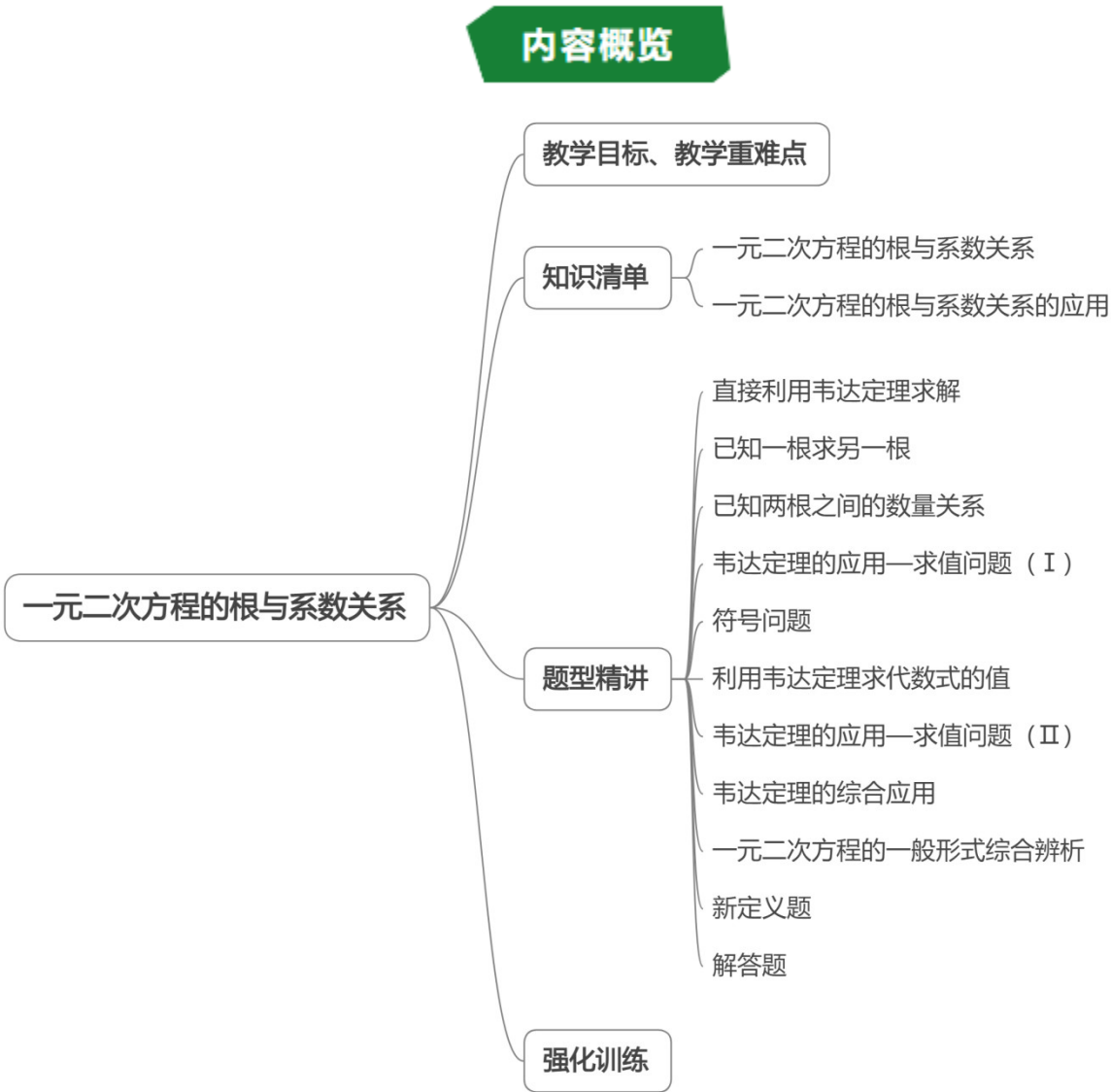


专题 21.6 一元二次方程的根与系数关系



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 由一元二次方程的求根公式计算两根之和与两根之积； 2. 学习韦达定理的内容； 3. 利用韦达定理进行有关计算。
教学重难点	1.重点 (1) 得到韦达定理的计算、推理过程； (2) 利用韦达定理研究一元二次方程两根的关系； (3) 韦达定理的有关计算与应用。

