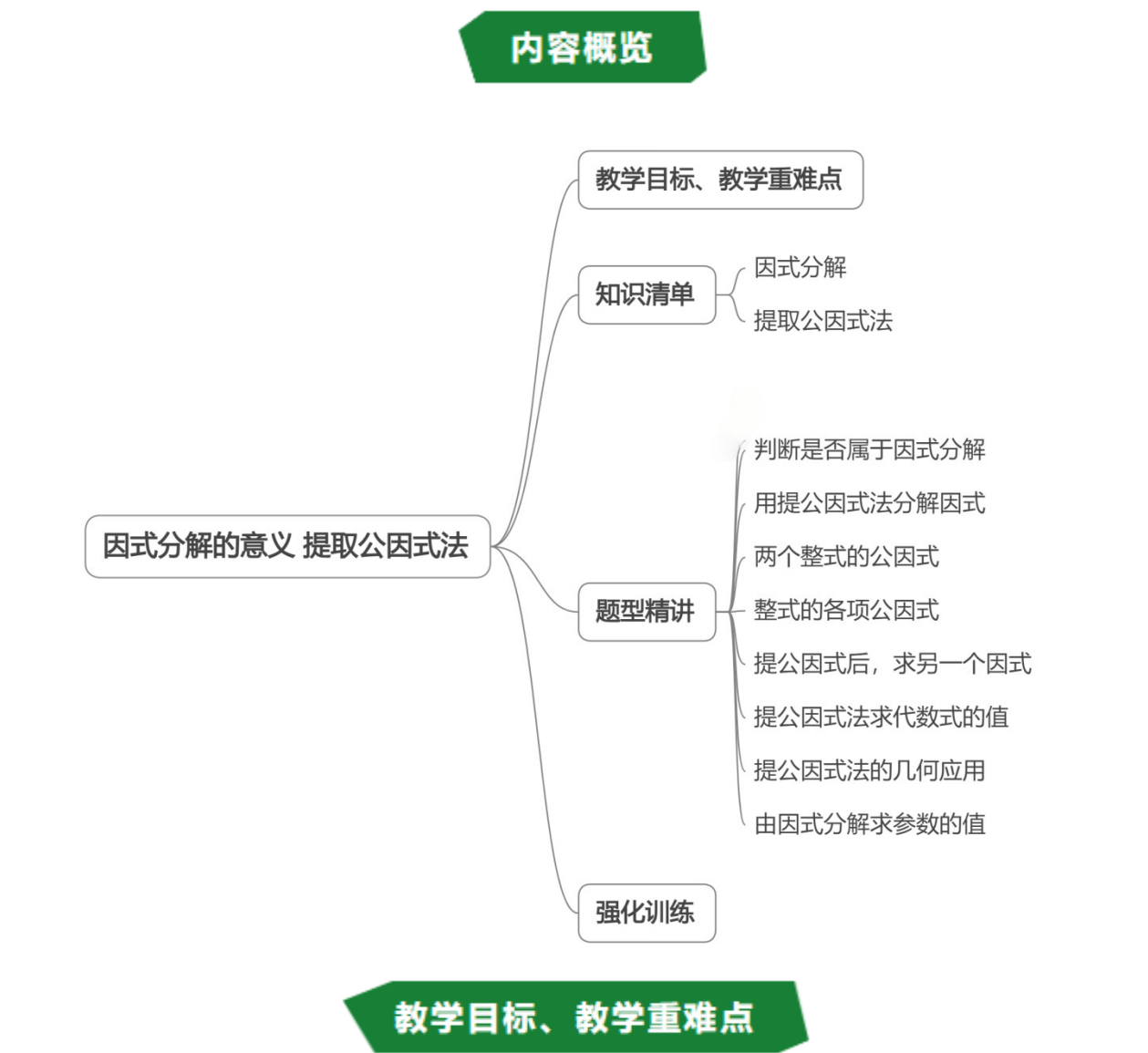


专题 12.1 因式分解的意义 提取公因式法



教学目标	1. 能判断是否属于因式分解； 2. 知道公因式的概念，会求公因式； 3. 掌握提取公因式法因式分解。
教学重难点	1.重点 (1) 会判断是否属于因式分解； (2) 由因数到因式；了解整式各项的公因式； (3) 学会提取公因式进行因式分解。 2.难点 (1) 利用因式分解求参数；

