

专题 01 等腰直角三角形中的几何模型

题型归纳

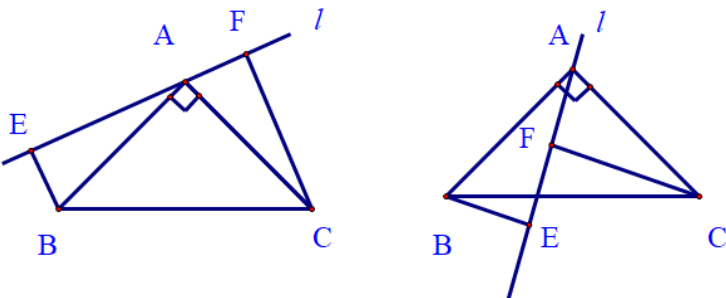
题型一：一线三垂直

题型二：手拉手旋转型

题型三：半角模型

题型专练

题型 01 一线三垂直

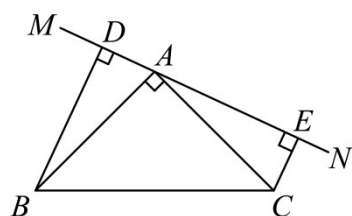


基本模型

$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，直线 l 经过点 A ， $BE \perp l$ ， $CF \perp l$ ，
 则 $\triangle CAF \cong \triangle ABE$ ，
 $EF = CE + BF$ 或 $EF = |CF - BE|$

【典例 1】 如图所示，等腰直角三角形 ABC 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，直线 MN 经过点 A ， $BD \perp MN$

于点 D ， $CE \perp MN$ 于点 E 。

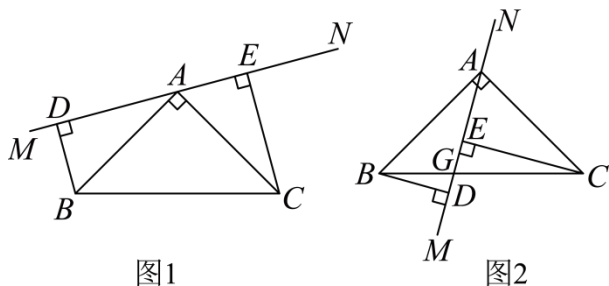


(1) 求证： $\angle ABD = \angle CAE$ ；

(2) 求证： $DE = BD + CE$ ；

【变式 1】 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$ 。MN 是经过点 A 的直线，

$BD \perp MN$ 于 D， $CE \perp MN$ 于 E。

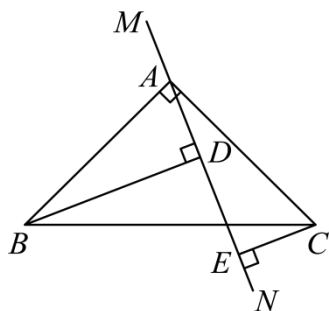


(1) 求证： $BD = AE$ 。

(2) 若将 MN 绕点 A 旋转，使 MN 与 BC 相交于点 G (如图 2)，其他条件不变，求证： $BD = AE$ 。

【变式 2】 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，MN 是经过点 A 的直线，

$BD \perp MN$ ， $CE \perp MN$ ，垂足分别为 D，E。

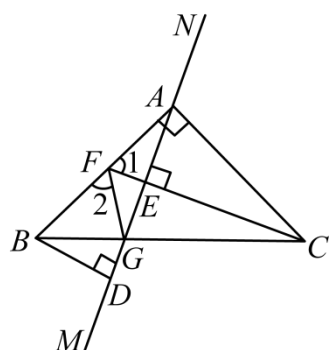


(1) 求证：① $\angle BAD = \angle ACE$ ；② $BD = AE$ ；

(2) 请写出 BD ， CE ， DE 三者间的数量关系式，并证明。

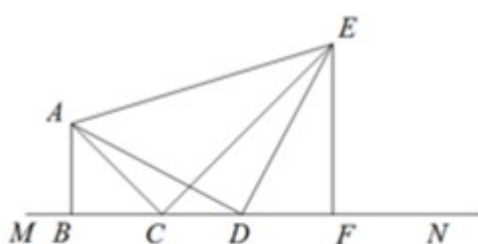
【变式3】 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ 。MN 是经过点 A 的直线， $BD \perp MN$ 于 D，

