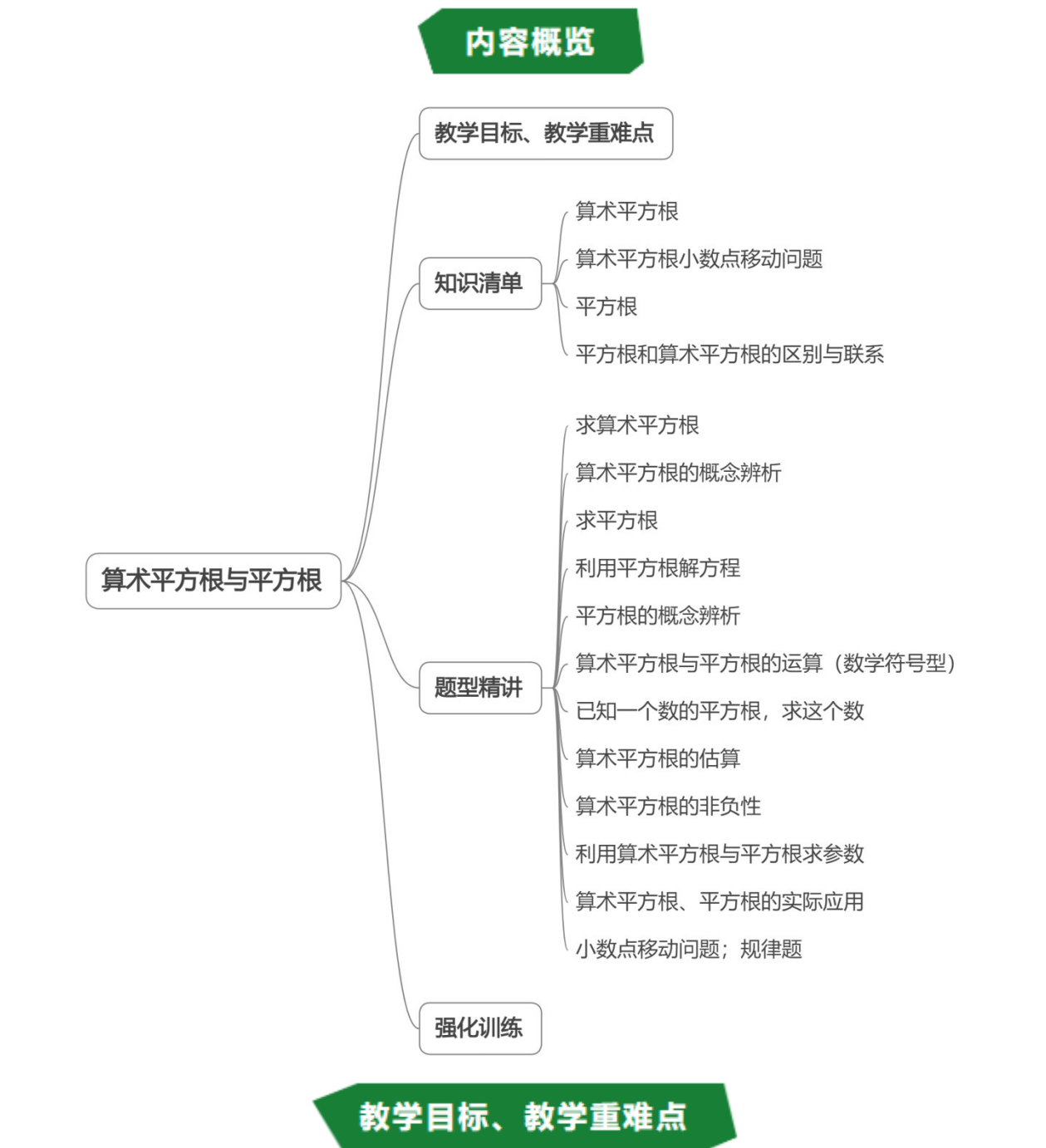


专题 19.1 算术平方根与平方根



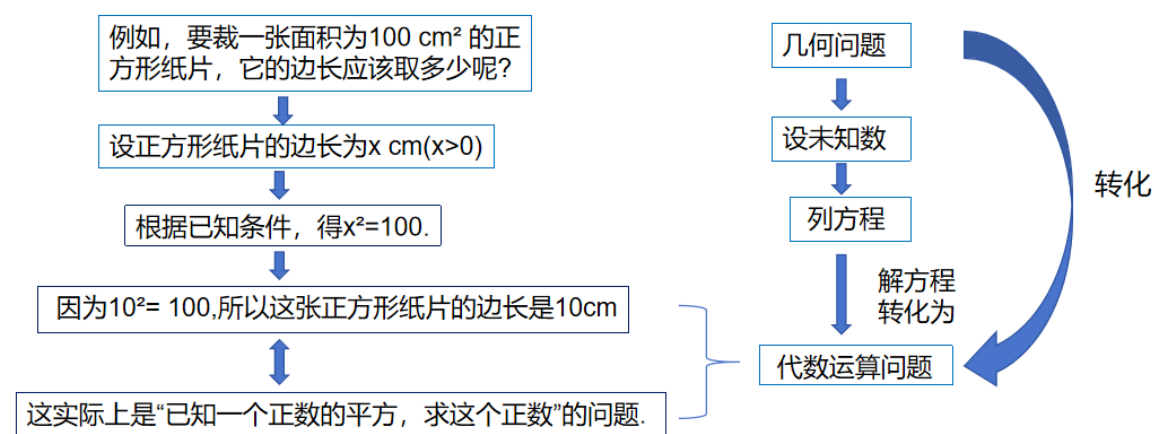
教学目标	1. 知道算术平方根的概念，会用根号表示数的算术平方根； 2. 了解平方根，会用根号表示数的平方根；会求一个数的平方根； 3. 了解开平方与平方互为逆运算； 4. 掌握算术平方根的小数点移动问题，算术平方根、平方根的其他应用。
教学重难点	1.重点

	(1) 知道算术平方根、平方根的概念与表示，会求一个数的算术平方根或平方根； (2) 算术平方根的双重非负性的应用，利用平方根解方程等； (3) 利用算术平方根、平方根求参数。
	2. 难点 (1) 概念辨析：由平方都开平方，引出算术平方根、平方根的概念；抽象思想； (2) 算术平方根、平方根的综合应用。

知识清单

知识点 1 算术平方根

1. 问题引入：已知一个正方形的边长，可以通过平方运算求出它的面积. 反过来，已知正方形的面积，它的边长应该如何计算？



2. 算术平方根

①**算术平方根**：一般地，如果一个正数 x 的平方等于 a ，即 $x^2=a$ ，那么这个正数 x 叫作 a 的**算术平方根**。

② a 的算术平方根记为“ $\sqrt{a}$ ”，读作“**根号 a** ”。 a 叫作**被开方数**。

③ 因为 0 的平方是 0，所以规定 0 的算术平方根是 0，记为 $\sqrt{0}=0$ 。

要点：当式子 $\sqrt{a}$ 有意义时， a 一定表示一个非负数，即 $\sqrt{a} \geq 0$ ， $a \geq 0$ ；

可简记为算术平方根的“双重非负性”。

【即学即练】

1. 下列说法正确的是 ()

A. $\sqrt{25}$ 表示 25 的算术平方根

B. $-\sqrt{2}$ 表示 2 的算术平方根

C. 2 的算术平方根记作 $\pm\sqrt{2}$

D. 2 是 $\sqrt{2}$ 的算术平方根

2. 求下列各数的算术平方根：

(1)900 ;

(2)1 ;

(3) $\frac{49}{64}$;

(4)14 .

3. $\sqrt{9}$ 的算术平方根是 ()

A. $\sqrt{3}$

B. 3

C. ± 3

D. -3

4. 若 $\sqrt{x-4} + (1-y)^2 = 0$, 则 $x+y =$ _____ .

