

专题 01 整式的乘除 压轴题

题型归纳

题型一：幂的运算及其应用

题型二：整式的乘法

题型三：类平方差公式

题型四：完全平方公式的应用

题型五：杨辉三角

题型六：整式的乘法、乘法公式的图形应用

题型七：配方法的应用

题型八：整式的除法

题型九：其他材料、新定义题

题型专练

题型一：幂的运算及其应用

1. 阅读理解：我们在学习了幂的有关知识后，对两个幂 a^m 与 b^n （ a, b 都是正数， m, n 都是正整数）的大小进行比较，并归纳总结了如下两个结论：

①若 $a = b, m > n$ ，则 $a^m > b^n$ 。（底数相同，指数大的幂大）

②若 $a > b, m = n$ ，则 $a^m > b^n$ 。（指数相同，底数大的幂大）

尝试应用：试比较 2^{100} 与 3^{75} 的大小。

解：因为 $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$ ，

$3^{75} = (3^3)^{25} = 27^{25}$ ，……（第1步）

又 $16 < 27$ ，

所以 $2^{100} < 3^{75}$ ……（第2步）

问题解决：

(1)在尝试应用的解题过程中，第1步的思路是将底数和指数都不相同的两个幂转化化归为_____；第2步的依据是_____。

(2)请比较下面各组中两个幂的大小：

① 4^{50} 与 8^{33} ；

② 3^{100} 与 5^{60} 。

2. 如果 $x^n = y$ ，那么我们规定 $(x, y) = n$ 。例如：因为 $4^2 = 16$ ，所以 $(4, 16) = 2$ 。

(1) $(-2, 16) =$ _____ ；若 $(2, y) = 6$ ，则 $y =$ _____ ；

(2) 已知 $(4, 12) = a$ ， $(4, 5) = b$ ， $(4, y) = c$ ，若 $a + b = c$ ，求 y 的值；

(3) 若 $(5, 10) = a$ ， $(2, 10) = b$ ，令 $t = \frac{2ab}{a+b}$ 。

① 求 $\frac{25^a}{16^b}$ 的值；

② 求 t 的值。

3. 我们知道，一般的数学公式、法则、定义可以正向运用，也可以逆向运用，对于“同底数幂的乘法”“幂的乘方”“积的乘方”这几个法则的逆向运用表现为 $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ ， $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$ ， $a^m b^m = (ab)^m$ (m, n 为正整数)。请运用这个思路和幂的运算法则解决下列问题：

(1) ① 已知 $a^m = 4$ ， $a^n = 3$ ，则 $a^{m+n} =$ _____。

② 计算： $\left(\frac{1}{3}\right)^{50} \times (-3)^{51} =$ _____。

(2) 已知 $a = 2^{555}$ ， $b = 3^{444}$ ， $c = 4^{333}$ ，请比较 a ， b ， c 的大小，并用“<”连接起来。

(3) 若规定： $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$)， $a^m = 4$ ， $a^n = 3$ ，求 a^{2m-n} 的值。

4. 规定两数 a, b 之间的一种运算，记作 $[a, b]$ ，如果 $a^c = b$ ，那么 $[a, b] = c$ 。例如：因为 $2^3 = 8$ ，所以 $[2, 8] = 3$ 。

(1) 根据上述规定，填空： $[4, 64] =$ _____， $[3, 1] =$ _____； $\left[2, \frac{1}{8}\right] =$ _____；

(2) 小明在研究这种运算时发现一个特征： $[3^n, 4^n] = [3, 4]$ ，并作出了如下的说明：

$\therefore$ 设 $[3, 4] = x$, 则 $3^x = 4$,

$\therefore (3^x)^n = 4^n$, 即 $(3^n)^x = 4^n$,

$\therefore [3^n, 4^n] = x$

$\therefore [3^n, 4^n] = [3, 4]$.

试参照小明的说明过程，解决下列问题：

[运用]

计算 $[8, 1000] - [32, 100000]$;

[探究]

若令 $[2, 3] = a$, $[2, 5] = b$, $[2, 15] = c$, 试说明 $[2, 3] + [2, 5] = [2, 15]$;

[综合应用]

① 若 $[4, 25] = a$, $[2, 3] = b$, $[4, 225] = c$, 则 a , b , c 之间的数量关系为_____;

② 计算 $[3, 9] \times [3, 15] - [3, 25] =$ _____

题型二：整式的乘法

5. 对于代数式，不同的表达形式能表现出它不同的性质，若代数式 $A = x^2 + 4x + 3$, 代数式

$B = (x-1)^2 + 4(x-1) + 3$, 改变 x 的值，代数式 A , B 有不同的取值，如下表：

x	-1	0	1	2	3	4
$A = x^2 + 4x + 3$	0	3	8	15	24	35
$B = (x-1)^2 + 4(x-1) + 3$	-1	0	3	8	15	24

观察表格发现：当 $x = m$ 时， $A = x^2 + 4x + 3 = n$, 当 $x = m+1$ 时， $B = (x-1)^2 + 4(x-1) + 3 = n$, 我们把这种现象称为代数式 B 参照代数式 A 取值延后，相应的延后值为 1 .

