

专题 01 简单的代数式 压轴题

题型归纳

题型一：一次式的加减

题型二：阅读材料题

题型三：一次式加减的实际应用

题型四：一次式加减的几何应用

题型五：新定义题

题型六：数轴问题

题型七：日历、条形码问题

题型八：阶方；宫格问题

题型专练

题型一：一次式的加减

1. 合并同类项 $m - 3m + 5m - 7m + \cdots - 2023m$ 的结果为 ()

A. 0

B. $-1012m$

C. m

D. 无法确定

2. 现有一列数 $m_1, m_2, m_3, \dots, m_{2020}$, 其中 $m_1 = -3, m_2 = -1$, 且 $m_n + m_{n+1} + m_{n+2} = 1$ (n 为正整数), 则

$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_{2020} =$ _____.

3. 数学活动课上, 小海利用列表法研究一次式 $3x - 6$ 、 $-3x - 6$ 的值随着 x 的取值的变化情况.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
$3x - 6$	...	-18	-15	-12	-9	m	-3	0	...
$-3x - 6$	...	6	3	0	-3	-6	-9	-12	...

根据表格, 完成下列问题:

(1) 表格中的 $m =$ _____;

(2) 从表格中可以发现, 当 x 的取值增大时, 一次式 $3x - 6$ 的值_____ (填“增大”、“不变”或“减小”), 一次

式 $-3x-6$ 的值——（填“增大”、“不变”或“减小”）；

(3) 小海在研究时，得到这样一个结论：“当 x 的值每增加 1 时，一次式 $3x-6$ 减去一次式 $-3x-6$ 的差就增加 6”，你同意小海的结论吗？请利用所学知识说明理由。

题型二：阅读材料题

4. 已知 $x > y > z > 0 > m > n$ ，对一次式 $x-y+z-m-n$ ，任意添加绝对值运算（不可添加为单个字母的绝对值或绝对值中含有绝对值的情况）后，称这种操作为“绝对操作”。例如： $|x-y|+z-m-n$ ， $x-|y+z|-|m-n|$ ， $x-y+|z-m-n|$ 等。对一次式进行“绝对操作”后，可进一步对其进行运算。下列说法其中正确的个数是（ ）

- ① 存在八种“绝对操作”，使其化简的结果与原一次式相等；
- ② 不存在任何“绝对操作”，使其运算结果与原一次式之和为 0；
- ③ 所有的“绝对操作”共有 7 种不同的结果。

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 在一次式 $-a-(b+c)-d$ （其中 $a > b > c > d$ ）中，对每个字母及其左边的符号（不包括括号外的符号）称为一个数，即： $-a$ 为“数 1”， b 为“数 2”， $+c$ 为“数 3”， $-d$ 为“数 4”，若将任意两个数交换位置，后得到一个新一次式，再写出新一次式的绝对值，这样的操作称为对一次式 $-a-(b+c)-d$ 的“绝对换位变换”，例如：对上述一次式的“数 3”和“数 4”进行“绝对换位变换”，得到 $|-a-(b-d)+c|$ ，将其化简后结果为 $a+b-c-d$ ，...。下列说法：

- ① 对一次式的“数 1”和“数 2”进行“绝对换位变换”后的运算结果一定等于对“数 3”和“数 4”进行“绝对换位变换”后的运算结果；
- ② 不存在“绝对换位变换”，使其运算结果与原一次式相等；
- ③ 所有的“绝对换位变换”共有 5 种不同运算结果。

其中正确的个数是（ ）

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6. 已知代数式 $A = a+b+c$ ， $B = a-b-c$ ，在代数式 A 中，任取两项与代数式 B 中任意两项进行替换，A、B 替换后的结果分别记作 A_1 、 B_1 ，这样的替换称做一次“替换运算”。例如：在代数式 A 中选取第一项和第三