$CE \perp MN$ 于 E。若 CE 的延长线过 AB 的中点 F (如图³⁾，连接 GF，求证： $\angle 1 = \angle 2$ 。



【变式4】 如图，等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两个顶点 B，C 在直线 MN 上，点 D 是直线 MN 上一个动点 (点 D 在点 C

的右边)， $BC=3$ ， $BD=m$ ，在 $\triangle ABC$ 同侧作等腰 $\text{Rt}\triangle ADE$ ， $\angle ABC = \angle ADE = 90^\circ$ ， $EF \perp MN$ 于点 F，连结 CE。



①求 DF 的长；

②求证： $AC \perp CE$ 。

【变式5】 一条直线经过直角三角形的直角顶点，过直角三角形的另外两个顶点分别作这条直线的垂线，

这样满足三个直角顶点都在同一条直线上的图形称之为“一线三垂直”模型。

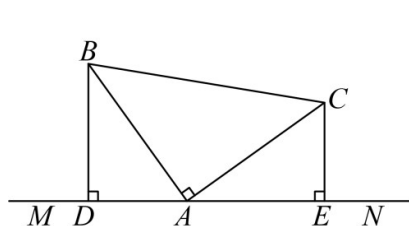


图 1

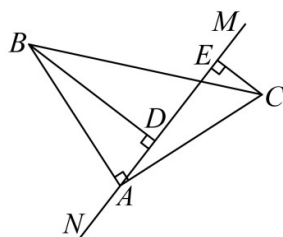


图 2

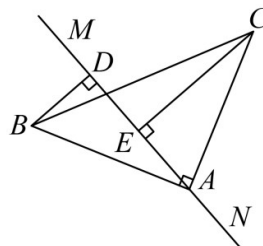


图 3

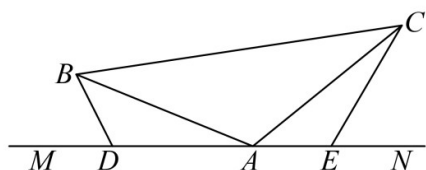


图 4

(1) 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 A 在直线 MN 上，过点 B 作 $BD \perp MN$ 于点 D ，过点

C 作 $CE \perp MN$ 于点 E ，由 $\angle DAB + \angle DBA = 90^\circ$ ， $\angle DAB + \angle CAE = 90^\circ$ 得 $\angle DBA =$ _____。又知道

$\angle BDA = \angle AEC$ ， $AB = AC$ ，可以推理得到 $\triangle ABD \cong \triangle CAE$ ，进而得到 $AD = CE$ ， $AE =$ _____。

(2) 当图 1 中的直线 MN 绕点 A 旋转到图 2 的位置时，求证： $DE = BD - CE$ 。

(3) 当图 1 中的直线 MN 绕点 A 旋转到图 3 的位置时，请直接写出 DE ， BD ， CE 之间的数量关系：

_____。

(4) 如图 4，若将 (1) 中的条件改为：在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D ， A ， E 三点都在直线 MN 上，且满足

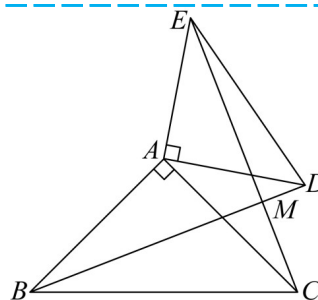
$\angle BDA = \angle BAC = \angle AEC = \alpha$ ，其中 α 为任意锐角或钝角，请问结论 $\triangle ABD \cong \triangle CAE$ 是否成立？若成立，请