(1) 若代数式 D 参照代数式 A 取值延后，相应的延后值为 2，求代数式 D ;

(2) 若代数式 $x^2 - 2x$ 参照代数式 A 的取值延后，求相应的延后值；

(3) 若代数式 $4x^2 - 3x + b$ 参照代数式 $ax^2 - 6x + c$ 取值延后，求 $b-c$ 的值 .

6. 阅读以下材料，回答下列问题：

小明遇到这样一个问题：求计算 $(x+2)(2x+3)(3x+4)$ 所得整式的一次项系数．小明想通过计算

$(x+2)(2x+3)(3x+4)$ 所得的整式解决上面的问题，但感觉有些繁琐，他想探寻一下，是否有相对简洁的方法．

他决定从简单情况开始，先找 $(x+2)(2x+3)$ 所得整式中的一次项系数．通过观察发现：

$$(x+2)(2x+3)=2x^2+3x+4x+6$$

也就是说，只需用 $x+2$ 中的一次项系数1乘以 $2x+3$ 中的常数项3，再用 $x+2$ 中的常数项2乘以 $2x+3$ 中的一次项系数2，两个积相加 $1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$ ，即可得到一次项系数．

延续．上面的方法，求计算 $(x+2)(2x+3)(3x+4)$ 所得整式的一次项系数．可以先用 $x+2$ 的一次项系数1， $2x+3$ 的常数项3， $3x+4$ 的常数项4，相乘得到12；再用 $2x+3$ 的一次项系数2， $x+2$ 的常数项2， $3x+4$ 的常数项4，相乘得到16；然后用 $3x+4$ 的一次项系数3， $x+2$ 的常数项2， $2x+3$ 的常数项3，相乘得到18，最后将12，16，18相加，得到的一次项系数为46．

参考小明思考问题的方法，解决下列问题：

(1)计算 $(2x+1)(3x+2)$ 所得整式的一次项系数为_____．

(2)计算 $(x+1)(3x+2)(4x-3)$ 所得整式的一次项系数为_____．

(3)若计算 $(x^2-x+1)(x^2-3x+a)(2x-1)$ 所得整式的一次项系数为0，则 $a=_____$ ．

(4)计算 $(x+1)^5$ 所得整式的一次项系数为_____，二次项系数为_____．

(5)计算 $(2x-1)^5$ 所得整式的一次项系数为_____，二次项系数为_____．

7．阅读：在计算 $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ 的过程中，我们可以先从简单的、特殊的情形入手，再到复杂的、一般的问题，通过观察、归纳、总结，形成解决一类问题的一般方法，数学中把这样的过程叫做特殊到一般．如下所示：

【观察】 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$$

【归纳】 $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$ ；

【应用】计算 $2^{2023}+2^{2022}+2^{2021}+\dots+2^2+2+1$

解：令 $a=2$ ， $b=1$ ， $n=2024$

则 $(2-1)(2^{2023}+2^{2022}+2^{2021}+\dots+2^2+2+1)=2^{2024}-1$

$\therefore 2^{2023}+2^{2022}+2^{2021}+\dots+2^2+2+1=2^{2024}-1$

结合上述材料，完成下列问题：

(1)证明等式： $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$ ；

(2)应用(1)中所证明等式，计算 $3^{20}-3^{19}+3^{18}-3^{17}+\dots-3^3+3^2-3+1$ ；

(3)若整式 P ， Q 满足 $(a+b)\cdot P=a^{2024}-b^{2024}$ ， $(a+b)\cdot Q=a^{2025}+b^{2025}$ ，用一个含 a ， b 的式子表示出 P ， Q 之间的数量关系。

题型三：类平方差公式

8. 你能化简 $(a-1)(a^{99}+a^{98}+a^{97}+\dots+a^2+a+1)$ 吗？我们不妨先从简单情况入手，发现规律，归纳结论。

入手，发现规律，归纳结论。

入手，发现规律，归纳结论。

(1)先填空：

$(a-1)(a+1)=$ _____；

$(a-1)(a^2+a+1)=$ _____；

$(a-1)(a^3+a^2+a+1)=$ _____；...

由此猜想： $(a-1)(a^{99}+a^{98}+a^{97}+\dots+a^2+a+1)$ _____

(2)利用这个结论，你能解决下面两个问题吗？

①求 $2^{199}+2^{198}+2^{197}+\dots+2^2+2+1$ 的值；

②若 $a^5+a^4+a^3+a^2+a+1=0$ ，则 a^6 等于多少？

9. 已知 $x \neq 1$ ， $(1+x)(1-x)=1-x^2$ ， $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$ ， $(1-x)(1+x+x^2+x^3)=1-x^4$ 。

(1)根据以上式子计算：

① $(1-2)(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)$ ；

② $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$ (n 为正整数) ;

③ $(x-1)(x^{99} + x^{98} + x^{97} + \dots + x^2 + x + 1)$.

