

第19章 实数 单元测试卷·提升卷

(考试时间：100分钟 试卷满分：150分)

一、选择题：(本大题共10题，每题4分，共40分.下列各题四个选项中，有且只有一个选项是正确的.)

1. 下列说法中，正确的个数有 ()

①不带根号的数一定是有理数； ②任意一个实数都可以用数轴上的点表示；

③无限小数都是无理数； ④ $\sqrt{17}$ 是17的平方根；

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

2. 下列说法正确的是 ()

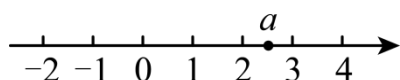
A. $-(-2)^3$ 的立方根不存在

B. 平方根等于本身的数有0, 1

C. ± 6 是36的算术平方根

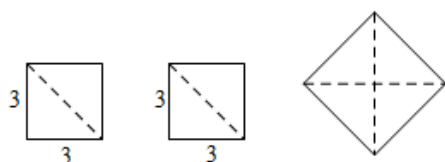
D. 立方根等于本身的数有-1, 0, 1

3. 实数在数轴上对应的点的位置如图所示，计算 $|a-\pi|+|\sqrt{2}-a|$ 的结果为 ()



A. $\pi+\sqrt{2}$ B. $\pi-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}-\pi$ D. $\pi-2$

4. 如图，用边长为3的两个小正方形拼成一个大正方形，则大正方形的边长最接近的整数是 ()



A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

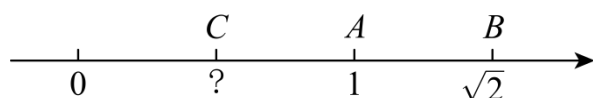
5. 2024年的母亲节来临之际，小康和小明分别制作了一个如图所示的正方体礼盒，准备用礼盒装好礼物

送给妈妈．已知小康制作的正方体礼盒的表面积为 150cm^2 ，而小明制作的正方体礼盒的体积比小康制作的正方体礼盒小 61cm^3 ，则小明制作的正方体礼盒的表面积为（ ）



- A . 36cm^2 B . 54cm^2 C . 96cm^2 D . 144cm^2

6 . 如图，数轴上表示 1 ， $\sqrt{2}$ 的对应点分别为 A ， B ， $AB = AC$ ，则点 C 所表示的数是（ ）

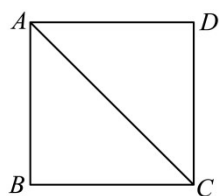


- A . $\sqrt{2} - 1$ B . $1 - \sqrt{2}$ C . $2 - \sqrt{2}$ D . $\sqrt{2} - 2$

7 . 在引入无理数的时候，我们把两个边长都为 1 的正方形，剪拼成了一个边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，类似的，

若正方形 $ABCD$ 的边长为 2 ， AC 长为 a ，则下列说法中正确的有（ ）

- ① a 可以用数轴上的一个点来表示； ② $3 < a < 4$ ；
③ $a = 2\sqrt{2}$ ； ④ $\sqrt{a^2} = a$ ； ⑤ a 是有理数．



- A . 2 个 B . 3 个 C . 4 个 D . 5 个

8 . 小明用计算器求了一些正数的平方，记录如下表：

	15	15.1	15.2	15.3	15.4	15.5	15.6	15.7	15.8	15.9	16
x^2	225	228.01	231.04	234.09	237.16	240.25	243.36	246.49	249.64	252.81	256

下面有四个推断：

① $\sqrt{2.2801} = 1.51$

② 16.2^2 比 16.1^2 大 3.23

③ 一定有 4 个整数的算术平方根在 15.5~15.6 之间

④ 对于小于 15 的两个正数，若它们的差等于 0.1，则它们的平方的差小于 3.01

所有合理推断的序号是 ()

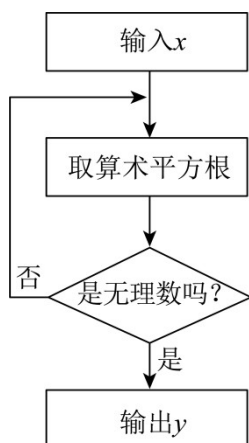
A . ①④

B . ①②③

C . ①②④

D . ①③④

9 . 如图是一个无理数生成器的工作流程图，根据该流程图，下面说法：



① 当输出值 y 为 3 时，输入值 x 为 3 或 9；

② 当输入值 x 为 16 时，输出值 y 为 $\sqrt{2}$ ；

③ 对于任意的正无理数 y ，都存在正整数 x ，使得输入后能够输出 y 。

④存在这样的正整数 x ，输入 x 之后，该生成器能够一直运行，但始终不能输出 y 值．其中错误的是（ ）

- A . ①② B . ②④ C . ①④ D . ①③

10 . 设 $[x]$ 表示最接近 x 的整数 ($x \neq n+0.5$, n 为整数), 则 $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + [\sqrt{41}] =$ ()

- A . 132 B . 146 C . 164 D . 176

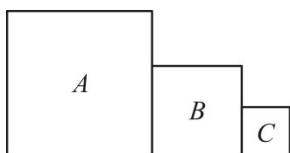
二、填空题 (本题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.)