项 $a+c$ 与代数式 B 中的第一项和第三项 $a-c$ 进行替换，得到 $A_1 = a+b-c, B_1 = a-b+c$ ；再选取 A_1 中的第一项和第三项 $a-c$ 与代数式 B_1 中的第二项和第三项 $-b, c$ 进行替换，得到 $A_2 = c, B_2 = 2a-c, \dots$ ，对代数式 A, B 进行 n 次“替换运算”，替换后的结果记作 A_n, B_n ，当 A_n, B_n 的项数小于两项时，则替换停止。下列说法：

- ①存在“替换运算”，使得 $A_1 + B_1 = 2a + b$ ；
- ②当 $A_n = a$ 时， n 的最小值为 1；
- ③所有的 A_1 共有 8 种不同的运算结果。

其中正确的个数是 ()

- A . 0 B . 1 C . 2 D . 3

7. 对于一次式： $2x-6, 3x-2, 4x-1, 5x+3$ ，我们用任意两个一次式求差后所得的结果，再与剩余两个一次式的差作减法运算，并算出结果，称之为“双减操作”例如： $2x-6-(4x-1) = -2x-5$ ，
 $5x+3-(3x-2) = 2x+5$ ， $-2x-5-(2x+5) = -4x-10$ ，

给出下列说法：

- ① x 为任意整数时，所有“双减操作”的结果都能被 2 整除；
- ②至少存在一种“双减操作”，使其结果为 $2x-8$ ；
- ③所有的“双减操作”共有 5 种不同的结果。

以上说法中正确的有 ()

- A . 3 个 B . 2 个 C . 1 个 D . 0 个

题型三：一次式加减的实际应用

8. 某市居民使用自来水按如下标准收费（水费按月缴纳）：

户月用水量	单价
不超过12m³的部分	a 元 / m³
超过12m³ 但不超过 20m³ 的部分	$1.5a$ 元 / m³
超过 20m³ 的部分	$2a$ 元 / m³

- (1) 当 $a = 2$ 时，某用户一个月用了 16m^3 水，求该用户这个月应缴纳的水费。
- (2) 设某户月用水量为 n 立方米，当 $n > 20$ 时，则该用户应缴纳的水费。（用含有 a 、 n 的整式表示）。
- (3) 当 $a = 2$ 时，甲、乙两用户一个月共用水 40m^3 ，已知甲用户缴纳的水费超过了 24 元，设甲用户这个月用水 $x\text{m}^3$ ，试求甲、乙两用户一个月共缴纳的水费（用含 x 的整式表示）。

9. 为了加强公民的节水意识，合理利用水资源，某市采用价格调控手段达到节水的目的，该市自来水收费标准（按月结算）如表所示：

每月用水量	单价
不超出 6m^3 的部分	2 元/ m^3
超出 6m^3 不超出 10m^3 的部分	4 元/ m^3
超出 10m^3 的部分	8 元/ m^3

例如：若某户居民 1 月份用水 8m^3 ，则应收水费： $2 \times 6 + 4 \times (8 - 6) = 20$ （元）。

- (1) 若该户居民 2 月份用水 12.5m^3 ，则应收水费 _____ 元。
- (2) 若该户居民 3 月份用水 $a\text{m}^3$ （其中 $6\text{m}^3 < a < 10\text{m}^3$ ），则应收水费多少元？（用含 a 的整式表示，并化简）
- (3) 若该户居民 4 月份用水 $x\text{m}^3$ ，4、5 两个月共用水 15m^3 ，且 5 月份用水超过 4 月份，请用含 x 的整式表示 4、5 两个月共交的水费多少元？

10. 水果批发市场梨的价格如下表：

购买梨（千克）	单价
不超过 10 千克的部分	6 元/千克
超过 10 千克但不超出 20 千克的部分	5 元/千克
超出 20 千克的部分	4 元/千克

- (1) 小明第一次购买梨 5 千克，需要付费 _____ 元；小明第二次购买梨 x 千克（ x 超过 10 千克但不超过 20 千克），需要付费 _____ 元（用含 x 的式子表示，并化成最简形式）；