知识点 2 算术平方根小数点移动问题

1.被开方数与算术平方根的数量关系

①我们知道, 如果 $x^2=a$, 那么 $(10x)^2=100a$. 这说明一个数扩大为原来的 10 倍, 它的平方就扩大为原来的 100 倍.

②反过来, 一个数扩大为原来的 100 倍, 它的算术平方根就扩大为原来的 10 倍.

一个数缩小为原来 $\frac{1}{100}$, 它的算术平方根就缩小为原来 $\frac{1}{10}$

2.算术平方根小数点移动规律

被开方数的小数点向右或者向左移动两位, 它的算术平方根的小数点相应地向右或者向左移动一位.

【即学即练】

1. 已知 $\sqrt{102.01} = 10.1$, 则 $\sqrt{1.0201} =$ _____ .

2. 已知 $\sqrt{15} \approx 3.873$, $\sqrt{1.5} \approx 1.225$, 则 $\sqrt{150} \approx$ ____ .

知识点 3 平方根

1.问题引入

①问 (题) : 已知一个数的平方等于 100, 那么这个数是多少?

②设 (未知数) : 设这个数是 x ,

③列 (方程) : 根据已知条件, 得 $x^2=100$.

转化: 因为 $10^2=100$, $(-10)^2=100$, 所以这个数是 10 或 -10.

等价于: 这实际上是“已知一个数的平方, 求这个数”的问题.

2.平方根

①平方根: 一般地, 如果一个数 x 的平方等于 a , 即 $x^2=a$, 那么这个数 x 叫作 **a 的平方根**, 也称为**二次方根**. a 叫作**被开方数**.

②开平方: 求一个数 a 的平方根的运算叫作**开平方**. 例如, 求 64 的平方根, 就是要对 64 进行开平方运算, 64 是被开方数.

开平方与平方互为逆运算.

3.平方根的特点

①正数有两个平方根，它们互为相反数，其中正的平方根就是这个数的算术平方根；

②0的平方根是0；

③负数没有平方根.

4.平方根的表示

正数 a 的两个平方根可以用符号“ $\pm\sqrt{a}$ ”表示.其中，“ $+\sqrt{a}$ ”表示 a 的正的平方根，即 a 的算术平方根；“ $-\sqrt{a}$ ”表示 a 的负的平方根，读作“负根号 a ”.

0 的平方根记为“ $\sqrt{0}$ ”， $\sqrt{0}=0$.

思考：根据一个数的算术平方根可以写出它的负的平方根吗？为什么？

可以；因为正数有两个平方根，它们互为相反数，其中正的平方根就是这个数的算术平方根，那么他的负的平方根就是这个数的算术平方根的相反数。

【即学即练】

1. 下列说法错误的是 ()

A. 4 是 16 的一个平方根

B. 81 的平方根是 ± 9

C. -5 是 25 的一个平方根

D. 25 的平方根是 5

2. 下列各数： $0, (-3)^2, -(-2), -|-5|, 3.14-\pi, x^2+1, |a|-1$ ，其中一定有平方根的数有 ()

A. 3 个

B. 4 个

C. 5 个

D. 6 个

3. $\pm\sqrt{25} =$ _____.

4. 16 的平方根是_____.

5. 若一个正数的两个平方根分别是 $2m-4$ 和 $6-m$ ，则这个正数是_____.

6. 求下列各式中 x 的值.

(1) $x^2 = 361$;

(2) $81x^2 - 49 = 0$;

(3) $49(x^2 + 1) = 50$;

$$(4)(3x-1)^2 = (-5)^2.$$

知识点 4 平方根和算术平方根的区别与联系

1.区别：(1) 定义不同；(2) 结果不同： $\pm\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{a}$

2.联系：(1) 平方根包含算术平方根；

(2) 被开方数都是非负数；

(3) 0 的平方根和算术平方根均为 0.

