

专题 02 平行四边形中的折叠问题

题型归纳

题型一：平行四边形中的折叠问题

题型二：矩形中的折叠问题

题型三：菱形中的折叠问题

题型四：正方形中的折叠问题

题型专练

题型 01 平行四边形中的折叠问题

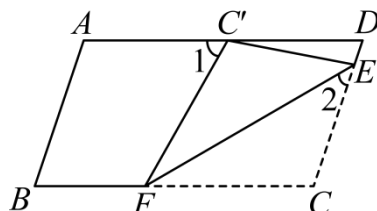
折叠的本质是两个图形关于折痕轴对称，所以折叠图形性质是对应线段相等、对应角相等、对应图形全等。

折叠问题常可分为以下三种题型：

1. 折叠情境下的角度求解问题
2. 折叠情境下的线段求解问题
3. 折叠情境下的面积求解问题

【典例 1】如图所示，在 $\square ABCD$ 中进行折叠操作，使得点 C 恰好落在 AD 边上的点 C' 处。已知 $\angle 1 = 60^\circ$ ，

$\angle 2 = 42^\circ$ ，那么 $\angle C$ 的度数为（ ）



A . 102°

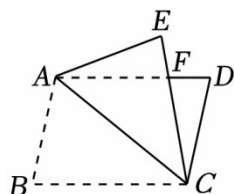
B . 108°

C . 126.5°

D . 130°

【变式 1】 如图，将 $\square ABCD$ 沿对角线 AC 翻折，点 B 落在点 E 处， CE 交 AD 于点 F ，若 $\angle B = 80^\circ$ ， $\angle ACE$

$= 2\angle ECD$ ，则 $\angle BAC$ 的度数为 ()



A . 40°

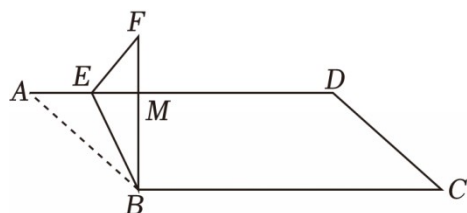
B . 50°

C . 60°

D . 80°

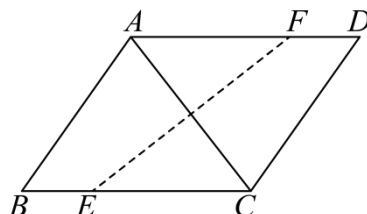
【典例 2】 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AB = 4\sqrt{2}$ ， $BC = 10$ ， $\angle A = 45^\circ$ ，点 E 是边 AD 上一动点，将 $\triangle AEB$ 沿直

线 BE 折叠，得到 $\triangle FEB$ ，设 BF 与 AD 交于点 M ，当 BF 与 $\square ABCD$ 的一边垂直时， DM 的长为 _____ .



【变式 2】 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AC = 9$ ，若将 $\square ABCD$ 沿 EF 折叠，使点 C 与点 A 重合，折痕为 EF ，且

$EF = 12$ ，则 $\square ABCD$ 中 BC 边上的高是 ()



A . $\frac{12}{5}$

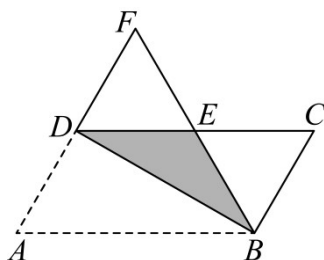
B . 5

C . $\frac{24}{5}$

D . $\frac{36}{5}$

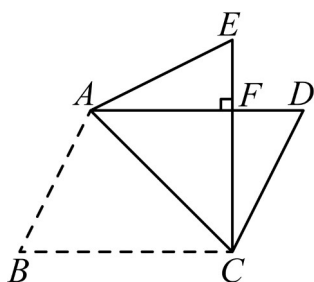
【典例 3】 如图，在平行四边形纸片 $ABCD$ 中， $AB = 6\text{cm}$ ， $AD = 3\text{cm}$ ，将纸片沿对角线 BD 对折，折叠后的

边 BF 与 CD 交于点 E ，此时 E 恰为 DC 中点，则图中重叠部分图形的面积为_____ .