(2) 提取公因式的综合应用。

知识清单

知识点 1 因式分解

1. 复习：整式的乘法

我们已经学习了整式的乘法，可以将几个整式的乘积化为一个整式。如：

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc; (a+b)(a-b)=a^2-b^2; (a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

反过来，有时候我们需要将一个整式化为几个整式的积。

2. 因式分解

①思考：你能把下列整式化为几个整式的积吗？

(1) $ma+mb+mc=$ _____；

(2) $a^2-b^2=$ _____；

(3) $a^2-2ab+b^2=$ _____.

②因式分解：几个整式相乘，其中每个整式都称为积的因式。把含多个项的整式化为几个次数更低的整式的积，叫作把这个整式因式分解。

如： $x^2+x=x(x+1)$ ； $x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$ 。

③因式：其中， x 、 $x+1$ 是 x^2+x 的因式， x^2+1 、 $x+1$ 、 $x-1$ 是 x^4-1 的因式。

要点：

因式分解一般要分解到每个因式都不能再分解为止，如在 x^4-1 因式分解的过程中，因式 x^2+1 不能继续因式分解， x^2-1 还能继续因式分解为 $(x+1)(x-1)$ 。

【即学即练】

1. 下列各式中，是整式乘法的是_____，是因式分解的是_____。（填序号）

① $(5a-1)^2=25a^2-10a+1$ ；② $(a-6)(a+6)=a^2-36$ ；

③ $m^2-4=(m+2)(m-2)$ ；④ $2xy-2xz=2x(y-z)$ 。

2. 下列整式变形属于因式分解的是（ ）

A. $8x^2y^2=4xy \cdot 2xy$

B. $x^2-4xy+4y^2=(x-2y)^2$

$$C. (x+3)(x+1) = x^2 + 4x + 3$$

$$D. x^2 - 16 - 6x = (x+4)(x-4) - 6x$$

3. 下列各式从左到右的变形，因式分解正确的是 ()

$$A. a^2 - 2a + 1 = a(a-2) + 1$$

$$B. a(b-1) + b - 1 = (a-1)(b-1)$$

$$C. a^2 - 2a - 8 = (a-2)(a+4)$$

$$D. ax + bx + ay + by = (a+b)(x+y)$$

4. 下列各式从左边到右边的变形中，哪些是因式分解？哪些不是？

$$(1) 12x^2y = 4x \cdot 3xy; (2) (x+2)(x-2) = x^2 - 4;$$

$$(3) x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2; (4) 2x^2 - 3x + 1 = x(2x-3) + 1;$$

$$(5) x + 4 = x\left(1 + \frac{4}{x}\right); (6) \frac{1}{3}ax + \frac{1}{3}bx = \frac{1}{3}x(a+b).$$

知识点2 提取公因式法

1. 公因式

①观察： $ma+mb+mc$ 的每一项，你有什么发现？

我们把含多个项的整式中的每一项都含有的公共的因式叫作这个整式各项的**公因式**。

由 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$, 可得

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

这就将 $ma+mb+mc$ 分解成两个整式的积. 其中，**m** 是 $ma+mb+mc$ 各项的**公因式**。

要点：

(1) 公因式必须是每一项中都含有的因式。

(2) 公因式可以是一个数，也可以是一个字母，还可以是一个整式。

(3) 公因式的确定分为数字系数和字母两部分：

①公因式的系数是各项系数的最大公约数. ②字母是各项中相同的字母，指数取各字母指数最低的。

2. 提取公因式法

如果含多个项的整式的各项含有非常数的公因式，那么可以把这个公因式提取出来，从而将这个整式化为两个次数更低的整式的积，这种因式分解的方法叫作**提取公因式法**。

要点：

(1) 提取公因式法分解因式实际上是逆用乘法分配律，

$$\text{即 } ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

(2) 用提取公因式法分解因式的关键是准确找出整式各项的公因式。

(3) 当整式第一项的系数是负数时，通常先提出“-”号，使括号内的第一项的系数变为正数，同时整式的

各项都要变号.