(2)若小强买梨花了 54 元，则小强购买梨_____千克；若小强买梨花了 105 元，则小强购买梨_____千克；若小强买梨花了 130 元，则小强购买梨_____千克；

(3)小强分两次共购买 50 千克梨，且第一次购买的数量为 a 千克($0 < a \leq 20$)，请问小强两次购买梨共需要付费多少元？(用含 a 的式子表示)。

11. 学校 10 月 19 日举办体育文化艺术节活动，准备单色圆珠笔、双色圆珠笔、三色圆珠笔三种圆珠笔共 1000 支作奖励(每种圆珠笔都要有)，其中双色圆珠笔的单价比单色圆珠笔的单价贵 0.2 元，买 5 支双色圆珠笔和 8 支单色圆珠笔共需要 6.2 元。

(1)双色圆珠笔和单色圆珠笔的单价分别是多少元？

(2)若某超市的三色圆珠笔根据球珠直径有两个级别，学校只能从中选择一个级别。价格如下表：

三色圆珠笔级别	球珠直径 0.7mm	球珠直径 0.5mm
单价	1 元	1.5 元

现在学校用 880 元去购买这三种圆珠笔，且单色圆珠笔和三色圆珠笔的数量是相同的，应该选择哪种级别的三色圆珠笔比较合适？购买方案是什么？请说明理由。

(3)若要求购买三色圆珠笔的数量是单色圆珠笔的一半，单色圆珠笔和双色圆珠笔单价不变，其中三色圆珠笔单价为 a 元，在总数量不变的前提之下，无论这三种圆珠笔的数量如何分配，总费用始终不变。求此时 a 的值和总费用。

题型四：一次式加减的几何应用

12. 把四张形状大小完全相同的小长方形卡片(如图¹)，分两种不同形式不重叠的放在一个底面长为 m ，宽为 n 的长方形盒子底部(如图²，³)，盒子底面未被卡片覆盖的部分用阴影表示。设图²中阴影部分图形的周长为 l_1 ，图³中两个阴影部分图形的周长的和为 l_2 ，

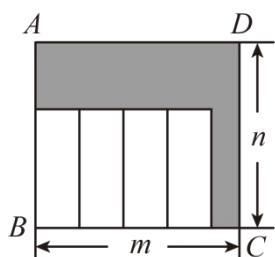


图1

图2

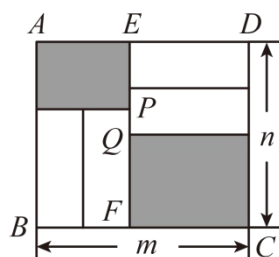


图3

(1) 用含 m, n 的式子表示图 2 阴影部分的周长 l_1

(2) 若 $l_1 = \frac{5}{4}l_2$, 求 m, n 满足的关系?

13. 阅读下面材料并解决问题:

两个数量的大小可以通过它们的差来判断, 如果两个数 a 和 b 比较大小, 那么, 当 $a > b$ 时, 有 $a - b > 0$; 当 $a = b$ 时, 有 $a - b = 0$; 当 $a < b$ 时, 有 $a - b < 0$; 反过来也对, 即当 $a - b > 0$ 时, 有 $a > b$; 当 $a - b = 0$ 时, 有 $a = b$; 当 $a - b < 0$ 时, 有 $a < b$.

因此, 我们经常把两个要比较的对象先数量化, 再求它们的差, 根据差的正负判断对象的大小. 像这样判断两数大小关系的方法叫做求差法, 请你用求差的方法解决以下问题:

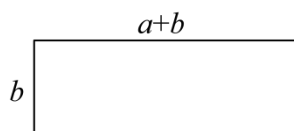


图1

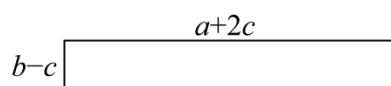


图2

(1) 若 $P = 2m + 3$, $Q = 2m - 1$, 则 $P - Q$ ____ 0, P ____ Q (填 $>$, $=$ 或 $<$);

(2) 如图, 图 1 长方形 I 的周长 $M =$ ____, 图 2 长方形 II 的周长 $N =$ ____, 用求差法比较 M, N 的大小;

(3) 制作某产品有两种用料方案, 方案一: 用 3 块 A 型钢板, 用 5 块 B 型钢板; 方案二: 用 2 块 A 型钢板, 用 6 块 B 型钢板. A 型钢板的面积比 B 型钢板的面积大. 设 A 型钢板和 B 型钢板的面积分别为 x 和 y , 从省料角度考虑, 应选哪种方案?