(2)通过以上计算，请你进行下面的探索：

① $(a-b)(a+b) = \underline{\hspace{2cm}}$;

② $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = \underline{\hspace{2cm}}$;

③ $(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10 . 已知 $x \neq 1$, 计算 $(1+x)(1-x) = 1-x^2$,

$(1-x)(1+x+x^2) = 1-x^3$,

$(1-x)(1+x+x^2+x^3) = 1-x^4$.

猜想： $(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) = \underline{\hspace{2cm}}$ (n 为正整数) ;

(1)根据你的猜想计算：

① $(1-2)(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5) = \underline{\hspace{2cm}}$

② $2 + 2^2 + 2^3 + 2^n = \underline{\hspace{2cm}}$ (n 为正整数)

③ $(x-1)(x^{99} + x^{98} + x^{97} + \dots + x^2 + x + 1) = \underline{\hspace{2cm}}$

(2)通过以上规律请你进行下面的探索：

① $(a-b)(a+b)$

② $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

③ $(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

(3)判断 $2^{2019} + 2^{2018} + 2^{2017} + \dots + 2^2 + 2 + 1$ 的个位数字是

题型四：完全平方公式的应用

11 . 我们在应用完全平方公式解题时，经常会对公式进行变形。比如：已知 $a+b=3, a^2+b^2=5$, 则

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{3^2 - 5}{2} = 2 .$$

根据以上变形，回答下列问题：

(1)若 $x + 2y = 5, x^2 + 4y^2 = 9$, 求 xy ;

(2)已知 $m + \frac{1}{m} = 5$, 则 $m - \frac{1}{m} =$ _____ ;

(3)已知长和宽分别为 a, b 的长方形, 它的周长为 14 , 面积为 10 , 求 $a^2 + b^2 + ab$ 的值 .

12 . [阅读理解]我们常将一些公式变形, 以简化运算过程 . 如: 可以把公式“ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ”变形为 $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ 或 $2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2)$ 等形式 ,

问题: 若 x 满足 $(20-x)(x-30) = 10$, 求 $(20-x)^2 + (x-30)^2$ 的值 .

我们可以作如下解答: 设 $a = 20-x$, $b = x-30$, 则 $(20-x)(x-30) = ab = 10$,

即: $a+b = (20-x) + (x-30) = 20-30 = -10$.

所以 $(20-x)^2 + (x-30)^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (-10)^2 - 2 \times 10 = 80$.

请根据你对上述内容的理解, 解答下列问题:

(1)若 x 满足 $(80-x)(x-70) = -10$, 求 $(80-x)^2 + (x-70)^2$ 的值 .

(2)若 x 满足 $(2020-x)^2 + (2017-x)^2 = 4051$, 求 $(2020-x)(2017-x)$ 的值 .

13 . 已知 $a+b=1$, $ab=-1$, 设 $S_1=a+b$, $S_2=a^2+b^2$, $S_3=a^3+b^3$, ... , $S_n=a^n+b^n$

(1) 计算 S_2 和 S_4

(2) 已知 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, 求 S_3 并猜想 S_{n-2} , S_{n-1} , S_n 三者之间的数量关系 (不需要证明) ;

(3) 若 $M=(S_1+S_2+S_3+-----S_{99}) (S_2+S_3+-----S_{100})$, $N= (S_1+S_2+S_3+-----S_{100}) (S_2+S_3+-----S_{99})$ 判断 M , N 的大小, 并说明理由 .

题型五：杨辉三角

14 . 我国古代数学的许多发现都曾位居世界前列, 如图 1 的“杨辉三角”就是其中的一例 . 如图 2 , 我们发现杨辉三角给出了 $(a+b)^n$ (n 为正整数) 的展开式 (按 a 的次数由大到小的顺序排列) 的系数规律 . 例如, 在三角形中第三行的三个数 1 , 2 , 1 , 恰好对应 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 展开式中各项的系数; 第四行的四个数 1 , 3 , 3 , 1 , 恰好对应 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 展开式中各项的系数:

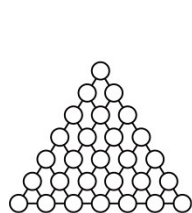


图1

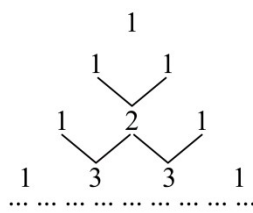


图2

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

(1) $(a+b)^4$ 展开式中共有_项，第三项是_；

(2) 推断整式 $(a+b)^n$ (n 为正整数) 的展开式的各项系数之和为_；

(3) 利用上面的规律计算 (不用材料中的规律计算不给分) : $2^5 - 5 \times 2^4 + 10 \times 2^3 - 10 \times 2^2 + 5 \times 2 - 1$.

