

第 21 章 一元二次方程 单元测试卷·提升卷

(考试时间：100 分钟 试卷满分：150 分)

一、选择题：(本大题共 10 题，每题 4 分，共 40 分.下列各题四个选项中，有且只有一个选项是正确的.)

1. 下列方程中是关于 x 的一元二次方程的是 ()

A. $x^2 - 2x = 0$

B. $(x-2)(x+2) = x^2$

C. $ax^2 + bx + c = 0$

D. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$

2. 用配方法解方程 $3x^2 + 4x + 1 = 0$ 时，可以将方程化为 ()

A. $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

B. $(x+2)^2 = 3$

C. $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$

D. $\left(3x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

3. 若二次三项式 $ax^2 - 3x - 4$ 能在实数范围内分解因式，则 a 的取值范围是 ()

A. $-\frac{9}{16} < a < 0$

B. $a > -\frac{9}{16}$

C. $a > -\frac{9}{16}$ 且 $a \neq 0$

D. $0 < a < \frac{9}{16}$

4. 若正数 x 满足 $x^2 + 3x = 1$ ，则 $x^2 - \frac{1}{x^2}$ 的值为 ()

A. $3\sqrt{13}$

B. $3\sqrt{11}$

C. $-3\sqrt{13}$

D. $-3\sqrt{11}$

5. 已知 a, b 是一元二次方程 $x^2 + 2025x + 1 = 0$ 的两个实数根，求 $\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值 ()

A. -2025

B. 2025

C. $\frac{1}{2025}$

D. ± 2025

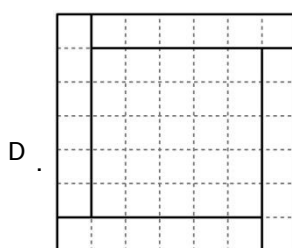
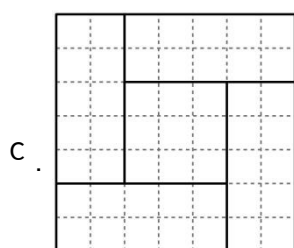
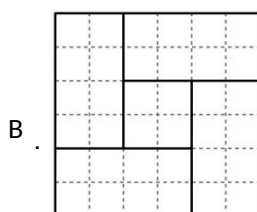
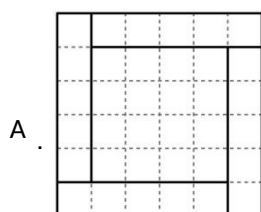
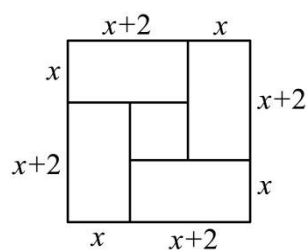
6. 我国古代数学家赵爽(公元 3~4 世纪)在其所著的《勾股圆方图注》中记载过一元二次方程正根的几何

解法，以方程 $x^2 + 2x - 8 = 0$ 即 $x(x+2) = 8$ 为例说明，记载的方法是：构造如图，大正方形的面积是

$(x+x+2)^2$ ，同时它又等于四个矩形的面积加上中间小正方形的面积，即 $4 \times 8 + 2^2$ ，因此

$(x+x+2)^2 = 4 \times 8 + 2^2$ ，所以 $x=2$ 。则在下面四个构图中，能正确说明一元二次方程 $x^2 - 4x - 5 = 0$ 正根的

几何解法的构图是 ()



7. 定义新运算： $m * n = m^2 - 2m - 3n$ ，例如： $3 * 4 = 3^2 - 2 \times 3 - 3 \times 4 = -9$ 。若关于 x 的一元二次方程

$x^2 * a = 3$ 有两个不相等的实数根，则 a 的取值范围是 ()

- A . $a > \frac{4}{3}$ B . $a < \frac{4}{3}$ C . $a > -\frac{4}{3}$ D . $a < -\frac{4}{3}$

8. 已知关于 x 的方程 $a(x-1)(x-m) = 0$ 与 $a(x-n)^2 = b$ 有相同的解，则 m 与 n 之间的等量关系为 ()