11 . 比较大小: $\frac{\sqrt{2}}{3}$ _____ $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$.

12 . 将 $0.\overline{123}$ 和 $0.4\overline{13}$ 化成分数: $0.\overline{123} =$ _____ . 和 $0.4\overline{13} =$ _____ .

13 . 如图, A, B, C 均为正方形, 若 A 的面积为 17, C 的面积为 2, 则 B 的边长可以是 _____ . (写

出一个答案即可)



14 . 在数轴上到原点的距离小于 $\sqrt{6}$ 的点所表示的整数共有 _____ 个 .

15 . 已知: $\sqrt[3]{1-3y}$ 与 $\sqrt[3]{4x-1}$ 互为相反数 (其中 $y \neq 0$), 则 $\frac{2x}{y} =$ _____ .

16 . 已知 $a+2$ 是1的平方根, 3是 $b-3$ 的立方根, $\sqrt{6}$ 的整数部分为 c , 则 $a+b+c$ 的值为 _____ .

17 . 阅读材料: 如果一个数的平方等于 -1 , 记为 $i^2 = -1$, 这个数 i 叫做虚数单位, 那么形如 $a+bi$ (a, b

为实数)的数就叫做复数, a 叫这个复数的实部, b 叫做这个复数的虚部. 它有如下特点: ①它的加, 减,

乘法运算与整式的加，减，乘法运算类似．例如计算： $(2+i)+(3-4i)=(2+3)+(1-4)i=5-3i$ ；

$(3+i)i=3i+i^2=3i-1$ ；②若他们的实部和虚部分别相等，则称这两个复数相等，已知 $(a+i)(b+i)=2+5i$ ，

则 $(a^3b+ab^3)(i+i^2+i^3+\dots+i^{2023})=$ _____．

18．如图1，一个边长为6的正方形被分割成四个完全相同的直角三角形和一个阴影小正方形（无缝隙、

不重叠），现将这四个直角三角形分别沿着正方形四条边向外翻折，翻折后得到图2所示的大正方形．

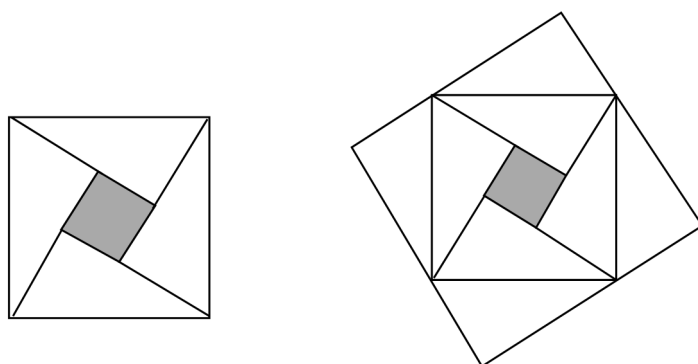


图1

图2

(1) 若阴影小正方形的边长为1，则图2中大正方形的面积为_____．

(2) 若图2中大正方形的边长为正整数，则阴影小正方形的边长为_____．

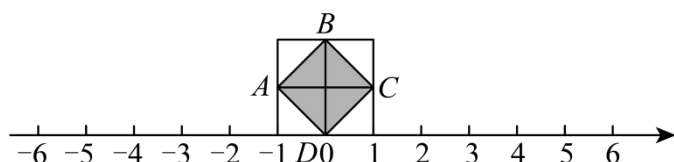
三、解答题：（本大题共10题，共78分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

19．实数计算：

(1) $\sqrt{16}-\sqrt[3]{27}+\sqrt{2\frac{1}{4}}$ ；

(2) $3(\sqrt{2}+\sqrt{3})+|\sqrt{3}-2|-2\sqrt{3}$ ；

20．如图，数轴上存在一个由4个相同的小正方形组成的大正方形，这个大正方形的面积为4．



(1) 该图形中阴影部分为正方形 $ABCD$ ，则阴影部分的面积为_，正方形 $ABCD$ 的边长为_；

(2) 请在数轴上表示下列各数： $|-4|$ ， $-\frac{9}{2}$ ， $\sqrt{2}$ ；

(3) 请比较 (2) 中三个数的大小，并用“<”号将它们连接起来。

21. 如果一个正方形 $ABCD$ 的面积为 69。

(1) 求正方形 $ABCD$ 的边长 a 。

(2) 正方形 $ABCD$ 的边长满足 $m < a < n$ ， m, n 表示两个连续的正整数，求 m, n 的值。

(3) M, N 在满足 (2) 的条件下，求 $\sqrt[3]{-m} - \sqrt{n}$ 的值

22. 根据表格解答下列问题：

x	13	13.1	13.2	13.3	13.4	13.5	13.6	13.7	13.8	13.9	14
x^2	169	171.61	174.24	176.89	179.56	182.25	184.96	187.69	190.44	193.21	196