15 . 杨辉三角

如果将 $(a+b)^n$ (n 为非负整数) 的展开式的每一项按字母 a 的次数由大到小排列，就可以得到下面的等式：

$(a+b)^0 = 1$ ，它只有一项，系数为 1；

$(a+b)^1 = a+b$ ，它有两项，系数分别为 1，1；

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，它有三项，系数分别为 1，2，1；

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ，它有四项，系数分别为 1，3，3，1；

将上述每个式子的各项系数排成该表 (如图) .

		1		
	1		1	
1	2	1		
1				

观察该表，可以发现每一行的首末都是 1，并且下一行的数比上一行多 1

个，中间各数都写在上一行两数的中间，且等于它们的和．按照这个规律可以将这个表继续往下写．

利用上面的规律，完成以下问题：

(1) $(a+b)^4$ 的展开式为_____；

(2) $(a+b)^8$ 的展开式中共有_____项，从左往右第三项的系数是_____；

(3) 计算： $3^4 + 4 \times 3^3 + 6 \times 3^2 + 4 \times 3 + 1$ ；

(4)代数推理：已知 m 为整数，求证： $(m+3)^3 - (m-3)^3$ 能被 18 整除。

16. 阅读材料：

材料 1：杨辉是我国南宋时期杰出的数学家，在其所著的《详解九章算法》中记载了源于北宋时期数学家

贾宪的“开方作法本源图”，我们把这个表叫做“杨辉三角”（如图 1）；材料 2：我们知道， $(a+b)^1 = a+b$ ，

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。利用整式的乘法运算，还可以得到：

$(a+b)^3 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。当 $a+b \neq 0$ 时，将计算结果中整式（以 a 降次排序）

各项的系数排列成表，可得到如图 2。

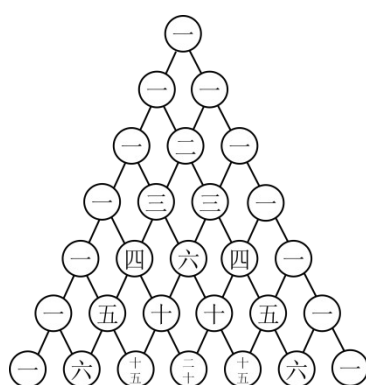


图1

$(a+b)^0$				
$(a+b)^1$		1		
$(a+b)^2$		1	1	
$(a+b)^3$	1	3	3	1
...				

图2

第一行			$\frac{1}{1}$		
第二行		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
第三行		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	
第四行	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	
第五行	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$
					

图3

(1)请根据材料 1 和材料 2 直接写出：

① $(a+b)^4$ 展开式中 a^3b 的系数是_；

② $(a+b)^{10}$ 展开式中所有项的系数和为_；

③利用上面的规律计算（结果用乘方表示）： $2^8 + 8 \times 2^7 + 28 \times 2^6 + 56 \times 2^5 + 70 \times 2^4 + 56 \times 2^3 + 28 \times 2^2 + 8 \times 2 + 1$ ；

(2)如图是世界上著名的“莱布尼茨三角形”，类比“杨辉三角”，根据你发现的规律，回答下列问题：若 (m,n)

表示第 m 行，从左到右数第 n 个数，如 $(4,2)$ 表示第四行第二个数是 $\frac{1}{12}$ ，则 $(6,3)$ 表示的数是_。

题型六：整式的乘法、乘法公式的图形应用

17. 从边长为 a 的正方形中剪掉一个边长为 b 的正方形（如图 1），然后将剩余部分拼成一个长方形（如图 2）。

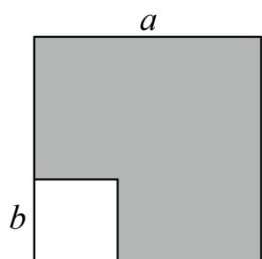


图 1

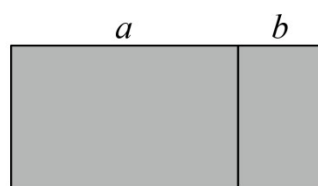


图 2

(1) 上述操作能验证的等式是_____。

$A. a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ $B. a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $C. a^2 + ab = a(a + b)$

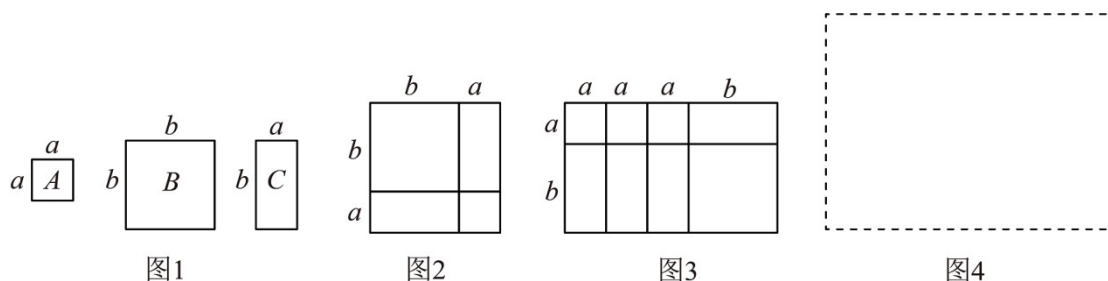
(2) 已知 $4a^2 - b^2 = 24$, $2a + b = 6$, 则 $2a - b =$ _____。