- A . $m+n=1$ B . $m-n=1$

C. $m+2n=-1$

D. $m-2n=-1$

9. 下列给出的四个命题，真命题的有 () 个

①若方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 两根为 -1 和 2 ，则 $2a+c=0$ ；

②若 $a^2-5a+5=0$ ，则 $\sqrt{(1-a)^2}=a-1$ ；

③若 $b^2-4ac<0$ ，则方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 一定无解；

④若方程 $x^2+px+q=0$ 的两个实根中有且只有一个根为 0 ，那么 $p \neq 0$ ， $q=0$ 。

A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

10. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2-2ax+b+1=0 (ab \neq 0)$ 有两个相等的实数根 k ，则下列选项成立的是

()

A. 若 $1 < a < 0$ ，则 $\frac{k}{a} > \frac{k}{b}$

B. 若 $\frac{k}{a} > \frac{k}{b}$ ，则 $0 < a < 1$

C. 若 $0 < a < 1$ ，则 $\frac{k}{a} < \frac{k}{b}$

D. 若 $\frac{k}{a} < \frac{k}{b}$ ，则 $-1 < a < 0$

二、填空题 (本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。)

11. 在实数范围内分解因式： $2x^2-2xy-5y^2=$ _____。

12. 设 m, n 分别为方程 $x^2+2x-2025=0$ 的两个实数根，则 $m^2-3m-5n=$ _____。

13. 已知关于 x 的方程 $kx^2+(3k-1)x+2k-1=0$ 的解都是整数，则整数 k 的值为_____。

14. 山西作为“小杂粮王国”誉满全国，小米尤为出名，素有“中国小米在山西，山西小米数第一”的美誉。某

店铺销售一批箱装小米（如图），每箱的进价为⁸⁰元，售价为¹²⁰元，每天可销售²⁰箱．春节期间，为了让利于顾客，该店铺计划降价销售，根据销售经验，单价每降低¹元，每天可多销售²箱，则该店铺每天可获得的最大利润为_____元．



15．已知关于 x 的方程 $x + \frac{a}{x} + b = 0$ 的两根均大于¹且小于²，则 $a+b$ 的取值范围是_____．

16．关于 x 的方程 $\frac{x^2}{x^2+1} - \frac{6|x|}{\sqrt{x^2+1}} + 3 - a = 0$ 有实数根，则 a 的取值范围是_____．

17．小明在解方程 $\sqrt{24-x} - \sqrt{8-x} = 2$ 时采用了下面的方法：由

$$(\sqrt{24-x} - \sqrt{8-x})(\sqrt{24-x} + \sqrt{8-x}) = (\sqrt{24-x})^2 - (\sqrt{8-x})^2 = (24-x) - (8-x) = 16$$

又有 $\sqrt{24-x} - \sqrt{8-x} = 2$ ，可得 $\sqrt{24-x} + \sqrt{8-x} = 8$ ，将这两式相加可得 $\sqrt{24-x} = 5$ ，

将 $\sqrt{24-x} = 5$ 两边平方可解得 $x = -1$ ，经检验 $x = -1$ 是原方程的解．

请你学习小明的方法，解决下列问题：

解方程 $\sqrt{3x^2+20x-3} + \sqrt{3x^2-4x-3} = 4x$ ，得方程的解为_____．

18．如果方程 $x^3 - 7x^2 + (10+k)x - 2k = 0$ 的三个根可以作为一个等腰三角形的边长，则实数 $k = \underline{\hspace{1cm}}$ ．

三、解答题：（本大题共⁸题，共⁷⁸分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

19．用适当的方法解下列一元二次方程．

(1) $3x^2 - 9x + 2 = 0$ (配方法) ;

(2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$ (公式法) ;

(3) $(2x+3)^2 = 4(2x+3)$ (因式分解) ;

(4) $(x-2)(3x-5) = 1$ (适当方法) ;

(5) $x^2 - 4x - 21 = 0$ (适当方法) .

20. 若关于 x 的方程 $\frac{x^2+3-b^2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} = \frac{3b}{x-2}$ 有增根, 求 b 的值 .

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$.

(1) 求证：无论 m 取何值，方程都有两个不相等的实数根；

(2) 如果方程的两个实数根为 x_1, x_2 ($x_1 > x_2$) , 且 $\frac{x_1+3}{x_1}$ 为整数，求整数 m 所有可能的值 .