2.难点

(1) 韦达定理的代数应用—化简、变形、求值等；

(2) 一元二次方程的多参数问题。

知识清单

知识点1 一元二次方程的根与系数关系

一元二次方程的根与系数关系

我们知道一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的根的情况完全是由 a 、 b 、 c 确定的，判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值

与其实数根的情况有密切关系，当 $\Delta \geq 0$ 时，求根公式 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ， $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 表达了方程的每一个根与系数之间的关系。现在我们进一步研究一元二次方程的两个根与系数之间的关系。

我们试着计算两根之和与两根之积。

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的两个根 x_1 、 x_2 满足

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

由此得到下述关于一元二次方程的根与系数关系的定理：

韦达定理

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的两个实数根分别是 x_1 、 x_2 ，那么

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

注意它的使用条件为 $a \neq 0$ ， $\Delta \geq 0$ 。

也就是说，对于任何一个有实数根的一元二次方程，两根之和等于方程的一次项系数除以二次项系数所得

的商的相反数；两根之积等于常数项除以二次项系数所得的商。

【即学即练】

1. 若实数 m, n 是方程： $x^2 - 1 = 2x$ 的两个根，则 $m + n =$ _____ .
2. 若方程 $x^2 - 4x - 2 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，则 $x_1 \cdot x_2$ 的值为 ()
 A. -2 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
3. 设 x_1, x_2 是方程 $x^2 + mx + 4 = 0$ 的两个根，且 $x_1 + x_2 - x_1x_2 = 2$ ，则 $m =$ _____ .
4. 已知一元二次方程 $x^2 - 3x - 6 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，则 $x_1x_2 - x_1 - x_2$ 的值为 ()
 A. 3 B. -3 C. 9 D. -9
5. 若方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，则 $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$ 的值为 ()
 A. -2 B. 2 C. 4 D. 6

知识点 2 一元二次方程的根与系数关系的应用

- (1) 验根：不解方程，利用根与系数的关系可以检验两个数是不是一元二次方程的两个根；
 (2) 已知方程的一个根，求方程的另一根及未知系数；
 (3) 不解方程，可以利用根与系数的关系求关于 x_1, x_2 的对称式的值。此时，常常涉及代数式的一些重要变形；如：

- ① $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$;
- ② $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$;
- ③ $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = x_1x_2(x_1 + x_2)$;
- ④ $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2}$;
- ⑤ $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$;
- ⑥ $(x_1 + k)(x_2 + k) = x_1x_2 + k(x_1 + x_2) + k^2$;
- ⑦ $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$;
- ⑧ $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$;
- ⑨ $x_1 - x_2 = \pm\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \pm\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$;
- ⑩ $|x_1| + |x_2| = \sqrt{(|x_1| + |x_2|)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2|} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2|}$.

(4) 已知方程的两根，求作一个一元二次方程；

以两个数 x_1, x_2 为根的一元二次方程是 $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$.

(5) 已知一元二次方程两根满足某种关系，确定方程中字母系数的值或取值范围；

(6) 利用一元二次方程根与系数的关系可以进一步讨论根的符号.

设一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根为 x_1, x_2 ，则

① 当 $\Delta \geq 0$ 且 $x_1x_2 > 0$ 时，两根同号.

当 $\Delta \geq 0$ 且 $x_1x_2 > 0, x_1 + x_2 > 0$ 时，两根同为正数；

当 $\Delta \geq 0$ 且 $x_1x_2 > 0, x_1 + x_2 < 0$ 时，两根同为负数.