要点：(1) 正数的平方根有两个，它们互为相反数，其中正的那个叫它的算术平方根；负数没有平方根.

(2) 正数的两个平方根互为相反数，根据它的算术平方根可以立即写出它的另一个平方根.因此，我们可以利用算术平方根来研究平方根.

3.算术平方根等于它本身的数是 0 或 1；平方根等于它本身的数是 0.

*4.平方根的性质

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

【即学即练】

1. 下列说法正确的是 ()

A. -4 的平方根是 ± 2

B. -4 的算术平方根是 -2

C. $\sqrt{16}$ 的平方根是 ± 4

D. 0 的平方根与算术平方根都是 0

2. $\sqrt{81}$ 的平方根是 ()

A. 9

B. 9 和 -9

C. 3

D. 3 和 -3

题型精讲

题型 01 求算术平方根

【典例 1】 求下列各数的算术平方根：

(1) 121；

(2) 1.44；

(3) $\frac{16}{49}$ ；

(4) $2\frac{34}{81}$.

【变式1】 . 求下列各数的算术平方根 .

(1)64 ;

(2)0.16 ;

(3) $\frac{36}{25}$;

(4) $(-9)^2$.

【变式2】 . $(-4)^2$ 的算术平方根是_____ ; $\sqrt{256}$ 的算术平方根是_____ .

题型 02 算术平方根的概念辨析

【典例1】 . “16 的算术平方根”这句话用数学符号表示为 ()

A . $\pm\sqrt{16}$

B . $\sqrt{16}$

C . $\sqrt{4}$

D . $\pm\sqrt{4}$

【变式1】 . 下列说法正确的是 ()

A . $\sqrt{5}$ 表示 5 的算术平方根

B . $-\sqrt{3}$ 表示 3 的算术平方根

C . 2 的算术平方根为 $\pm\sqrt{2}$

D . 16 是 4 的算术平方根

【变式2】 . 下列说法正确的是 ()

A . 7 是 49 的算术平方根

B . ± 4 是 16 的算术平方根

C . -6 是 $(-6)^2$ 的算术平方根

D . 0.01 是 0.1 的算术平方根

题型 03 求平方根

【典例1】 . 下列各数的平方根 :

(1)64 ;

(2) $\frac{49}{121}$;

(3)0.0004 ;

(4) $(-25)^2$;

(5)11 .

【变式1】 . $(1)^9$ 的平方根等于_____ ; $(2)^6\frac{1}{4}$ 的平方根是_____ ; $(3)^{\frac{16}{25}}$ 的平方根是_____ .

题型 04 利用平方根解方程

【典例 1】. 求下列各式中 x 的值 .

$$(1) 3x^2 - \frac{1}{3} = 0 ;$$

$$(2) 5(x-1)^2 = \frac{9}{5} ;$$

$$(3) 2(x^2 + 1) = 5.38 .$$

【变式 1】. 求下列各式中的 x 值 :

$$(1) 25x^2 - 9 = 0 ; \quad (2) (x+2)^2 = 2 ; \quad (3) 25(x-1)^2 - 64 = 0 ;$$

$$(4) 4(1+x)^2 = 49 ; \quad (5) 54 - 9(3+2x)^2 = 0 .$$

【变式 2】. 求下列各式中 x 的值 .

$$(1) x^2 = 361 ;$$

$$(2) 81x^2 - 49 = 0 ;$$

$$(3) 49(x^2 + 1) = 50 ;$$

$$(4) (3x-1)^2 = (-5)^2 .$$

题型 05 平方根中被开方数的取值范围

【典例 1】. 下列各数中没有平方根的是 ()

A . π

B . 2.3

C . 0

D . -1

【变式 1】. 下列各数中一定没有平方根的是 ()

A . $-m$

B . $m+2$

C . $-m^2 - 6$

D . $-m^2$

【变式 2】. 若数字 a 有两个平方根, 则 a 一定是 ()