给出证明；若不成立，请说明理由。

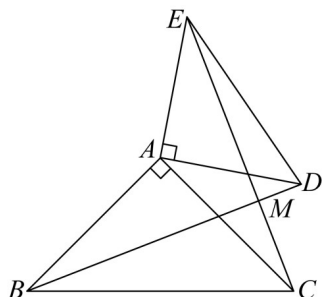
题型 02 手拉手旋转型

基本模型

$\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，连接 BD 、 CE ，
则 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，
 $BD = CE$ ， $BD \perp CE$



【典例 1】 如图，已知 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形且 $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ，连接 BD 、 CE ，
求证： $BD = CE$ ， $BD \perp CE$



【变式 1】 如图所示，等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ 。

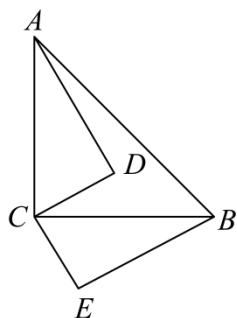


图1

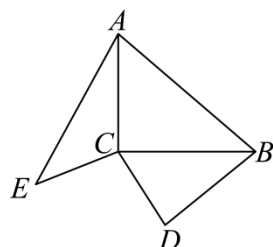
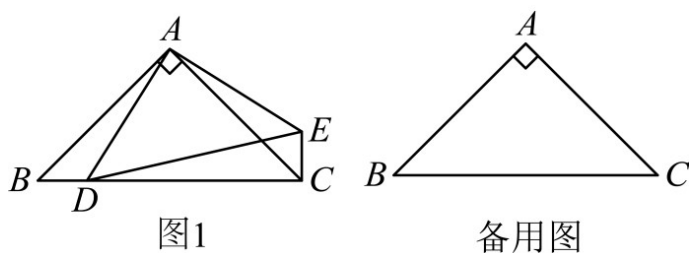


图2

- (1) 如图 1 所示，若 D 是 $\triangle ABC$ 内一点，将线段 CD 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 CE ，连接 AD ， BE ，猜想线段 AD 与 BE 的关系并说明理由；
- (2) 如图 2 所示，若 D 是 $\triangle ABC$ 外一点，将线段 CD 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 CE ，上述结论是否还成立？

【变式2】如图¹，在等腰直角三角形 ABC 中， $AB=AC$ ， $\angle BAC=90^\circ$ ，点 D 在 BC 边上，连接 AD ，

$AE \perp AD$ ， $AE=AD$ ，连接 CE ， DE 。



(1)求证： $\angle B = \angle ACE$ ；

(2)点 A 关于直线 CE 的对称点为 M ，连接 CM ， EM 。

①补全图形并证明 $\angle EMC = \angle BAD$ ；

②试探究，当 D ， E ， M 三点恰好共线时， $\angle BAD$ 的度数为_____。

【变式3】【问题情境】它是由两个共顶点且顶角相等的等腰三角形构成。在相对位置变化的同时，始终

存在一对全等三角形。这种模型称为“手拉手模型”。如果把小等腰三角形的腰长看作是小手，大等腰三角

形的腰长看作大手，两个等腰三角形有公共顶点，类似大手拉着小手。

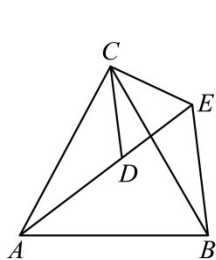


图1

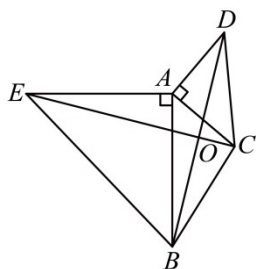


图2

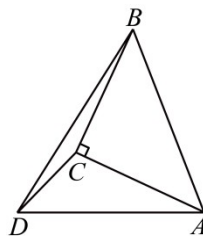


图3

【模型探究】（¹）如图1，若 $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形， $AB = AC = BC$ ， $CD = CE = DE$ ，