题型五：新定义题

14. 我们定义一种新运算, $a \wedge b \wedge c = \frac{1}{3}(|a - b - c| + a + b + c)$, 如

$$(-1) \wedge 2 \wedge 3 = \frac{1}{3}(|-1 - 2 - 3| + (-1) + 2 + 3) = \frac{10}{3}.$$

(1) 计算： $\frac{1}{2} \wedge 3 \wedge 4 =$ _____.

(2) 计算： $\left(-\frac{1}{3}\right) \wedge (-2) \wedge (-1) =$ _____.

(3) 在 $-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ 这11个数中，任取三个数作为 a, b, c 的值进行 $a \wedge b \wedge c$ 运算，求在所有计算结果中的最大值.

15. 定义：对任意一个两位数 a ，若 a 满足个位数字与十位数字互不相同，且都不为零，则称这个两位数为“相异数”，将一个“相异数”的个位数字与十位数字对调后得到一个新的两位数，把这个新两位数与原两位数的和与11的商记为 $f(a)$.

例如： $a = 12$ ，对调个位数字与十位数字得到新两位数 21 ，新两位数与原两位数的和为 $21 + 12 = 33$ ，和与11的商为 $33 \div 11 = 3$ ，所以 $f(12) = 3$. 根据以上定义，回答下列问题：

(1) 下列两位数：20，52，44中，“相异数”为_____；

(2) 如果“相异数” b 满足 $f(b) = 4$ ，直接写出所有“相异数” b 的值_____；

(3) 如果 m, n 都是“相异数”，且 $m + n = 100$ ，请判断 $f(m) + f(n) - 10$ 值是否为常数，并说明理由.

16. 阅读材料：对于任意一个两位数 x ，如果 x 满足个位数字与十位数字互不相同，且都不为零，那么我们称这个两位数为“迴异数”，将一个“迴异数”的个位数字与十位数字对调后得到一个新的两位数，把这个新两位数与原两位数的和与11的商记为 $f(x)$ ，例如： $x = 23$ ，对调个位数字与十位数字得到新的两位数32，新两位数与原两位数的和为 $23 + 32 = 55$ ，和与11的商为 $55 \div 11 = 5$ ，所以 $f(23) = 5$.

根据上述定义，回答下列问题：

(1) 填空：

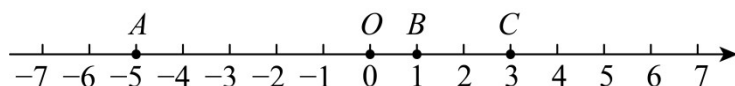
① 下列两位数26，66，54中，是“迴异数”的为_____；

② 计算 $f(17) =$ _____.

(2) 如果一个“迴异数” a 的十位数字是 m ，个位数字是 $2m + 3$ ，且 $f(a) = 12$ ，请求出“迴异数” a 的值.

