组的是（ ）

A. $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+5y=-1 \\ 2x=2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} xy=2 \\ x-2y=3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x+\frac{1}{y}=1 \\ 3y+x=3 \end{cases}$

【变式 1】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海闵行·期末）已知 $x^{a-1}-2y^{b+3}=1$ 是关于 x 、 y 的二元一次方程，则 $ab =$ _____ .

【变式 2】（²³⁻²⁴ 六年级下·上海闵行·期末）下列方程中是二元一次方程组的有（ ）

① $\begin{cases} 2xy=6 \\ x+y=1 \end{cases}$, ② $\begin{cases} 3x=y+5 \\ 2x-\frac{y}{4}=-2 \end{cases}$, ③ $\begin{cases} \frac{x}{y}=3 \\ 4x-2y=5 \end{cases}$, ④ $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-2z=3 \end{cases}$,

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【变式 3】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海闵行·期末）若 $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ 是方程 $3x+y=0$ 的解，则 $6a+2b+3 =$ _____ .

【变式 4】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海宝山·期末）若 $(k+1)x+5y^{|k|}=-3$ 是关于 x 、 y 的二元一次方程，则 k 的

值为 _____ .

题型 02 二元一次方程组的解法

【典例 1】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海金山·期末）解方程组：
$$\begin{cases} y - 3x = -4 \\ 5x + 2y = 14 \end{cases}$$

【变式 1】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海徐汇·期末）解方程组：
$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{3y+1}{6} \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

【变式 2】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海杨浦·期末）方程 $5x - 3y = 2$ 用含 x 的式子表示 y ，可表示为_____。

【典例 2】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海宝山·期末）解方程组：
$$\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 12x - 5y = 87 \end{cases}$$

【变式 3】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海宝山·期末）解方程组
$$\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

【变式 4】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海闵行·期末）解方程组：
$$\begin{cases} 4(x - y) = 3(2 - y) + 4 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 \end{cases}$$

【变式 5】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海闵行·期末）对于有理数 x ， y ，定义新运算： $x*y = ax + by$ ，

$x \otimes y = ax - by$ ，其中 a ， b 是常数。例如， $3*2 = 3a + 2b$ ， $2 \otimes 1 = 2a - b$ 。

已知 $3*2 = -1$ ， $2 \otimes 1 = 4$ ，则根据定义可以得到：
$$\begin{cases} 3a + 2b = -1 \\ 2a - b = 4 \end{cases}$$

(1) $a =$ _____， $b =$ _____；

(2) 若 $x*y + x \otimes 2y = 6$ ，求 $x + y$ 的值；

(3) 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x^*y = 2m - 4 \\ x \otimes y = 8m \end{cases}$ 的解也满足方程 $x - y = 4$ ，求 m 的值；

(4) 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} a_1x^*b_1y = c_1 \\ a_2x \otimes b_2y = c_2 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = 6 \\ y = 15 \end{cases}$ ，则关于 x, y 的方程组

$$\begin{cases} 3a_1(2x - y)^*5b_1(x + 2y) = c_1 \\ 3a_2(2x - y) \otimes 5b_2(x + 2y) = c_2 \end{cases} \text{ 的解为 } \underline{\hspace{2cm}} .$$

题型 03 三元一次方程组的解法

【典例 1】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海闵行·期末）解方程组 $\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + z = 7 \\ 2x + 2y - z = -5 \end{cases}$

【变式 1】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海宝山·期末）解方程组： $\begin{cases} 5x - y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 12 \\ 7x + y - z = 0 \end{cases}$.

【变式 2】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海·月考）解方程组： $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + 5y + 7z = 18 \\ x - y + 2z = 17 \end{cases}$.

【变式 3】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海·期末）解方程组： $\begin{cases} x + y + z = 8 \textcircled{1} \\ 3x - y - z = 4 \textcircled{2} \\ x - z = 3 \textcircled{3} \end{cases}$

【变式 4】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·全国·课后作业）解三元一次方程组： $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 3z = 1 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$

题型 04 含参的一次方程组

【典例 1】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海杨浦·期末） x, y 满足 $\begin{cases} 2x + 2y = 7m \\ 5x - 7y = 9m \end{cases}$ ，且 $x - 3y = 5$ ，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【变式1】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海·期末）关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax + 3by = 2 \\ \frac{1}{2}x - y = 1 \end{cases}$ 有无数组解，则 $ab =$ _____.