【变式3】如图，将 $\square ABCD$ 沿对角线 AC 翻折，点 B 落在点 E 处， CE 交 AD 于点 F ，若 $AD \perp CE$ ，

$CF = 2$ ， $DF = 1$ ，则 $\square ABCD$ 的面积是（ ）



A . 3

B . 4

C . 5

D . 6

题型 02 矩形中的折叠问题

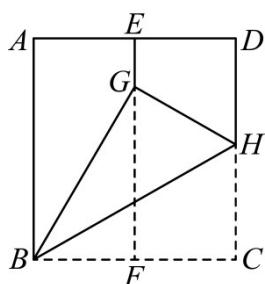
折叠的本质是两个图形关于折痕轴对称，所以折叠图形性质是对应线段相等、对应角相等、对应图形全等。

矩形中的折叠问题常可分为以下三种题型：

1. 折痕经过矩形的一个顶点（另一顶点落在矩形的一边上或矩形的对称轴上）
2. 折叠经过矩形的两个顶点（折痕为矩形的对角线）
3. 折叠不经过矩形的顶点（含经过矩形的对称中心）

【典例1】如图，小琼将长方形纸片 $ABCD$ 对折后展开，折痕为 EF ，再将 $\triangle BCF$ 沿 BH 翻折，将点 C 翻折

到 EF 上的点 G 处，此时 $\angle BHC$ 的度数为（ ）



A. 52°

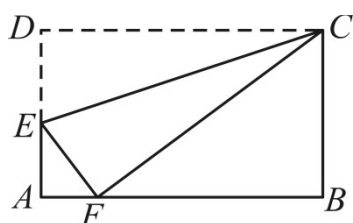
B. 48°

C. 50°

D. 60°

【变式1】 在长方形 $ABCD$ 中（长方形四个角是直角，对边平行且相等）， $AB=10$ ， $AD=6$ ．点 E 在边

AD 上，沿 CE 折叠，点 D 落在边 AB 的 F 处．求 $\triangle AEF$ 的面积．



【典例2】 如图，矩形 $ABCD$ ，将 $\triangle ABD$ 沿对角线 BD 翻折得到 $\triangle EBD$ （如图¹），交边 BC 于点 F ，再

将 $\triangle BEF$ 沿 BF 翻折得到 $\triangle BGF$ （如图²），延长 FG 交边 AD 于点 H ．设 $AB=m$ 、 $BC=n$ ．

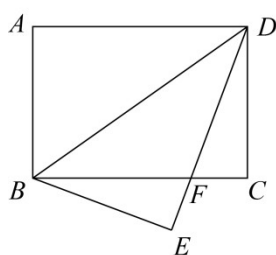


图 1

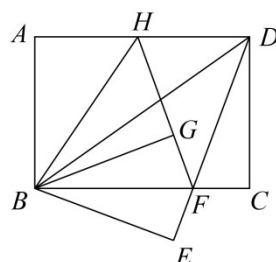


图 2

(1) 求证： $\triangle BFD$ 为等腰三角形；

(2) 当 $m=6$ ，四边形 $BEFG$ 为正方形时，求 n 的值；

【变式2】 翻折是一种常见的图形操作，观察翻折前后的图形能探究和发现数学结论，经过量化分析和演

绎推理能证明数学结论．

点 E 是矩形 $ABCD$ 的边 AB 上一点，把 $\triangle BCE$ 沿直线 CE 翻折，使得点 B 落在点 F 处．

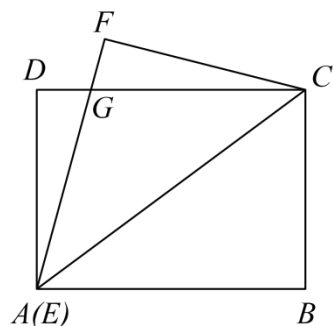


图1

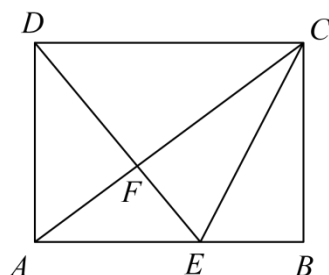
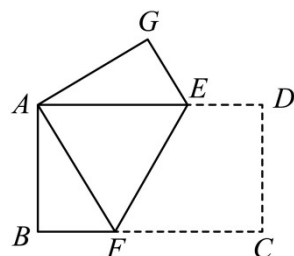