A . 正数

B . 负数

C . 整数

D . 分数

题型 06 平方根的概念辨析

【典例 1】. 求 $\frac{4}{25}$ 的平方根, 下列式子正确的是 ()

A . $\sqrt{\frac{4}{25}} = \pm \frac{2}{5}$

B . $\pm \sqrt{\frac{4}{25}} = \pm \frac{2}{5}$

C . $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$

D . $\pm \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$

【变式1】 . 下列说法错误的是 ()

- A . 4 是 16 的一个平方根 B . 81 的平方根是 ± 9
C . -5 是 25 的一个平方根 D . 25 的平方根是 5

【变式2】 . 下列说法正确的是 ()

- A . $2\frac{1}{2}$ 是 $4\frac{1}{4}$ 的平方根 B . 0.2 是 0.4 的平方根
C . -2 是 -4 的平方根 D . $\sqrt{2}$ 是 $\sqrt{4}$ 的平方根

【变式3】 . 下列说法正确的是 ()

- A . 可以平方的数一定也可以开平方 B . 平方根有负数，所以负数有平方根
C . 把 4 开平方得到的结果为 ± 2 D . $-a$ 没有平方根

【变式4】 . 下列说法正确的是 ()

- A . 只有正数才有平方根
B . 负数没有平方根
C . 1 的平方根是它本身
D . -9 的平方根是 ± 3

【变式5】 . 下列叙述中，正确的是 ()

- A . 正数 a 的平方根是 $\sqrt{a}$ B . $(-a)^2$ 的平方根是 $-a$
C . 一个数总有两个平方根 D . $-a$ 是 a^2 的一个平方根

【变式6】 . 下列命题：①只有正数才有平方根；②-2 是 4 的一个平方根；③ 5 的平方根是 $\sqrt{5}$ ；④ $\pm\sqrt{3}$ 是 3 的平方根；⑤ $(-2)^2$ 的平方根是 -2；⑥ -3^2 的平方根是 ± 3 . 其中正确的是 ()

- A . ①②④ B . ②⑤ C . ③④⑥ D . ②④

题型 07 算术平方根与平方根的运算 (数学符号型)

【典例1】 . 下列计算正确的是 ()

- A . $\sqrt{16} = \pm 4$ B . $\sqrt{0.04} = 0.2$ C . $\sqrt{4} = -2$ D . $\sqrt{\frac{169}{81}} = \frac{9}{13}$

【变式1】 . 下列选项中，正确的是 ()

A . $\sqrt{16} = \pm 4$ B . $\pm\sqrt{25} = 5$ C . $\pm\sqrt{27} = \pm 3$ D . $-\sqrt{64} = -8$

【变式 2】 . $\sqrt{\frac{4}{9}}$ 的相反数为 ()

A . $-\frac{4}{9}$ B . $\frac{2}{3}$ C . $-\frac{2}{3}$ D . $\frac{2}{3}$

【变式 3】 . 下列计算正确的是 ()

A . $\sqrt{-49} = -7$ B . $\sqrt{49} = \pm 7$
C . $\sqrt{(-49)^2} = 49$ D . $\pm\sqrt{49} = 7$

【变式 4】 . 下列式子错误的是 ()

A . $\pm\sqrt{0.09} = \pm 0.3$ B . $\sqrt{0.25} = \pm 0.5$
C . $-\sqrt{121} = -11$ D . $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$

【变式 5】 . 求下列各式的值：

(1) $-\sqrt{196}$;
(2) $\pm\sqrt{\frac{25}{4}}$;
(3) $\sqrt{2-1.75}$;
(4) $\pm\sqrt{(-8)^2}$.

题型 08 已知一个数的平方根，求这个数

【典例 1】 . 若一个正数 m 的平方根为 $3a-6$ 和 $10-4a$ ，则 m 的值是 ()

A . 4 B . 6 C . 16 D . 36

【变式 1】 . 若一个正数的两个平方根分别是 $a+3$ 和 $a-5$ ，则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$

【变式 2】 . 若一个正数的两个不同的平方根是 $5x+12$ 与 $8-x$ ，则这个正数为 .