(3) 应用所得的公式计算： $2025^2 - 2024 \times 2026$ 。

(4) 应用所得的公式计算： $9(10+1)(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)(10^{16}+1)$ 。

18. 乘法公式的探究及应用。

数学活动课上，老师准备了若干个如图 1 所示的三种纸片， A 种纸片是边长为 a 的正方形， B 种纸片是边长为 b 的正方形， C 种纸片是长为 b ，宽为 a 的长方形，并用 A 种纸片一张， B 种纸片一张， C 种纸片两张拼成了如图 2 所示的大正方形。



(1) ①观察图 2，请你写出代数式 $(a+b)^2$ ， $a^2 + b^2$ ， ab 之间的等量关系式_____。

②图 3 是由图 1 提供的几何图形拼接而得，可以得到 $(a+b)(3a+b) =$ _____。

(2) 请利用图 1 所给的纸片拼出一个长方形，要求所拼出图形的面积为 $(2a+b)(a+2b)$ ，(在图 4 的方框内进行作图)，进而可以得到等式：_____；

(3) 利用 (2) 中得到的结论，解决下面的问题：若 $4a^2 + 10ab + 4b^2 = 5$ ， $a + 2b = \frac{1}{2}$ ，求 $2a + b$ 的值。

19. [知识回顾]

有这样一类题：

代数式 $ax - y + 6 + 3x - 5y - 1$ 的值与 x 的取值无关，求 a 的值；

通常的解题方法；

把 x, y 看作字母， a 看作系数合并同类项，因为代数式的值与 x 的取值无关，所以含 x 项的系数为 0，即原式 $= (a+3)x - 6y + 5$ ，所以 $a+3=0$ ，即 $a = -3$ 。

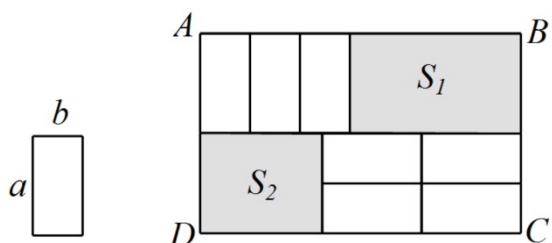


图1

图2

[理解应用]

(1) 若关于 x 的整式 $(2m-3)x + 2m^2 - 3m$ 的值与 x 的取值无关，求 m 的值；

(2) 已知 $3[(2x+1)(x-1) - x(1-3y)] + 6(-x^2 + xy - 1)$ 的值与 x 无关，求 y 的值；

(3)

(4) (能力提升) 如图 1，小长方形纸片的长为 a 、宽为 b ，有 7 张图 1 中的纸片按照图 2 方式不重叠地放在大长方形 $ABCD$ 内，大长方形中有两个部分（图中阴影部分）未被覆盖，设右上角的面积为 S_1 ，左下角的面积为 S_2 ，当 AB 的长变化时， $S_1 - S_2$ 的值始终保持不变，求 a 与 b 的等量关系。

20. 阅读理解下列材料：

“数形结合”是一种非常重要的数学思想。在学习“整式的乘法”时，我们通过构造几何图形，用“等积法”直观地推导出了完全平方公式： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ （如图 1）。所谓“等积法”就是用不同的方法表示同一个图形的面积，从而得到一个等式。如图 1，从整体看是一边长为 $a+b$ 的正方形，其面积为 $(a+b)^2$ 。从局部看由四部分组成，即：一个边长为 a 的正方形，一个边长为 b 的正方形，两个长、宽分别为 a, b 的长方形。这四部分的面积和为 $a^2 + 2ab + b^2$ 。因为它们表示的是同一个图形的面积，所以这两个代数式应该相等，即 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。

同理，图 2 可以得到一个等式： $(a+b)(2a+b) = 2a^2 + 3ab + b^2$ 。

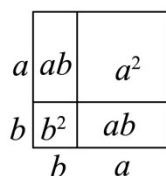


图1

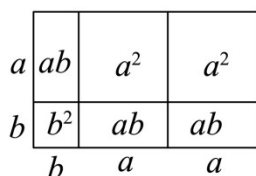


图2

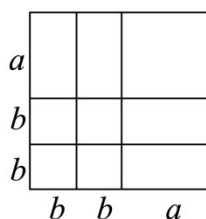


图3

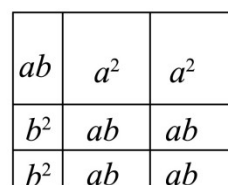


图4

根据以上材料提供的方法，完成下列问题：

(1)由图3可得等式：_____；

(2)由图4可得等式：_____；

(3)若 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $c > 0$ ，且 $a+b+c=9$ ， $ab+bc+ac=26$ ，求 $a^2+b^2+c^2$ 的值。