② 当 $\Delta > 0$ 且 $x_1x_2 < 0$ 时，两根异号.

当 $\Delta > 0$ 且 $x_1x_2 < 0, x_1 + x_2 > 0$ 时，两根异号且正根的绝对值较大；

当 $\Delta > 0$ 且 $x_1x_2 < 0, x_1 + x_2 < 0$ 时，两根异号且负根的绝对值较大.

要点：

(1) 利用根与系数的关系求出一元二次方程中待定系数后，一定要验证方程的 Δ . 一些考试中，往往利用这一点设置陷阱；

(2) 若有理系数一元二次方程有一根 $a + \sqrt{b}$ ，则必有一根 $a - \sqrt{b}$ (a, b 为有理数).

【即学即练】

1. 已知方程 $x^2 + x - 2 = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ，则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值为 ()

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{5}$

2. 已知一元二次方程 $x^2 - 5x + 3 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 ，则 $x_1^2 + x_2^2$ 的值为_____.

3. 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - x - 6 = 0$ 的两根，则 $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ 的值为_____.

4. 已知 a, b 是方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个实数根，则 $a^2 - b + 2025$ 的值是 ()

A. 2029

B. 2028

C. 2027

D. 2026

5. 设 α, β 是方程 $x^2 + 2023x - 2 = 0$ 的两根，则 $(\alpha^2 + 2025\alpha - 1)(\beta^2 + 2025\beta - 1) =$ _____.

题型精讲

题型 01 直接利用韦达定理求解

【典例 1】 若方程 $x^2 - 4x - 2 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，则 $x_1 \cdot x_2$ 的值为 ()

- A . -2 B . 2 C . $\frac{1}{2}$ D . $-\frac{1}{2}$

【变式 1】 . 方程 $2x^2 + 6x - 1 = 0$ 的两根为 x_1 、 x_2 ，则 $x_1 + x_2$ 的值为 ()

- A . -3 B . $-\frac{3}{2}$ C . $-\frac{1}{2}$ D . 3

【变式 2】 . 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - x - 2025 = 0$ 的两个实数根，则 $x_1 + x_2 - x_1x_2$ 的值为 ()

- A . 2024 B . 2025 C . 2026 D . 2027

题型 02 已知一根求另一根

【典例 1】 . 若 $x = -1$ 是方程 $2x^2 - x + m = 0$ 的一个根，则另一个根是 ()

- A . $x = 1$ B . $x = \frac{3}{2}$ C . $x = 2$ D . $x = 0$

【变式 1】 . 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 一根为 -1 ，则另一根是_____.

题型 03 已知两根之间的数量关系

【典例 1】 . 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 4x + 2k + 1 = 0$ ，其中一根是另一根的 3 倍，则 k 的值为 ()

- A . -2 或 1 B . -2 或 -1 C . $\frac{3}{2}$ D . 1

【变式 1】 . 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 10x + 3a + 4 = 0$ ，其中一根是另一根的 4 倍，则 a 的值为_____.

【变式 2】 . 已知方程 $3x = 8 - \frac{k}{x}$ 有两个实数根，且这两根之比为 1:3，则 k 的值为 ()

- A . $\frac{2}{3}$ B . $\frac{4}{9}$ C . 4 D . 6

【变式 3】 . 若关于 x 的方程 $(k+2)x^2 + 3x + k^2 = 0$ 的两根互为倒数，则 $k =$ ()

- A . 2 B . 2 或 -1 C . -1 D . ± 1

题型 04 韦达定理的应用-求值问题 (I)

【典例 1】 . 若一元二次方程 $2x^2 - x - 1 = 0$ 的两个实根为 x_1, x_2 ，则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值为 ()

- A . 1 B . -1 C . 2 D . -2

【变式1】 . 已知 x_1 和 x_2 是一元二次方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个根，则 $x_1^2 + x_2^2$ 的值为（ ）

- A . 6 B . 2 C . -4 D . 3

【变式2】 . 若 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 ，则 $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 =$ _____ .