题型 09 算术平方根的估算

【典例 1】 . 估计 $\sqrt{30}$ 的值在 () .

A . 6 与 7 之间 B . 5 与 6 之间 C . 4 与 5 之间 D . 3 与 4 之间

【变式1】. 估计 $\sqrt{5}+1$ 的值应在 ()

- A. 3和4之间 B. 4和5之间 C. 5和6之间 D. 6和7之间

题型10 算术平方根的非负性

【典例1】. 若 $\sqrt{2y-1}$ 与 $\sqrt{1-3x}$ 互为相反数, 则 $x=$ _____, $y=$ _____.

【变式1】. 若 $\sqrt{1-2a}+\sqrt{3b+a}=0$, 则 $a+b$ 的值等于_____.

【变式2】. 如果 $\sqrt{x-4}+(y+6)^2=0$, 那么 $2x-y$ 的平方根为_____.

题型11 利用算术平方根与平方根求参数

【典例1】. 已知 $a-3$ 的算术平方根是2, 5是 $2a+3b-4$ 的算术平方根, 求 $\sqrt{3a-2b-2}$ 的值.

【变式1】. 已知 $2x-1$ 的平方根是 ± 6 , $2x+y-1$ 的算术平方根是5, 求 $2x-3y+11$ 的平方根.

【变式2】. 已知 $2a-2$ 的平方根是 ± 3 , $3a+b-1$ 的算术平方根是4, 求 $a+2b$ 的值.

【变式3】. 若一个自然数的算术平方根是 x , 则它的下一个自然数的算术平方根是 ()

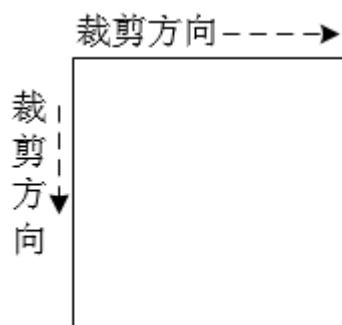
- A. $x+1$ B. x^2+1 C. $\sqrt{x^2+1}$ D. $\sqrt{x}+1$

题型12 算术平方根、平方根的实际应用

【典例1】. 一个正方形的面积扩大为原来的 a 倍, 则它的边长扩大为原来的_____倍.

【变式1】. 已知自由下落物体的高度 h (单位: m)与下落时间 t (单位: s)的关系式是 $h=4.9t^2$, 现有一物体从78.4m的高楼自由落下, 求它到达地面需要的时间.

【变式2】. 如图, 小明打算用一块面积为 900cm^2 的正方形木板沿着边的方向裁出一个面积为 768cm^2 的长方形桌面, 桌面的长、宽之比为4:3, 你认为他能做到吗? 如果能, 请计算出桌面的长和宽; 如果不能, 请说明理由.



题型13 小数点移动问题; 规律题

【典例1】. 若 $\sqrt{6.25} = 2.5$, $\sqrt{62.5} = 7.906$, 则 $\sqrt{6250} =$ _____ .

【变式1】. 已知 $\sqrt{23.6} \approx 4.858$, $\sqrt{2.36} \approx 1.536$, 则 $\sqrt{236000} \approx$ ()

- A . 485.8 B . 48.58 C . 153.6 D . 1536

【变式2】. 根据下列表格, 估计 $\sqrt{2.65}$ 的大小 ()

x	1.61	1.62	1.63	1.64	1.65
x^2	2.5921	2.6244	2.6569	2.6896	2.7225

- A . 在 1.61~1.62 之间 B . 在 1.62~1.63 之间
C . 在 1.63~1.64 之间 D . 在 1.64~1.65 之间

【变式3】. 下列各式是求个位数为5的整数的算术平方根的运算： $\sqrt{225} = 15$ $\sqrt{625} = 25$,
 $\sqrt{1225} = 35$ $\sqrt{2025} = 45$ $\sqrt{3025} = 55$ $\sqrt{4225} = 65 \cdots \cdots$, 观察这些运算都有规律, 试利用该规律直接写出
 $\sqrt{99900025}$ 运算的结果为_____ .