题型六：数轴问题

17. 我国著名数学家华罗庚说过：“数缺形时少直观，形少数时难入微。”数形结合是解决数学问题的重要思想方法，研究数轴我们发现了很多重要的规律，例如：数轴上点 A ，点 B 表示的数分别为 a ， b ，则 A ， B 两点之间的距离 $AB = |a - b|$ 。如： $|5 - (-2)|$ 表示 5 与 -2 之差的绝对值，实际上也可理解为 5 与 -2 两数在数轴上所对的两点之间的距离。如图，数轴上点 A 表示的数为 -5，点 B 表示的数为 1



(1) 线段 AB 的长度是——，设点 P 在数轴上对应的数为 x ，若 $|x - 2| = 3$ ，则 $x =$ ——；

(2) ① 找出所有符合条件的整数 x ，使得 $|x + 4| + |x - 3| = 7$ ，这样的整数是——；

$|x + 2| - |x - 1|$ 的最大值为——；

② 由以上探索猜想：当 $x =$ ——时， $|x + 4| + |x + 1| + |x - 2|$ 的值最小，最小值为——；

(3) 如上图，一条笔直的公路边有三个居民区 A ， B ， C 和市民广场 O ，居民区 A ， B ， C 分别位于市民广场左侧 $5km$ ，右侧 $1km$ ，右侧 $3km$ 。居民区 A 有居民 1000 人，居民区 B 有居民 2000 人，居民区 C 有居民 3000 人。现因物流需要，需要在该公路上建菜鸟驿站，用于接收这 3 个小区的快递，若快递的运输成本为 1 元 / (千份·千米)，那么菜鸟驿站建在何处才能使总运输成本最低，最低成本是多少？

18. 数轴是一个非常重要的数学工具，它使数和数轴上的点建立起对应关系，揭示了数与点之间的内在联系，它是“数形结合”的基础。

初步尝试：

(1) 如果点 A 表示数 -3，将点 A 向右移动 7 个单位长度，那么终点 B 表示的数是——， A 、 B 两点间的距离是——；

(2) 如果点 A 表示数 3，将 A 点先向左移动 4 个单位长度，再向右移动 5 个单位长度，那么终点 B 表示的数是——， A 、 B 两点间的距离是——；

归纳一般：

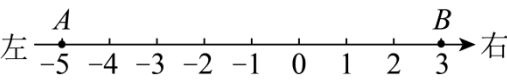
(3) 一般地，如果 A 点表示的数为 m ，将 A 点向右移动 n 个单位长度，再向左移动 p 个单位长度，请你猜想终点 B 表示的数是——， A 、 B 两点间的距离是——。

深入研究：

(4) 甲、乙两人借助数轴和“剪刀、石头、布”设计了一款“移动游戏”. 两人分别在数轴上挑选一个点作为游戏的起点：甲选择的游戏起点 A 表示的数是 -5 ，乙选择的游戏起点 B 表示的数是 3 ；然后两人进行“剪刀、石头、布”，移动规则如下：

“剪刀、石头、布”的结果	A 、 B 两点移动方式
平局	点 A 向右移动 0.5 个单位，点 B 向左移动 0.5 个单位
甲胜	点 A 向右移动 2 个单位，点 B 向右移动 1 个单位
乙胜	点 A 向左移动 1 个单位，点 B 向左移动 2 个单位

设甲、乙两人共进行了 k 次“剪刀、石头、布” (k 为正整数) .



- ①当 $k = 3$ 时，其中平局一次，甲胜一次，点 A 最终位置表示的数为——，点 B 最终位置表示的数为——，此时 A 、 B 两点间的距离为—— .
- ②当 $k > 8$ 时，其中平局 x 次，甲胜 y 次，点 A 最终位置表示的数为——，点 B 最终位置表示的数为——，此时 A 、 B 两点间的距离为—— (用含 x 、 y 、 k 的式子表示) .

题型七：日历、条形码问题

19. 把正整数 $1, 2, 3, 4, \dots$ ，排列成如图 1 所示的一个表，从上到下分别称为第 1 行、第 2 行、...，从左到右分别称为第 1 列、第 2 列、... . 用图 2 所示的方框在图 1 中框住表中的 16 个数，把其中没有被阴影覆盖的四个数分别记为 A 、 B 、 C 、 D .

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
...	...					