题型 05 符号问题

【典例1】 . 已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 - (k+1)x - k^2 = 0$ 的两个根，下列结论一定正确的是（ ）

- A . $x_1 \neq x_2$ B . $x_1 = x_2$ C . $x_1 x_2 > 0$ D . $x_1 + x_2 > 0$

【变式1】 . 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 4x - m = 0$ 两根为 x_1, x_2 ，且 x_1 与 x_2 同号，则 m 可能的值为（ ）

- A . -5 B . -2 C . 0 D . 1

【变式2】 . 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x - m + 4 = 0$ 的两个实数根之积为正数，则实数 m 的取值范围是_____ .

【变式3】 . 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2(m-1)x + m^2 = 0$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2 且 $x_1 + x_2 > 0$ ， $x_1 x_2 > 0$ ，则 m 的取值范围是_____ .

题型 06 利用韦达定理求代数式的值

【典例1】 . 已知 x_1, x_2 方程 $x^2 + x - 2 = 0$ 的两个实数根，则 $x_1^2 - x_2 + 2025$ 的值是_____ .

【变式1】 . 若 m, n 是方程 $x^2 + x - 2025 = 0$ 的两个实数根，则 $m^2 + 2m + n$ 的值为_____ .

【变式2】 . 已知 a, b 是一元二次方程 $2x^2 - 4x = 3$ 的两个根，则 $a^2 b + ab^2$ 的值是_____ .

【变式3】 . 已知 a 和 b 是一元二次方程 $x^2 + 3x - 4 = 0$ 的两个根，则 $a^2 + 4a + b$ 的值为_____ .

【变式4】 . 设 a, b 是方程 $x^2 + x - 2025 = 0$ 的两个实数根，则 $a^2 + 2a + b$ 的值为_____ .

【变式5】 . 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + c = 0$ 有两个相等的实数根，则两根之积为

【变式6】 . 已知 m, n 是一元二次方程 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 的两个不相等的实数根，则 $m + n + mn$ 的值为_____ .

题型 07 韦达定理的应用-求值问题 (II)

【典例 1】 . 已知实数 m, n 满足 $3m^2 - 7m - 2 = 0$, $2n^2 + 7n - 3 = 0$, 且 $mn \neq 1$, 求 $\frac{mn+1}{mn+m+1}$ 的值 ()

- A . $\frac{7}{5}$ B . $\frac{6}{5}$ C . 3 D . $\frac{4}{3}$

【变式 1】 . 已知 m, n 是一元二次方程 $x^2 + 4x + c = 0$ 的两个根, 且 $\frac{m+5n}{mn} - \frac{4}{m} = 2$, 则 c 的值是 ()

- A . -8 B . -2 C . 2 D . 8

【变式 2】 . 已知实数 a, b 满足, $\sqrt{a-4} + |b+3| = 0$, 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2 , 则 $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ 的值为 ()

- A . $-\frac{22}{3}$ B . $-\frac{16}{3}$ C . $-\frac{19}{3}$ D . $-\frac{10}{3}$

【变式 3】 . 如果实数 x, y ($xy \neq -1$) 分别满足 $3x^2 + 2025x - 2 = 0$, $2y^2 + 2025y - 3 = 0$, 则 $\frac{x^2}{y} - \frac{x}{y^2}$ 的值等于 ()

- A . $\frac{2025}{3}$ B . $\frac{2025}{2}$ C . -450 D . 2025

题型 08 韦达定理的综合应用

【典例 1】 . 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$ 没有实数根. 甲由于看错了某一项的符号, 误求得两根为 -1 和 4, 则 $2b + 3c$ 的值为_____.