强化训练

一、单选题

1 . “ $\frac{4}{25}$ 的平方根是 $\pm \frac{2}{5}$ ” , 用式子来表示就是 ()

- A . $\pm \sqrt{\frac{4}{25}} = \pm \frac{2}{5}$ B . $\pm \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$ C . $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$ D . $\sqrt{\frac{4}{25}} = \pm \frac{2}{5}$

2 . 用式子表示“9 的平方根等于 ± 3 ” 正确的是 ()

- A . $\sqrt{9} = -3$ B . $\sqrt{9} = 3$ C . $\sqrt{9} = \pm 3$ D . $\pm \sqrt{9} = \pm 3$

3 . $\frac{1}{4}$ 的算术平方根是 ()

- A . $\pm \frac{1}{16}$ B . $\frac{1}{16}$ C . $\pm \frac{1}{2}$ D . $\frac{1}{2}$

4 . 下列说法正确的是 () .

- A . 4 是 $\sqrt{16}$ 的算术平方根 B . 0 的算术平方根是 0
C . -2 是 $(-2)^2$ 算术平方根 D . -4 的算术平方根是 -2

5. 下列各数 13 , π , 0 , -4 , $(-3)^2$, -3^2 , $-|-3|$, $-(-3)$, $3.14-\pi$ 中有平方根的个数为 () .

- A . 2 个 B . 4 个 C . 5 个 D . 7 个

6. 一个数的算术平方根是它本身, 则这个数是 ()

- A . -1 , 0 或 1 B . 1 C . -1 或 1 D . 0 或 1

二、填空题

7. $(-3)^2$ 的平方根是_____ .

8. 如果一个数的算术平方根是 $\sqrt{10}$, 则这个数是_____ , 它的平方根是_____ .

9. 下列说法: ① -0.3 是 0.09 的平方根; ② 只有正数才有平方根; ③ -4 是 -16 的平方根; ④ $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ 的平方根

是 $\pm\frac{2}{5}$. 正确的是_____ . (写序号)

10. 若 x 是最大的负整数, y 是最小的正整数, z 是平方根等于本身的数, 则 $x-y-z$ 的值是_____ .

三、解答题

11. 求下列各式的值:

(1) $\sqrt{49}$;

(2) $\sqrt{\frac{25}{196}}$;

(3) $\sqrt{0.09}$;

(4) $-\sqrt{64}$.

12. 求下列各式的值 .

(1) $\pm\sqrt{400}$;

(2) $-\sqrt{1.96}$;

(3) $\sqrt{1\frac{15}{49}}$;

(4) $\sqrt{(-0.3)^2}$.

13. 求下列各式中 x 的值 .

(1) $2x^2 - 8 = 0$;

(2) $(x-1)^2 = 36$.

14 . 解答题 .

(1) 一个正数 a 的平方根是 $2x-4$ 与 $3-x$, 则 a 是多少 ?

(2) 已知 a 、 b 满足 $\sqrt{2a+8} + |b-\sqrt{3}| = 0$, 求 $a+2b^2$ 的平方根

15 . 当 x 为何值时 , $\sqrt{2x+1}+6$ 有最小值 , 最小值为多少 ?

16 . 某农场有一块用铁栅栏围墙围成的面积为 600 平方米的长方形空地 , 长方形长宽之比 3: 2 .

(1) 求该长方形的长宽各为多少 ?

(2) 农场打算把长方形空地沿边的方向改造出两块不相连的正方形试验田 , 两个小正方形的边长比为 4^3 ,

面积之和为 500 平方米 , 请问能改造出这样的两块不相连的正方形试验田吗 ? 并说明理由 ($\sqrt{20} \approx 4.472$) .