图 1

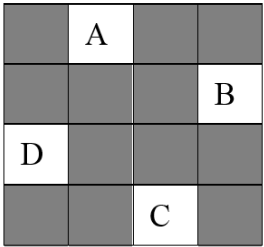


图 2

- (1)在图 1 中，2024 排在第_行，第_列；

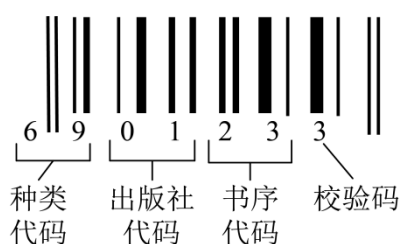
(2) $A - B + C - D$ 的值是否为定值？如果是，请求出它的值；如果不是，请说明理由；

(3) 若将图 1 中的偶数都改为原数的相反数，奇数不变．

① 设此时图 1 中排在第 m 行第 n 列的数 (m 为正奇数， n 为正整数) 为 w ，请用含 m 、 n 的式子表示 w ；

② 此时 $A - B + C - D$ 的值能否为 2020 ？如果能，请求出 A 所表示的数；如果不能，请说明理由．

20. 如图，某校的“图书码”共有 7 位数字，它是由 6 位数字代码和校验码构成，其结构分别代表“种类代码、出版社代码、书序代码和校验码”．



其中校验码是用来校验图书码中前 6 位数字代码的正确性．它的编制是按照特定的算法得来的．以上图为例，其算法为：

步骤 1：计算前 6 位数字中偶数位数字的和 a ，即 $a = 9 + 1 + 3 = 13$ ；

步骤 2：计算前 6 位数字中奇数位数字的和 b ，即 $b = 6 + 0 + 2 = 8$ ；

步骤 3：计算 $3a$ 与 b 的和 c ，即 $c = 3 \times 13 + 8 = 47$ ；

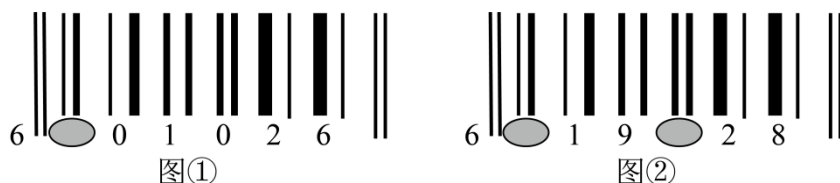
步骤 4：取大于或等于 c 且为 10 的整数倍的最小数 d ，即 $d = 50$ ；

步骤 5：计算 d 与 c 的差就是校验码 X ，即 $X = 50 - 47 = 3$ ．

请解答下列问题：

(1) 《数学故事》的图书码为 978753Y，则“步骤 3”中的 c 的值为——，校验码 Y 的值为——．

(2) 如图①，某图书码中的一位数字被墨水污染了，设这位数字为 m ，你能用只含有 m 的代数式表示上述步骤中的 d 吗？从而求出 m 的值吗？写出你的思考过程．



(3) 如图②，某图书码中被墨水污染的两个数字的差是 4，这两个数字从左到右分别是多少？请直接写出结果．

题型八：阶方；宫格问题

21. 综合与实践

阅读材料，解答下列问题：

幻方历史悠久，传说最早出现在夏禹时代的“洛书”，如图¹。把图¹的洛书用今天的数学符号翻译出来，就是一个三阶幻方，如图²，它的每行、每列、每条对角线上的三个数的和都相等。

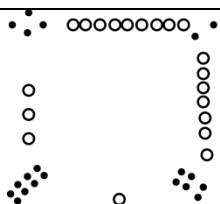


图1

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图2

$x+3$	$x-4$	
$x-2$	x	
$x-1$		$x-3$

图3

17	$2x$	
	$3x$	
$x+5$		

图4

- (1)在图²中，每行、每列、每条对角线上三个数的和都是——；
- (2)设图³所示的三阶幻方中间的数为 x (x 为整数)，请用含 x 的代数式将图³幻方补充完整；
- (3)如图⁴是一个三阶幻方，按方格中已给的信息，求 x 的值。