【变式 1】 . 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) , 则下列判断中不正确的是 ()

- A . 若方程有一根为 1, 则 $a + b + c = 0$
 B . 若 a, c 异号, 则方程必有解
 C . 若 $b = 0$, 则方程两根互为相反数
 D . 若 $c = 0$, 则方程有一根为 0

【变式 2】 . 已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 + (m+1)x + 1 = 0$ 的两个根, 且 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3$, 求整数 $m =$ _____.

题型 09 一元二次方程的一般形式综合辨析

【典例1】 . 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$:

- ①若方程的两个根为 -3 和 1 , 则 $2b + 3c = 0$;
- ②若 $4a + 2b + c = 0$, 则方程有一根为 $x = 2$;
- ③无论 $b = 2a + c$ 或 $b = a + 2c$, 方程都有两个不相等的实数根 ;
- ④若 $x = 2m$ 是方程的一个根 , 则式子 $b^2 + 2abm - ac = (2am + b)^2$ 一定成立 .

以上说法正确的有 ()

- A . ①②③ B . ②③ C . ②③④ D . ③④

【变式1】 . 下列命题 : ①若 $x = 1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根 , 则 $x = 1$ 也是方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的根 ; ②若 $b > a + c$, 则一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 一定有两个不相等的实数根 ; ③若一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 则一元二次方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的两根为 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$; ④一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 若 $abc > 0$. 则 $x_1 < 0, x_2 < 0$.

其中正确的是_____ (填序号) .

题型10 新定义题

【典例1】 . 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个实数根 , 且其中一个根为另一个根的 2 倍 , 则称这样的方程为“倍根方程” , 以下关于倍根方程的说法正确的是 ()

- ①方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 是倍根方程 ;
- ②若 $(x - 2)(mx + 1) = 0$ 是倍根方程 , 则 $m = -\frac{1}{4}$;
- ③若 p, q 满足 $pq = 8$, 则关于 x 的方程 $px^2 - 6x + q = 0$ 是倍根方程 ;
- ④若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 是倍根方程 , 则 $2b^2 = 9ac$

- A . ①②③ B . ①③④ C . ①②④ D . ①②③④

【变式1】 . 将两个关于 x 的一元二次方程整理成 $a(x + h)^2 + k = 0 (a \neq 0, a, h, k \text{ 均为常数})$ 的形式 , 如果只有系数 a 不同 , 其余完全相同 , 我们就称这样的两个方程为“同源二次方程” . 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 与方程 $(x + 1)^2 - 2 = 0$ 是“同源二次方程” , 且方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个根为 x_1, x_2 , 则 $b - 2c =$ _____ , $ax_1 + x_1x_2 + ax_2$ 的最大值是_____ .

题型 11 解答题

【典例 1】 . 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 有实数根 .

(1) 求 m 的取值范围 ;

(2) 若两实数根分别为 x_1 和 x_2 , 且 $m = 2$, 求 $x_1^2 + x_2^2$ 的值 .

【变式 1】 . 已知关于 x 的方程 $x^2 - (2k+1)x + 4\left(k - \frac{1}{2}\right) = 0$

(1) 说明无论 k 取何实数值 , 该方程必有两个实数根 ;

(2) 若该方程的两根分别是 x_1, x_2 , 且 $3x_1 - x_2 = -2k - 5$, 求 k 的值 .

【变式 2】 . 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + mx + m - 2 = 0$.

(1) 求证 : 无论 m 取何值 , 此方程总有两个不相等的实数根 ;

(2) 若 x_1, x_2 是该方程的两根 , 且满足 $x_1^2 + x_2^2 + m(x_1 + x_2) = m^2 + 1$, 求 m 的值 .

【变式 3】 . 某数学小组对根与系数的关系进行探究 , 关于 x 的方程 $a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1} = 0$ 有 n 个实数根 , 且有 $a_1(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = 0$. 其中 $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ 为该方程各项系数 . 当 $n = 2$ 时 , 这一性质也称作韦达定理 .