图2

(1) 如图 1，当点 E 与点 A 重合时， AF 交 CD 于点 G ，判断 GA 与 GC 的数量关系，说明理由；

(2) 如图 2，当点 F 恰好是 AC 与 DE 的交点，且 $AE = 2$ 时，求 BE 的长．

【典例 3】 如图，把矩形 $ABCD$ 沿 EF 折叠，使点 C 落在点 A 处，点 D 落在点 G 处，若 $CD = 2, AD = 3$ ．

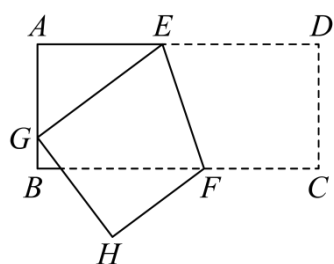


(1) 求证： $AE = AF$

(2) 求 AE 的长．

【变式 3】 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $AD = 9$ ，点 G 为 AB 边上一点．将矩形 $ABCD$ 折叠，使点 D

落在 AB 边上的点 G 处，点 C 的对应点为点 H ．若 $BG = 1$ ，则折痕 EF 的长为 ()



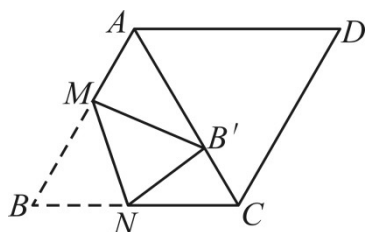
- A. $3\sqrt{10}$ B. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ C. $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

题型 03 菱形中的折叠问题

折叠的本质是两个图形关于折痕轴对称，所以折叠图形性质是对应线段相等、对应角相等、对应图形全等。
菱形中的折叠问题常常是转化双勾股模型解决问题

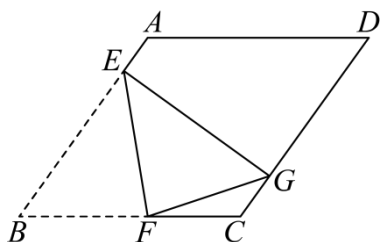
【典例 1】 在菱形 $ABCD$ 中，边长为 6， $\angle B=60^\circ$ ，点 M 是 AB 的中点，连接 AC 。 N 是 BC 上一动点，把

$\triangle ABC$ 沿 MN 折叠，使点 B 恰好落在 AC 边上的 B' 处，且 $AB':B'C=2:1$ ，则 $BN=$ _____。

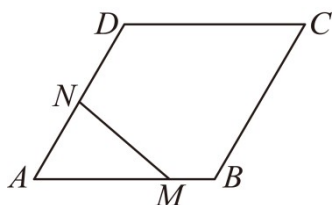


【变式 2】 如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在 AB, BC 上，沿 EF 翻折后，点 B 落在边 CD 上的 G 处，

若 $EG \perp CD$ ， $BE=5$ ， $DG=4$ ，则 AE 的长为_____。



【变式3】 在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 120^\circ$ ，边长 AB 为 8，点 M 是 AB 边上一点，点 N 是 AD 边上一点，将 $\triangle AMN$ 沿 MN 翻折，点 A 的对应点 A' 恰好落在菱形 $ABCD$ 的一条边上，若 $DA' = 2$ ，则 AM 的长为 _____。



【变式4】 在菱形 $ABCD$ 中， $\angle C = 60^\circ$ ，边长为 6，点 E 是 CD 边上一点，点 F 是 BC 边上一点，将 $\triangle CEF$ 沿 EF 翻折，点 C 的对应点 G 恰好落在菱形 $ABCD$ 的一条边上，且 $DG = 2$ 。

①如图 3，当点 G 落在 CD 边上时，求 CF 的长；

②当点 G 落在 AD 边上时，请直接写出 CF 的长。

题型 04 正方形内的折叠问题

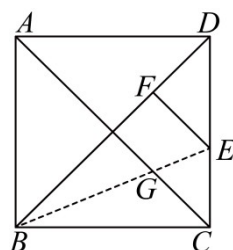
折叠的本质是两个图形关于折痕轴对称，所以折叠图形性质是对应线段相等、对应角相等、对应图形全等。

正方形中的折叠问题常常考类型有：

1. 一个顶点落在正方形的对角线上（或一边的中垂线上）；
2. 折叠后构成十字架模型；
3. 折叠后构成半角模型。

【典例1】 如图，折叠正方形 $ABCD$ 的一边 BC ，使点 C 落在 BD 上的点 F 处，折痕 BE 交 AC 于点 G 。若

$DE = 2\sqrt{2}$ ，则 CG 的长是 ()