①为了解决这个问题，请你利用数形结合思想，仿照前面的方法在下方空白处画出相应的几何图形，通过这个几何图形得到一个含有 a ， b ， c 的等式。

②根据你画的图形可得等式：_____；

③利用①的结论，求 $a^2+b^2+c^2$ 的值。

21. 对于一个图形，通过两种不同的方法计算它的面积，可以得到一个数学等式。例如图1可以得到

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，请解答下列问题：

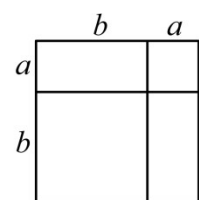


图1

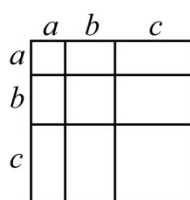


图2

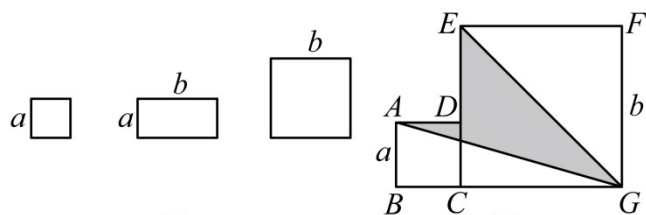


图3

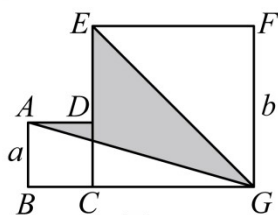


图4

(1) 写出图2中所表示的数学等式_____；

(2) 利用(1)中得到的结论，解决下面的问题：若 $a+b+c=15$ ， $ab+ac+bc=35$ ，则 $a^2+b^2+c^2=_____$ ；

(3) 小明同学用图3中 x 张边长为 a 的正方形， y 张边长为 b 的正方形， z 张边长分别为 a 、 b 的长方形纸片拼出一个面积为 $(2a+b)(a+2b)$ 长方形图形，则 $x+y+z=_____$ 。

(4) 如图4所示，将两个边长分别为 a 和 b 的正方形拼在一起， B ， C ， G 三点在同一直线上，连接 AG 和

GE ，若两正方形的边长满足 $a+b=12$ ， $ab=20$ ，你能求出阴影部分的面积吗？

22. 一天，小明和小红玩纸片拼图游戏，发现利用图①中的三种材料各若干可以拼出一些图形来解释某些等式，比如图②可以解释为： $(a+2b)(a+b) = a^2+3ab+2b^2$ 。

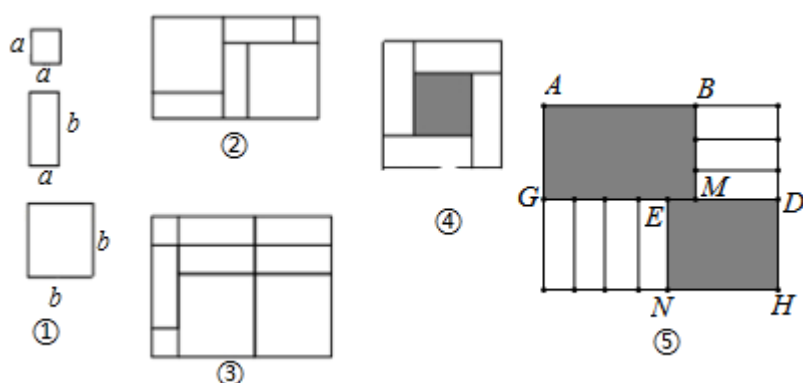
(1) 图③可以解释为等式：_____。

(2) 图④中阴影部分的面积为_____。观察图④请你写出 $(a+b)^2$ 、 $(a-b)^2$ 、 ab 之间的等量关系是_____。

(3) 如图⑤，小明利用 7 个长为 b ，宽为 a 的长方形拼成如图所示的大长方形；

①若 $AB=4$ ，若长方形 $AGMB$ 的面积与长方形 $EDHN$ 的面积之差为 S ，试计算 S 的值（用含 a ， b 的代数式表示）

②若 AB 为任意值，且①中的 S 的值为定值，求 a 与 b 的关系。



23. 在学习“整式的乘法”时，我们借助几何图形解释或分析问题，建立了形与数的联系。如图 1，是一个面积为 $(2a+b)^2$ 的图形，同时此图形中有 4 个边长为 a 的正方形，1 个边长为 b 的正方形，4 个两边长分别为 a 和 b 的长方形，从而可以得到乘法公式 $(2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$ 。