22. 一个两位数，十位数字与个位数字之和是 6，把这个数的个位数字与十位数字对调后，所得的新两位

数与原来的两位数的积是 1008 ，求这个两位数 .

23. 某公司生产的新产品需要精加工后才能投放市场，为此王师傅承担了加工 300 个新产品的任务 . 在加

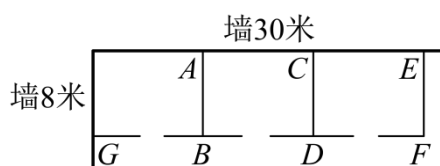
工了 60 个新产品后，王师傅接到通知，要求加快新产品加工的进程，王师傅在保证加工零件质量的前提下，

平均每天加工新产品的个数比原来多 10 个，比原计划提前 2 天完成了任务 . 问接到通知后，王师傅平均每

天加工多少个新产品？

24. 云栖小小 mall 的经营者要把如图所示的区域分隔成三个面积相同的商铺出租 . 已知铺面两面靠墙，墙

长分别为 8 米和 30 米，三间商铺都在沿街开一个 1 米宽的门．经营者共用去板材 45 米(不计损耗)．



(1) 若三间商铺总面积为 180m^2 ，求每间商铺的长和宽分别是多少？

(2) 小王作为个体经商户，希望同时租下三间铺面开设不同的商铺，但要求在不增加板材的基础上，使这三

间商铺的总面积达到最大．已知商铺的租金为每月每平方米 200 元，请问小王每月需要付给经营者多少租

金？

25．阅读材料，解答问题：

【材料 1】

为了解方程 $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ ，如果我们把 x^2 看作一个整体，然后设 $y = x^2$ ，则原方程可化为

$y^2 - 13y + 36 = 0$ ，经过运算，原方程的解为 $x_{1,2} = \pm 2, x_{3,4} = \pm 3$ ．我们把以上这种解决问题的方法通常叫做

换元法．

【材料 2】

已知实数 m, n 满足 $m^2 - m - 1 = 0, n^2 - n - 1 = 0$ ，且 $m \neq n$ ，显然 m, n 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个不相等的

实数根，由一元二次方程根与系数的关系可知： $m + n = 1, mn = -1$ ．

根据上述材料，解决以下问题：

(1) 直接应用：

- ① 材料¹解题过程中，利用换元法达到了降次的目的，体现了_的数学思想方法，若实数 a, b 满足

$$(a^2 + b^2)^2 - 3(a^2 + b^2) - 10 = 0, \text{ 则 } a^2 + b^2 \text{ 的值为 } \underline{\quad};$$

- ② 用换元法解方程： $x^2 - 2\sqrt{x^2 - 6x} = 6x + 8$.

(2)间接应用：

已知实数 m, n 满足： $m^2 - 5m + 2 = 0, n^2 - 5n + 2 = 0$ ，则 $\frac{n}{m} + \frac{m}{n}$ 的值

(3)拓展应用：

已知实数 x, y 满足： $\frac{9}{x^4} - \frac{6}{x^2} = 1, y^4 + 2y^2 - 1 = 0$ ，求 $\frac{9}{x^4} + y^4$ 的值

26. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根均为整数，则称方程为“快乐方程”. 通过计算发现，

任何一个“快乐方程”的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 一定为完全平方数. 现规定 $F(a, b, c) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ 为该“快乐方程”的

“快乐数”，例如“快乐方程” $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的两根均为整数，其“快乐数” $F(1, -3, -4)$

$$= \frac{4 \times 1 \times (-4) - (-3)^2}{4 \times 1} = -\frac{25}{4}.$$

(1)“快乐方程” $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的“快乐数”为_____；

(2)若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m - 1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ (m 为整数，且 $2 < m < 5$) 是“快乐方程”，求 m

的值；

(3)若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + m + 1 = 0$ 与 $x^2 - (n + 2)x + 2n = 0$ 都是“快乐方程”，且其“快乐数”相等，

设 $t = m^2 + n^2 + 8m - 4n + 25$ ，求 t 的最小值。