设 : 当 $n = 2$ 时 , 有方程 $a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$,

该方程有两个实数根 x_1 和 x_2 , 且 $a_1(x-x_1)(x-x_2) = 0$,

展开得 $a_1(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2) = 0$,

即 $a_1x^2 - a_1x(x_1 + x_2) + a_1x_1x_2 = 0$,

又由题知 $a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$,

则 $-a_1(x_1 + x_2) = a_2$, $a_1x_1x_2 = a_3$,

故 $x_1 + x_2 = -\frac{a_2}{a_1}$, $x_1x_2 = \frac{a_3}{a_1}$.

当 $n = 3$, 求式子 $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 和 $x_1x_2x_3$ 的值(用系数表示) .

强化训练

一、单选题

1. 已知一元二次方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 ，则 $x_1 + x_2$ 的值为 ()
 A. 1 B. -1 C. 3 D. -3
2. 设一元二次方程 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 的两个实根为 x_1 和 x_2 ，则 $x_1 x_2 =$ ()
 A. -2 B. 2 C. -3 D. 3
3. 已知一元二次方程 $x^2 + 4x - 1 = 0$ 的两根分别为 m, n ，则 $m + n + mn$ 的值是 ()
 A. -5 B. -3 C. 3 D. 5
4. 已知 $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - x - \frac{1}{2} = 0$ 的两个根，则 a 的值为 ()
 A. 3 B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{2}$
5. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 ，则 $x_1^2 + x_2^2$ 的值是 ()
 A. -7 B. 7 C. 5 D. -5
6. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2m - 3)x + m^2 + 1 = 0$ 的两实根 x_1, x_2 ，且满足 $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = 1$ ，则 m 的值为 ()
 A. 1 或 5 B. 1 或 -5 C. -5 D. 5
7. 已知 α, β 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两个实数根，则式子 $\alpha^4 - 3\beta$ 的值为 ()
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
8. 已知 a, b 是方程 $x^2 - 6x - 5 = 0$ 的两个实数根，则 $\frac{2a}{a^2 - b^2} - \frac{1}{a - b}$ 的值是 ()
 A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$
9. 已知关于 x 的方程 $4x^2 - (k + 5)x - k - 9 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 ，且 $x_1 = -1$ ， $0 < x_2 < 1$ ，则 k 的取值范围是 ()
 A. $-18 < k < -10$ B. $0 < k < 8$
 C. $-9 < k < -5$ D. $-18 < k < -10$ 且 $k \neq -13$

10. 已知一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个实数根为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, 这个

结论是法国数学家韦达最先发现并证明的, 故把它称为“韦达定理”, 请利用此定理解决问题: 对于一切正

整数 n , 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (n+2)x - 2n^2 = 0$ 的两个根记作 a_n, b_n , 则

$\frac{1}{(a_1-2)(b_1-2)} + \frac{1}{(a_2-2)(b_2-2)} + \cdots + \frac{1}{(a_{2025}-2)(b_{2025}-2)}$ 的值是 ()

- A. $-\frac{2025}{4052}$ B. $\frac{2025}{4052}$ C. $-\frac{1012}{2025}$ D. $\frac{1012}{2025}$

二、填空题

11. 已知 2 是方程 $x^2 - 5x + m = 0$ 的一个根, 则另一个根为_____.

12. 方程 $x^2 - mx + 3m = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 , 若 $x_1 + x_2 = -1$, 则 $x_1 \cdot x_2 =$ _____.

13. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x - 12 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 则 $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ 的值为_____.

14. 若 a, b 是方程 $3x^2 + 3x - 2025 = 0$ 的两个实数根, 则 $3a^2 + 4a + b$ 的值是_____.

15. 从 $-5, 0, 3$ 三个数中, 选取 1 个数作为 P 的值代入方程 $x^2 - px + 1 = 0$. 若该方程有两个正实数根, 则选取的 P 的值为_____.