$\angle BAC = \angle ACB = \angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle CDE = \angle DCE = \angle CED = 60^\circ$ ，点A、D、E在同一条直线上，连接 BE ，

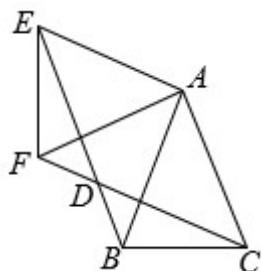
则 $\triangle CAD \cong$ _____；线段 $BE =$ _____；则 $\angle AEB$ 的度数为_____；

【探究证明】（²）如图2，已知 $\triangle ABC$ ，分别以AB、AC为直角边向 $\triangle ABC$ 两侧作等腰直角 $\triangle ABE$ 和等腰直角 $\triangle ACD$ ，其中 $\angle BAE = \angle CAD = 90^\circ$ ， $AB = AE$ ， $AC = AD$ ，连接CE、BD，线段CE和BD交于点O。

请判断线段CE和BD的关系，并说明理由；

【模型应用】（³）如图3，在 $\triangle ACD$ 中， $\angle ADC = 45^\circ$ ， $AD = 9.5$ ，将线段AC绕着点C逆时针旋转 90° 至线段BC，连接BD，则 $\triangle ABD$ 的面积为_____。

【变式4】如图，在等腰直角 $\triangle ACF$ 中， $AC = AF$ ， $\triangle ABE$ 是由 $\triangle ACF$ 绕点A按顺时针方向旋转得到的，连接EF、BC。



(1) 求证： $EF = BC$ ；

(2) 当旋转角为 40° 时，求 $\angle BCF$ 的度数 ．

【变式 5】 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB$ 为锐角，点 D 为射线 BC 上一点，连接 AD ，以 AD 为一边且在

AD 的右侧作等腰直角 $\triangle ADF$ ， $\angle DAF = 90^\circ$ ， $AD = AF$ ．

(1) 如果 $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，

① 当点 D 在线段 BC 上时（与点 B 不重合），如图 2，线段 CF ， BD 所在直线的位置关系为——，线段

CF ， BD 的数量关系为——；

② 当点 D 在线段 BC 的延长线上时，如图 3，①中的结论是否仍然成立，并说明理由；

(2) 如果 $AB \neq AC$ ， $\angle BAC$ 是锐角，点 D 在线段 BC 上， $CF \perp BC$ 能成立吗？若不能，说明理由，若能，

直接写出 $\angle ACB$ 的度数 ．

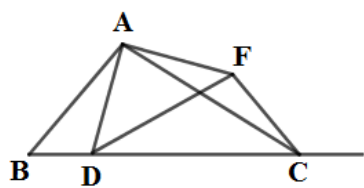


图1

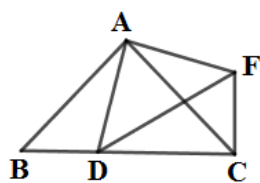


图2

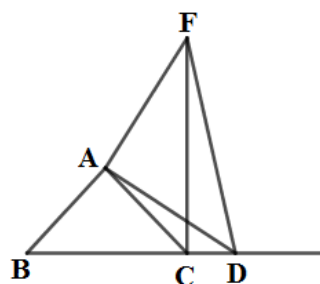
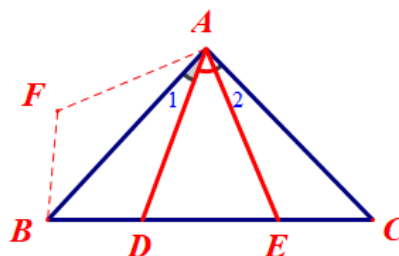