【变式2】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·广东广州·期中）关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 4x - y = 7m + 1 \\ x - 4y = 3m - 6 \end{cases}$ 的解满足 $x - y = -1$ ，则 m 的值为_____.

【变式3】（²³⁻²⁴ 七年级下·福建泉州·期中）已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ 2x - y + my - 5 = 0 \end{cases}$

- (1) 请直接写出方程 $2x + y - 6 = 0$ 的所有正整数解；
- (2) 无论数 m 取何值，方程 $2x - y + my - 5 = 0$ 总有一个固定的解，请直接写出这个解；
- (3) 若方程组的解满足 $x + y = 0$ ，求 m 的值；
- (4) 若方程组的解中 y 恰为整数， m 也为整数，求 m 的值.

【变式4】（²³⁻²⁴ 八年级上·山东枣庄·月考）对于未知数为 x, y 的二元一次方程组，如果方程组的解 x, y 满足 $|x - y| = 1$ ，我们就说方程组的解 x 与 y 具有“邻好关系”.

(1) 方程组 $\begin{cases} 2x + 5y = 26 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$ 的解 x 与 y _____ (填“具有”或“不具有”) “邻好关系”；

(2) 若方程组 $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 4x + y = 6m \end{cases}$ 的解 x 与 y 具有“邻好关系”，求 m 的值；

(3) 未知数为 x, y 的方程组 $\begin{cases} x + ay = 7 \\ 2y - x = 5 \end{cases}$ 其中 a 与 x, y 都是正整数，该方程组的解 x 与 y 是否具有“邻好关系”？

如果具有，请求出 a 的值及方程组的解；如果不具有，请说明理由。

题型 05 用整体思想解一次方程组

【典例 1】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海·期末）已知方程组 $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ ，则 $2025x - 2025y$ 的值是_____。

【典例 2】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海虹口·期末）解方程组 $\begin{cases} 14x + 15y = 16 \textcircled{1} \\ 17x + 18y = 19 \textcircled{2} \end{cases}$ 由于 x, y 的系数及常数项的数值

较大，如果用常规的代入消元法、加减消元法来解，那么计算量很大，且易出现运算错误，而采用下面的

解法会比较简单。② - ①，得 $3x + 3y = 3$ ，所以 $x + y = 1$ ③，③ × 14，得 $14x + 14y = 14$ ④，① - ④，得

$y = 2$ ，从而得 $x = -1$ ，所以原方程组的解为 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ 。

(1) 请运用上述方法解方程组： $\begin{cases} 28x + 33y = 18 \\ 32x + 37y = 22 \end{cases}$ ；

(2) 请直接写出关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax + (a+d)y = a+2d \textcircled{1} \\ (a+3d)x + (a+4d)y = a+5d \textcircled{2} \end{cases}$ (a, d 是常数， $d \neq 0$) 的解：_____。

【变式 1】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海杨浦·期末）解方程组： $\begin{cases} \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{3} = 2 \\ \frac{3(x-y)}{2} - \frac{4(x+y)}{3} = 13 \end{cases}$ 。

【变式 2】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·福建泉州·期末）已知 $2x + y - 7z = 0$ ， $x - 2y + 4z = 0$ ($xyz \neq 0$)，则

$$\frac{2x+y+z}{x-2y+z} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【变式3】 (²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海宝山·期末) 数学活动：探究不定方程

小川，小渝两位同学在学习方程过程中发现，三元一次方程组
$$\begin{cases} 3x+2y+z=9 \textcircled{1} \\ 2x+3y+4z=11 \textcircled{2} \end{cases}$$
，虽然解不出 x 、 y 、 z 具

体数值，但可以解出， $x+y+z$ 的值。

(1) 小川的方法：②×3-①×2 整理可得： $y = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

①×3-②×2 整理可得： $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $\therefore x+y+z = 4$

小渝的方法：①+②： $\underline{\hspace{2cm}}$ ； $\therefore x+y+z = 4$ 。

(2) 已知
$$\begin{cases} 3x+y+2z=9 \textcircled{1} \\ x-3y-z=3 \textcircled{2} \end{cases}$$
，试求解 $x+y+z$ 的值。