16. 定义新运算: $m \star n = m + n + mn$. 若方程 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 的两个根为 x_1 和 x_2 , 则 $x_1 \star x_2 =$ _____.

17. 设 α, β 是方程 $x^2 + 2023x - 2 = 0$ 的两根, 则 $(\alpha^2 + 2025\alpha - 1)(\beta^2 + 2025\beta - 1) =$ _____.

18. 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个实数根, 且其中一个根为另外一个根的 2 倍, 则称这样的方程为“倍根方程”, 以下关于“倍根方程”的说法, 正确的有_____ (填序号).

- ①方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 是“倍根方程”;
 ②若 $(x-2)(mx+n) = 0$ 是“倍根方程”, 则 $4m^2 + 5mn + n^2 = 0$;
 ③若 p, q 满足 $pq = 2$, 则关于 x 的方程 $px^2 + 3x + q = 0$ 是“倍根方程”;
 ④若方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 是“倍根方程”, 则必有 $2b^2 = 9ac$.

三、解答题

19. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (m-4)x - 2m = 0$.

(1) 求证：该方程总有两个不相等的实数根．

(2) 若该方程的两根互为相反数，求 m 的值．

20．关于 x 的方程 $kx^2 + (k+2)x + \frac{k}{4} = 0$ 有两个不相等的实数根．

(1) 求 k 的取值范围．

(2) 是否存在实数 k ，使方程的两个实数根的倒数和等于 0？若存在，求出 k 的值；若不存在，说明理由

21．已知关于 x 的方程： $x^2 + (m-2)x - m = 0$ ．

(1) 求证：无论 m 取何实数，方程总有两个不相等的实数根．

(2) 设非 0 实数 m, n 是方程的两根，试求 m^{-n} 的值．

22．已知关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 + 4x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根．

(1) 求实数 m 的取值范围；

(2) 是否存在实数 m ，使该方程的两个实数根 x_1, x_2 满足 $2x_1x_2 - x_1 - x_2 = 3$ ，若存在，请求出 m 的值；若不存在，请说明理由．

23．已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (m+3)x + m + 1 = 0$ ．

(1) 求证：无论 m 取何值，原方程总有两个不相等的实数根；

(2) 若 x_1, x_2 是原方程的两根，且 $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{5}$ ，求 m 的值．

24．如果方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 ，那么 $x_1 + x_2 = -p$ ， $x_1x_2 = q$ ，请根据以上结论，解决下列问题：

(1) 已知 a, b 是方程 $x^2 + 15x + 5 = 0$ 的二根，则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = ?$

(2) 已知 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$ ， $abc = 16$ ，求正数 c 的最小值．

(3) 结合二元一次方程组的相关知识，解决问题：已知 $\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x = x_2 \\ y = y_2 \end{cases}$ 是关于 x, y 的方程组

$\begin{cases} x^2 - y + k = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 的两个不相等的实数解．问：是否存在实数 k ，使得 $y_1y_2 - \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} = 2$ ？若存在，求出的 k 值，

若不存在，请说明理由．

25. 材料一：定义：若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个实数根 x_1, x_2 ，且满足

$|x_1 + x_2| = |x_1 \cdot x_2|$ ，则称此类方程为“和积方程”。

例如： $x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} = 0$ ，即 $(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right) = 0$ ，解得 $x_1 = 3, x_2 = \frac{3}{2}$

$\therefore |3 + \frac{3}{2}| = |3 \times \frac{3}{2}|$ ， $\therefore x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} = 0$ 是“和积方程”。

材料二：法国数学家韦达在研究一元二次方程时发现：若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两

个实数根为 x_1, x_2 ，则： $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ ，这就是一元二次方程根与系数的关系，也被称作“韦达定理”。

(1) 方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ (填是或不是) “和积方程”；

(2) 若关于 x 的方程 $x^2 - (n+3)x + 3n = 0$ 是“和积方程”，则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2m+1)x + m^2 + 2m = 0$ 是“和积方程”，求 m 的值。