图3

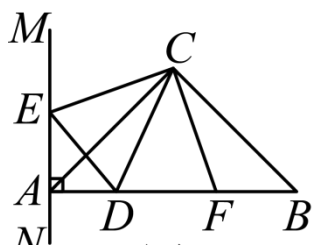
题型 03 半角模型

基本模型

$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle DAE = 45^\circ$ ，将 AE 绕点 A 顺时针旋转 90° ，
则 $\triangle ABF \cong \triangle ACE$ ，
 $\angle FAD = \angle DAE = 45^\circ$



【典例 1】 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BCA = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，动点 D 、 F 在 AB 上，且 $\angle DCF = 90^\circ$ ，过点 A 作 $MN \perp AB$ ，过点 C 作 $CE \perp CF$ ， CE 交直线 MN 于点 E ，连接 DE 。



求证： $AE=BF$ ；

【变式1】如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle BCA=90^\circ, AC=BC$ ，过点 A 作 $MN \perp AB$ ，点 D 在 AB 上（不与点 A, B 重合），作 $\angle DCE=45^\circ$ ， $\angle DCE$ 的边 CE 交直线 MN 于点 E ，连接 DE 。

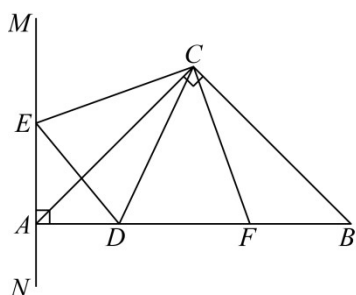


图 1

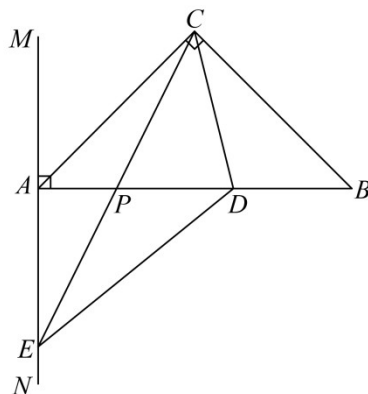


图 2

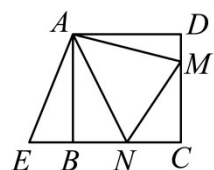
(1)如图 1，当点 E 在射线 AM 上时，作 $CF \perp CE$ ， CF 交 AB 于点 F ，求证： $\triangle ACE \cong \triangle BCF$ ；

(2)如图 2，当点 E 在射线 AN 上时，写出线段 AE, DE, BD 之间的数量关系，并说明理由；

【变式2】【探索发现】如图，四边形 $ABCD$ 是正方形， M, N 分别在边 CD, BC 上，且 $\angle MAN=45^\circ$ ，我

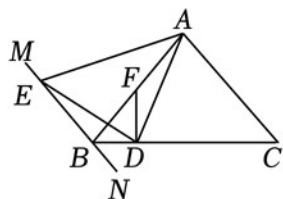
们把这种模型称为“半角模型”，在解决“半角模型”问题时，旋转是一种常用的方法．如图①，将 $\triangle ADM$ 绕

点 A 顺时针旋转 90° ，点 D 与点 B 重合，得到 $\triangle ABE$ ，连接 AM, AN, MN



试判断 DM, BN, MN 之间的数量关系，并写出证明过程．

【变式3】 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，过点 B 的直线 $MN \parallel AC$ ， D 为直线 BC 上的一点（不与点 B 重合），连结 AD ，过点 D 作 $DE \perp AD$ 交 MN 于点 E ，连结 AE 。



当点 D 在线段 BC 上时，过点 D 作 $DF \perp BC$ 交 AB 于点 F ，已知 $\angle ABC = 45^\circ$ ，求证： $AD = DE$ ；

【变式4】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，点 D 、 E 在 BC 上的动点，且 $\angle DAE = 60^\circ$ ，过点 B 作

$BF \perp CA$ 交 CA 延长线于点 F ，延长 AD 、 FB 交于点 P ，连接 PE ，探究：线段 PE 、 PB 、 EC 的数量关系。