(1) 190.44 的平方根是 _____。

(2) $\sqrt{176.9} \approx$ _____， $\sqrt{18769} =$ _____。

(3) 若 $\sqrt[3]{200} = 5.848$ ，则 $\sqrt[3]{0.2} =$ _____， $\sqrt[3]{200000} =$ _____

23. 我们知道， $\sqrt{2}$ 是一个无理数，将这个数减去整数部分，差就是小数部分，即 $\sqrt{2}$ 的整数部分是 1，小

数部分是 $\sqrt{2}-1$ ，请回答以下问题：

(1) $\sqrt{10}$ 的小数部分是_____， $5-\sqrt{13}$ 的小数部分是_____。

(2) 若 a 是 $\sqrt{90}$ 的整数部分， b 是 $\sqrt{3}$ 的小数部分，求 $a+b-\sqrt{3}+1$ 的平方根。

(3) 若 $7+\sqrt{5}=x+y$ ，其中 x 是整数，且 $0<y<1$ ，求 $x-y+\sqrt{5}$ 的值。

24. $\sqrt{3}$ 为什么是无理数？请说明理由。

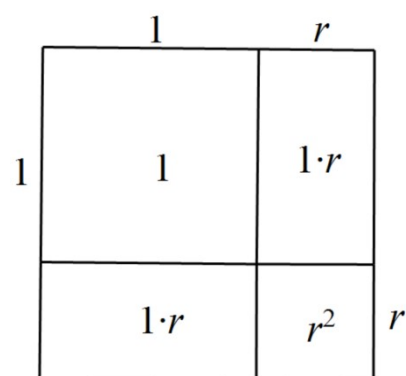
25. 单项式“ a^{2n} ”可表示边长为 a 的正方形的面积，这就是数学中的数形结合思想的体现。康康由此探究 $\sqrt{2}$

的近似值，以下是他的探究过程：

面积为2的正方形边长为 $\sqrt{2}$ ，可知 $\sqrt{2}>1$ ，因此设 $\sqrt{2}=1+r$ ，画出示意图：图中正方形的面积可以用两

个正方形的面积与两个长方形面积的和表示，即 $S_{\text{正方形}}=x^2+2\times r+1$ ，另一方面 $S_{\text{正方形}}=2$ ，则 $x^2+2\times r$

$+1=2$ ，由于 r^2 较小故略去，得 $2r+1\approx 2$ ，则 $r\approx 0.5$ ，即 $\sqrt{2}\approx 1.5$



(1) 仿照康康上述的方法，探究 $\sqrt{7}$ 的近似值。（精确到0.01）（画出示意图，标明数据，并写出求解过

程）；

(2)继续仿照上述方法，在(1)中得到的 $\sqrt{7}$ 的近似值的基础上，再探究一次，使求得的 $\sqrt{7}$ 的近似值更加准确，精确到0.001(画出示意图，标明数据，并写出求解过程)；

(3)综合上述具体探究，已知非负整数 n, m, b ，若 $n < \sqrt{b} < n+1$ ，且 $b = n^2 + m$ ，试用含 m 和 n 式子表示 $\sqrt{b}$ 的估算值。

26. 数学家华罗庚在一次出国访问途中，看到飞机上的乘客阅读的杂志上有道智力题，求59319的立方根，华罗庚脱口而出“39”，邻座的乘客十分惊奇，忙问其中的奥妙。你知道怎样迅速的计算结果吗？请你按下面的结果试一试。

第一步： $\because \sqrt[3]{1000} = 10, \sqrt[3]{1000000} = 100$

$1000 < 59319 < 1000000 \therefore 10 < \sqrt[3]{59319} < 100$

它的立方根是一个两位数。

第二步： $\because 59319$ 的个位数是9， $9^3 = 729$ 。

$\therefore$ 能确定 $\sqrt[3]{59319}$ 的个位数是9。

第三步：如果划出59319后面的三位数，得到数59

而 $\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{59} < \sqrt[3]{64}$ ，可得 $30 < \sqrt[3]{59319} < 40$ 。

由此确定59319的立方根的十位数是3， $\therefore$ 它的立方根是39。

[解答问题]