【变式4】 (²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海·期末) 若关于 m ， n 的方程组
$$\begin{cases} am+bn=7 \\ 2m-bn=-2 \end{cases}$$
 与
$$\begin{cases} 3m+n=5 \\ am-bn=-1 \end{cases}$$
 有相同的解，

求 a 、 b 的值。

题型 06 二元一次方程组的应用

【典例1】 (²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海青浦·期末) 某商店销售甲、乙两种商品。现有如下信息：

信息 1：甲、乙两种商品零售单价之和是 50 元。

信息 2：按零售单价购买甲商品 3 件和乙商品 2 件共需支付 120 元。

(1) 根据情境中的信息，求出甲、乙两种商品的单价。

(2) 恰逢“618”活动，乙商品降价20%销售，已知乙商品的成本为15元，求此时的盈利率。

【变式1】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海普陀·期末）随着对人们交通安全意识的增强，某城镇居民开始积极购买

头盔以保证骑行安全。某小店购进A种头盔³个和B种头盔⁴个共需³⁴⁵元，A种头盔⁴个和B种头盔³个共需³⁹⁰元。

(1) A、B两种头盔的单价各是多少元？

(2) 该店计划正好用450元购进A、B两种头盔共12个，销售1个A种头盔可获利³⁵元，销售1个B种头盔可获利¹⁵元。假如这些头盔全部售出，该店共可获利多少元？

【变式2】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海杨浦·期末）中国足球超级联赛是中国大陆地区最高级别的职业足球联赛。

本联赛的积分规则采用国际通行的胜一场积³分、平局各积¹分、负者积⁰分的标准。

(1) A球队以不败的成绩完成了12场比赛，获得了²⁶分，该球队胜负各多少场；

(2) B球队完成了13场比赛，获得了³²分，求该球队胜、平、负各多少场。

【变式3】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海黄浦·期末）²⁰²⁵年央视春晚节目《秧BOT》别出心裁，独树一帜，人

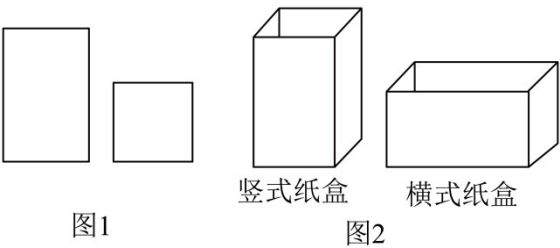
机共舞为文化传承搭建了新的桥梁，不仅舞出了精彩的节目，更是舞出了传统文化与现代科技交织的艺术

新境界．随着人工智能与物联网等技术的快速发展，人形机器人的应用场景不断拓展，某快递企业为提高工作效率．拟购买 A 、 B 两种型号智能机器人进行快递分拣．若买 1 台 A 型机器人、 3 台 B 型机器人，共需 260 万元；若买 3 台 A 型机器人、 2 台 B 型机器人，共需 360 万元．



- (1)求 A 、 B 两种型号智能机器人的单价；
- (2)该企业预计每天需要分拣 200 万件快递，现准备购买 A 、 B 两种型号智能机器人共 10 台．已知 A 型机器人每台每天可分拣 22 万件； B 型机器人每台每天可分拣 18 万件，则企业要购买 A 型和 B 型机器人各几台？

【变式 4】（ $^{24-25}$ 六年级下·上海宝山·期末）某工厂用如图 1 所示的长方形和正方形纸板，做成如图 2 所示的竖式与横式两种长方体无盖纸盒．



- (1)现有长方形纸板 170 张，正方形纸板 80 张，做成上述两种纸盒，纸板恰好用完．求两种纸盒生产个数；
- (2)工厂共有 52 名工人，每个工人一天能生产 60 张长方形纸板或者 100 张正方形纸板，已知 1 个竖式纸盒与 2 个横式纸盒配套，问如何分配工人能使一天生产的竖式纸盒与横式纸盒配套？

(3)如果有长方形纸板 170 张，正方形纸板 82 张，做出上述两种纸盒后剩余 2 张纸板，问两种纸盒各生产了多少个？请直接写出结论．