22. 三阶幻方是最基础的幻方，又叫九宫格，要求由连续的九个整数组成一个三行三列的数阵，其对角线、横行、纵行的和都相等。

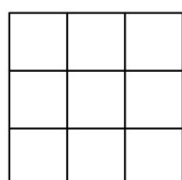


图1

a		
		c
	b	

图2

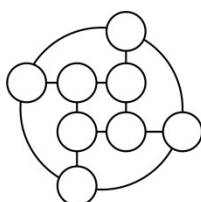
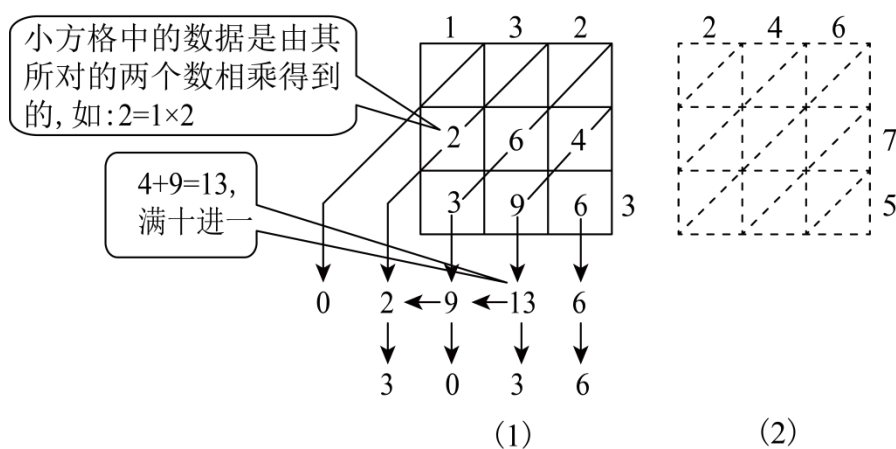


图3

- (1)如图¹，请用¹⁻⁹这九个整数填写幻方数阵；
- (2)如图²，一数学兴趣小组的同学发现，对于三阶幻方，任何一个角上的数（如数 a ）都等于与这个数不在同一横行、竖列及对角线上的两个数（如数 b 、 c ）之和的一半，即 $a = \frac{1}{2}(b+c)$ ，你认为他们的发现正确吗？说你的道理；
- (3)如图³，一数学兴趣小组的同学研究了一个变形幻方，要求填入¹⁻⁸这⁸个整数，使每一横行（³个数）、每一纵行（³个数）以及里面⁴个数的和都相等，请你填写出这⁸个数。（填写¹种情况即可）

23. 问题的提出：“铺地锦”是我国古代一种乘法运算方法，可将多位数乘法运算转化为一位数乘法和简单的加法运算．图（1）表示 132×23 ，运算结果为3036．

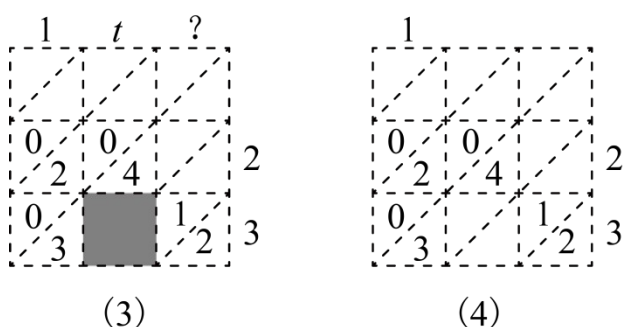


（1）用示例的方法，计算 246×75 ，要求在图（2）中对应位置标数．

问题的拓展：

（2）如图（3）一个百位为1的三位数，十位和个位数字未知，与 23 相乘，请直接写出 t 与？的值；

（3）在图（4）中按图（1）示例完成（2）的计算．



延伸与运用：

（4）图（5）表示一个三位数 xyz 与一个两位数 mn 相乘，表格中部分数据被墨迹覆盖，根据图（5）中现有数据进行推断，运算结果可以用含 a 的式子表示为_____．（直接写出结果）