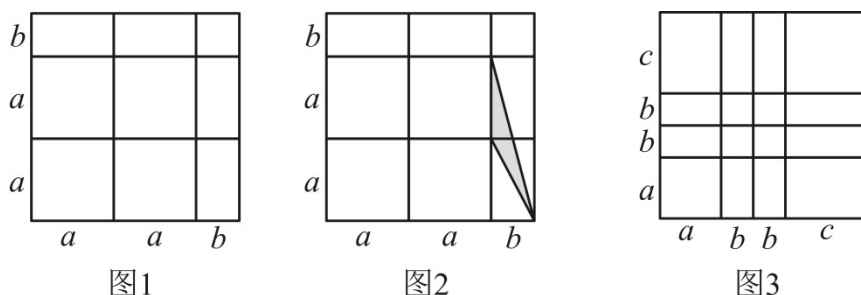


图1

图2

图3

(1) 如图 2，若 $2a+b=6$ ， $4a^2+b^2=24$ ，则图中阴影部分的面积为_____；

(2) 若 $(2025-y)(2y-4043)=2$ ，求代数式 $4(2025-y)^2 + (2y-4043)^2$ 的值；

(3) 观察图 3，

①从图3中得到 $(a+2b+c)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

②根据得到的结论，解决问题：已知 $a+2b+c=5$ ， $a^2+4b^2+c^2=13$ ， $abc=\frac{1}{2}$ ，代数式 $4a^2b^2+a^2c^2+4b^2c^2$ 的值。

题型七：配方法的应用

24. 教科书中这样写道：“我们把整式 $a^2+2ab+b^2$ 及 $a^2-2ab+b^2$ 叫做完全平方式”，如果一个整式不是完全平方式，我们常做如下变形：先添加一个适当的项，使式子中出现完全平方式，再减去这个项，使整个式子的值不变，这种方法叫做配方法。配方法是一种重要的解决问题的数学方法，可以求代数式的最大值或最小值等。

例如：求代数式 $2x^2+4x-6$ 的最小值。 $2x^2+4x-6=2(x^2+2x-3)=2(x+1)^2-8$ 。

∴当 $x=-1$ 时， $2x^2+4x-6$ 有最小值，最小值是 -8 。

根据阅读材料用配方法解决下列问题：

- (1)当 x 为何值时，代数式 $3x^2-6x+4$ 有最小值，求出这个最小值；
- (2) a, b 为何值时，整式 $a^2+b^2-4a+6b+28$ 有最小值，求出最小值；
- (3)当 a, b 为什么关系时，代数式 $a^2+4b^2+4ab-4a-8b+7$ 有最小值，并求出这个最小值。

25. 阅读下列材料：

我们把整式 $a^2+2ab+b^2$ 及 $a^2-2ab+b^2$ 叫做完全平方公式，如果一个整式不是完全平方公式，我们常做如下变形：先添加一个适当的项，使式子中出现完全平方式，再减去这个项，使整个式子的值不变，这种方法叫做配方法。配方法是一种重要的解决问题的数学方法，可以求代数式的最大值或最小值。

例如，求代数式 x^2+2x-4 的最小值。

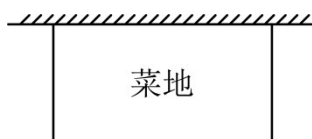
$x^2+2x-4=(x^2+2x+1)-5=(x+1)^2-5$ ，可知当 $x=-1$ 时， x^2+2x-4 有最小值，最小值是 -5 。

再例如：求代数式 $-3x^2+6x-4$ 的最大值。

$-3x^2+6x-4=-3(x^2-2x+1)-4+3=-3(x-1)^2-1$ ，可知当 $x=1$ 时， $-3x^2+6x-4$ 有最大值，最大值是 -1 。

- (1)【直接应用】代数式 x^2+4x-3 的最小值为_____；
- (2)【类比应用】若整式 $M=a^2+b^2-2a+3b+2023$ ，求 M 的最小值；
- (3)【知识迁移】如图，学校打算用长20米的篱笆围一个长方形的菜地，菜地的一面靠墙（墙足够长），

求围成的菜地的最大面积．



26．配方法是指将一个式子或一个式子的某一部分通过恒等变形化为完全平方式或几个完全平方式的和的方法．这种方法常常被用到恒等变形中，以挖掘题目中的隐含条件，是解题的有力手段之一．

我们定义：一个整数能表示成 $a^2 + b^2$ (a, b 是整数) 的形式，则称这个数为“完全数”．例如，10 是“完全数”．理由：因为 $10 = 3^2 + 1^2$ ．再如， $M = x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2$ (x, y 是整数)，所以 M 也是“完全数”．

解决问题：

(1) 请你再写一个小于 10 的“完全数”_____；并判断 40 是否为“完全数”_____；

(2) 若二次三项式 $x^2 - 4x + 8$ (x 是整数) 是“完全数”，可配方成 $(x - m)^2 + n^2$ (m, n 为常数)，则 mn 的值为_____；

探究问题：

(3) 已知“完全数” $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5$ (x, y 是整数) 的值为 0，则 $x + y$ 的值为_____；

(4) 已知 $S = x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + k$ (x, y 是整数， k 是常数)，要使 S 为“完全数”，试求出符合条件的 k 值．