A. $\sqrt{2}$

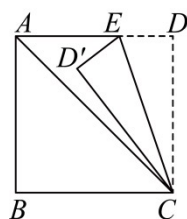
B. 2

C. $\sqrt{2} + 1$

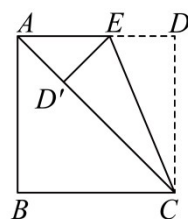
D. $2\sqrt{2} - 1$

【变式 1】 数学兴趣小组的同学在学习正方形时，将图形折叠到一些特殊的位置．如图①，正方形 $ABCD$

的边长为 6， E 是边 AD 上的一点，连接 CE ，将 $\triangle CDE$ 沿 CE 折叠至 $\triangle CD'E$ ．



图①



图②

(1) 如图②，当点 D 的对应点 D' 恰好落在对角线 AC 上时， $\angle DEC =$ _____°；

(2) 在 (1) 的条件下，求 DE 的长；

【变式 2】 【问题情境】

小颖在学习了正方形的相关知识之后，在一张边长为 8 的正方形纸片上进行了关于折叠的研究性学习．

【探究感悟】

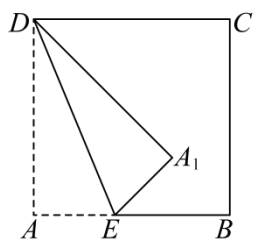


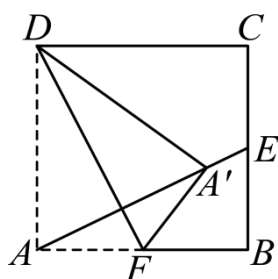
图1

(1) 如图1, 在正方形 $ABCD$ 中, 小颖在边 AB 上取点 E (E 不与 A 、 B 重合), 连接 DE , 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折, 使得点 A 的对应点 A_1 恰好落到对角线 BD 上, 则此时线段 AE 的长是_____.

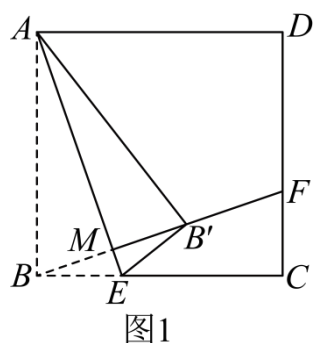
【深入探究】

(2) 小颖继续将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折, 发现: A_1 , B , C 三点能构成等腰三角形. 请求出此时线段 AE 的长.

【典例2】如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB=2$, E 为 BC 中点, 沿直线 DF 翻折 $\triangle ADF$, 使点 A 的对应点 A' 恰好落在线段 AE 上. $DF =$ _____;



【变式3】(1) 如图1, 小明将 $\triangle ABE$ 沿 AE 翻折得到 $\triangle AB'E$, 点 B 的对应点为 B' , 将纸片展平后, 连接 BB' 并延长交边 CD 于点 F , 小明发现折痕 AE 与 BF 存在特殊的数量关系, 数量关系为_____; 说明理由.

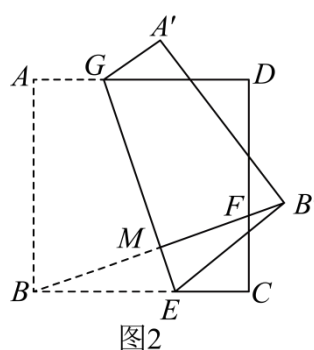


【类比探究】

(2) 如图2，小明继续折纸，将四边形 $ABEG$ 沿 GE 所在直线翻折得到四边形 $A'B'EG$ ，点 A 的对应点为点

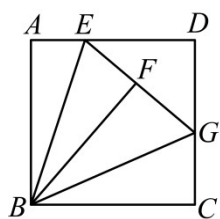
A' ，点 B 的对应点为点 B' ，将纸片展平后，连接 BB' 交边 CD 于点 F ，请你猜想线段 AG 、 CE 、 DF 之间的

数量关系并证明；



【典例3】如图所示，在正方形 $ABCD$ 中， E 为 AD 边上一点，将 $\triangle AEB$ 沿 BE 翻折到 $\triangle BEF$ 处，延长 EF

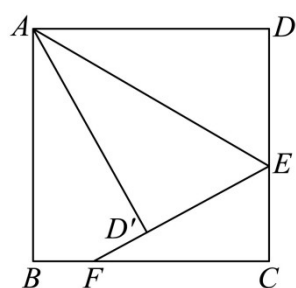
交 CD 边于 G 点．则 $\angle BEG + \angle BGE = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ；



图①

【变式4】如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 是 CD 边上一点，将 $\triangle ADE$ 沿 AE 翻折至 $\triangle AD'E$ ，延长 ED' 交 BC

于点 F 。若 $AB = 15$ ， $DE = 10$ ，则 BF 的长是 ()



A . 3

B . 12

C . 10

D . 5