根据上面的材料解答下面的问题：

(1) 求 110592 的立方根，写出步骤。

(2) 填空： $\sqrt[3]{85184} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

27. 新定义：若无理数 $\sqrt{T}$ 的被开方数 (T 为正整数) 满足 $n^2 < T < (n+1)^2$ (其中 n 为正整数)，则称无理数

$\sqrt{T}$ 的“青一区间”为 $(n, n+1)$ ；同理规定无理数 $-\sqrt{T}$ 的“青一区间”为 $(-n-1, -n)$ 。例如：因为 $1^2 < 2 < 2^2$ ，所以

$\sqrt{2}$ 的“青一区间”为 $(1, 2)$ ， $-\sqrt{2}$ 的“青一区间”为 $(-2, -1)$ ，请回答下列问题：

(1) $\sqrt{17}$ 的“青一区间”为 $\underline{\hspace{1cm}}$ ； $-\sqrt{23}$ 的“青一区间”为 $\underline{\hspace{1cm}}$ ；

(2) 若无理数 $\sqrt{a}$ (a 为正整数) 的“青一区间”为 $(2, 3)$ ， $\sqrt{a+3}$ 的“青一区间”为 $(3, 4)$ ，求 $\sqrt[3]{a+1}$ 的值。

(3) 实数 x, y ，满足关系式： $\sqrt{x-3} + |2023 + (y-4)^2| = 2023$ ，求 $\sqrt{xy}$ 的“青一区间”。

28. 下面是小敏写的数学日记的一部分，请你认真阅读，并完成相应的任务。

2023 年 9 月 22 日天气：晴

无理数与线段长。

今天我们借助勾股定理，在数轴上找到了一些特殊的无理数对应的点，认识了“数轴上的点与实数一一对应”这一事实。

回顾梳理：要在数轴上找到表示 $\pm\sqrt{2}$ 的点，关键是在数轴上构造线段 $OA = OA' = \sqrt{2}$ 。如图 1，正方形的边长为 1 个单位长度，以原点 O 为圆心，对角线长为半径画弧与数轴上分别交于点 A, A' ，则点 A 对应的数为 $\sqrt{2}$ ，点 A' 对应的数为 $-\sqrt{2}$ 。

类似地，我们可以在数轴上找到表示 $\pm\sqrt{5}$ ， $\pm\sqrt{10}$ ，...的点。

拓展思考：如图 2，改变图 1 中正方形的位置，用类似的方法作图，可在数轴上构造出线段 OB 与 OB' ，其中 O 仍在原点，点 B ， B' 分别在原点的右侧、左侧，可由线段 OB 与 OB' 的长得到点 B ， B' 所表示的无理数！按照这样的思路，只要构造出特定长度的线段，就能在数轴上找到无理数对应的点！

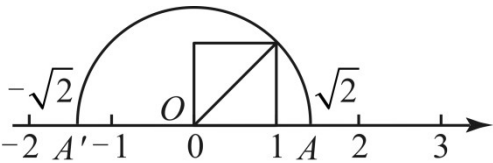


图1

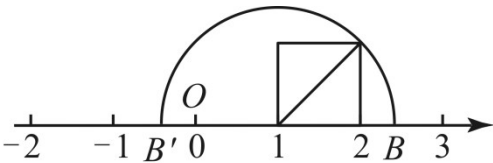


图2

任务：

(1)在图 3 中画图确定表示 $\sqrt{10}$ 的点 M 。

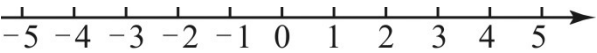


图3

(2)把 5 个小正方形按图中位置摆放，并将其进行裁剪，拼成一个大正方形。请在图中画出裁剪线，并在图 4 中画出所拼得的大正方形的示意图。

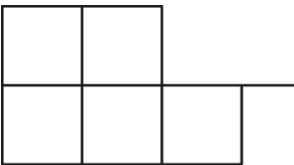


图4

(3)小丽想用一块面积为 36cm^2 的正方形纸片，沿着边的方向裁出一块面积为 20cm^2 的长方形纸片如图 5，使它的长是宽的 2 倍。小丽能用这块纸片裁出符合要求的纸片吗？请你通过计算说明理由。

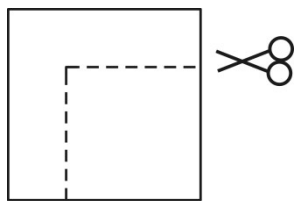


图5

(4)在图 6 中的数轴上分别标出表示数 -0.5 以及 $-3+\sqrt{5}$ 的点，并比较它们的大小．

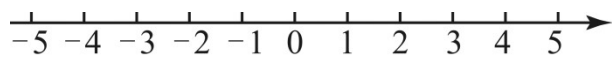


图6