拓展结论：已知实数 x, y 满足 $-x^2 + 3x + y - 2 = 0$ ，求 $x + y$ 的最小值是_____．

题型八：整式的除法

27．我们学过单项式除以单项式、整式除以单项式，那么整式除以整式该怎么计算呢？我们也可以用竖式进行类似演算，即先把被除式、除式按某个字母的指数从大到小依次排列项的顺序，并把所缺的次数项用零补齐，再类似数的竖式除法求出商式和余式，其中余式为 0 或余式的次数低于除式的次数．

例：计算 $(8x^2 + 6x + 1) \div (2x + 1)$ ，可依照 $672 \div 21$ 的计算方法用竖式进行计算．因此

$$(8x^2 + 6x + 1) \div (2x + 1) = 4x + 1.$$

$$\begin{array}{r}
 3 \ 2 \\
 21 \overline{) 6 \ 7 \ 2} \\
 \underline{6 \ 3} \\
 4 \ 2 \\
 \underline{4 \ 2} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4x+1 \\
 2x+1 \overline{) 8x^2+6x+1} \\
 \underline{8x^2+4x} \\
 2x+1 \\
 \underline{2x+1} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 \begin{array}{c} \uparrow a \\ \downarrow a \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 A \\
 \hline
 \end{array}
 &
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 B \\
 \hline
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{cc}
 \leftarrow x+2 \rightarrow & \leftarrow 6 \rightarrow
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

(1) $(x^3 + 4x^2 + 5x - 6) \div (x + 2)$ 的商是_____，余式是_____。

(2) 利用上述方法解决：若整式 $2x^4 + 4x^3 + ax^2 + 8x - b$ 能被 $x^2 - x + 1$ 整除，求 a^b 值。

(3) 已知一个长为 $(x+2)$ ，宽为 $(x-2)$ 的长方形 A ，若将它的长增加 6，宽增加 a 就得到一个新长方形 B ，此时长方形 B 的周长是 A 周长的 2 倍（如图）。另有长方形 C 的一边长为 $(x+10)$ ，若长方形 B 的面积比 C 的面积大 76，求长方形 C 的另一边长。

题型九：其他材料、新定义题

28. 问题提出：

(1) 数学课上王老师在黑板上写了如下式子：

$$a = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{2048}+1)$$

小丽同学想到刚学的平方差公式，她的方法是：

$$a = 1 \times (2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{2048}+1) = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{2048}+1),$$

求出 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

问题解决：(2) 请借鉴小丽的方法求出 b 的值。

$$b = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1)$$

迁移应用：定义一种新运算： $i^2 = -1$ 。

$$(3) (2+3i)(2-3i) = \underline{\hspace{1cm}}.$$

$$(4) \text{ 求 } [1+(2i)^2][1+(2i)^4][1+(2i)^8]\cdots[1+(2i)^{256}][1+(2i)^{512}] \text{ 的值.}$$

29. 如果一个正整数能表示为两个正整数的平方差，那么称这个正整数为智慧数。例如， $3 = 2^2 - 1^2$ ，

$5 = 3^2 - 2^2$ ， $7 = 4^2 - 3^2$ ，因此 3，5，7 这三个数都是“智慧数”。

小组活动任务：从 1 开始，第 2024 个智慧数是哪个数呢？

某数学兴趣小组的研究过程如下：

【阶段一】

特殊情况探讨： $3 = 2^2 - 1^2$ ， $5 = 3^2 - 2^2$ ， $7 = 4^2 - 3^2$ ， $8 = 3^2 - 1^2$ ， $9 = 5^2 - 4^2$ ， $11 = 6^2 - 5^2$ ……

【阶段二】

一般性探究：同学们想到设 k 是正整数，

$$\therefore (k+1)^2 - k^2 = 2k+1,$$

$\therefore$ 除1外，所有的奇数都是智慧数。

$$\text{又} \therefore (k+1)^2 - (k-1)^2 = \textcircled{1} \underline{\hspace{2cm}},$$

$\therefore$ 除4外，所有能被 $\textcircled{2}$ 整除的偶数都是智慧数。

$\therefore$ 还需要讨论被4除余2的数是否是智慧数。

如果 $4k+2$ 是智慧数，那么必有两个正整数 m 和 n ，使得 $4k+2 = m^2 - n^2$ ，即 $2(2k+1) = (m+n)(m-n)$

……

【阶段三】

总结与归纳：把从1开始的正整数依次每4个分成一组，除第一组有 $\textcircled{3}$ 个智慧数外，其余各组都有

$\textcircled{4}$ 个智慧数，而且每组中第 $\textcircled{5}$ 个不是智慧数。

请你完成以下任务：

(1) 下列偶数中是智慧数的是_____；

A . 2018 B . 2022 C . 2024 D . 2026

(2) 请将【阶段二】 【阶段三】中的 $\textcircled{1}$ ~ $\textcircled{5}$ 分别补充完整；

(3) 请完成【阶段二】“……”部分的研究；

(4) 在正整数中，从1开始，第2024个智慧数是_____。