(4) 用提取公因式法分解因式时, 若整式的某项与公因式相等或它们的和为零, 则提取公因式后, 该项变为: “+1”或“-1”, 不要把该项漏掉, 或认为是0而出现错误.

3. 举例分析

例1 如何将 $6xy^2+9xy$ 因式分解?

先找出 $6xy^2+9xy$ 各项的公因式, 再用提取公因式法因式分解. 这个整式有两项 $6xy^2$ 与 $9xy$, 这两项的系数6与9有最大公因数3, 这两项的字母部分 xy^2 与 xy 都含有字母 x 和 y , 且 x 和 y 的最低次数都是1, 因此可提取公因式 $3xy$, 得 $6xy^2+9xy=3xy \cdot 2y+3xy \cdot 3=3xy(2y+3)$.

如果含多个项的整式的各项的系数都是整数, 提取公因式时, 通常提取各项系数的最大公因数.

例2 (整体法)

因式分解:

$$(1) a(x+y)+b(x+y);$$

$$(2) x(a-b)^2-y(b-a)^3.$$

解: (1) $a(x+y)+b(x+y)$

$$=(x+y)(a+b).$$

$$(2) x(a-b)^2-y(b-a)^3$$

$$=x(a-b)^2+y(a-b)^3$$

$$=(a-b)^2(x+ay-by).$$

【即学即练】

1. 用提公因式法分解因式.

$$(1) 4x^2 - 4xy + 8xz;$$

$$(2) 6x^4 - 4x^3 + 2x^2;$$

$$(3) 6m^2n - 15mn^2 + 30m^3n;$$

$$(4) (a+b) - (a+b)^2;$$

$$(5) x(x-y) + y(y-x);$$

$$(6) (m+n)^2 - 2(m+n).$$

2. 整式 $2x^2+2y^2$ 分解因式的结果是 ()

A. $2(x+y)^2$

B. $2(x-y)^2$

C. $2(x^2+y^2)$

D. $2(x+y)(x-y)$

3. 整式 $12ab^2 - 8a^2bc$ 用提公因式法分解因式时提取的公因式是 ()

- A. $2ab$ B. $4ab$ C. $4a^2b^2$ D. $2abc$

4. 已知 $m^2 + n^2 = 25$, $mn = 12$, 则 $mn^3 + m^3n$ 的值为 ()

- A. -84 B. 84 C. ± 84 D. 300

5. 整式 $x^2 + x^6$ 提取公因式后, 剩下的因式是 ()

- A. x^4 B. $x^3 + 1$ C. $x^4 + 1$ D. $x^3 - 1$

6. $a(y - x) - b(x - y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 用提公因式法将下列各式分解因式:

(1) $4x^2y^3 + 8x^2y^2z - 12xy^2z$;

(2) $5x(x - 2y)^3 - 20y(2y - x)^3$.

题型精讲

题型 01 判断是否属于因式分解

【典例 1】. 判断下列各式从等号左边到右边的变形, 哪些是整式乘法, 哪些是因式分解.

(1) $a^2 - 9b^2 = (a + 3b)(a - 3b)$;

(2) $3y(x + 2y) = 3xy + 6y^2$;

(3) $(3a - 1)^2 = 9a^2 - 6a + 1$;

(4) $4y^2 + 12y + 9 = (2y + 3)^2$;

(5) $x^2 + x = x^2(1 + \frac{1}{x})$;

(6) $x^2 - y^2 + 4y - 4 = (x - y)(x + y) + 4(y - 1)$.

【变式 1】. 下列从左到右的变形中, 属于因式分解的是 ()

A. $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$

B. $x^2 - 4 = (x + 4)(x - 4)$

C . $x(x-y) = x^2 - xy$

D . $x^2 - y^2 + 1 = (x+y)(x-y) + 1$

【变式2】 . 下列各式从左到右的变形中，属于因式分解的是 ()

A . $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$

B . $6ab = 2a \cdot 3b$

C . $(x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$

D . $x^2 - 4 + 6x = (x+2)(x-2) + 6x$

【变式3】 . 下列由左边到右边的变形，属于因式分解的是 ()

A . $m(a+b) = am + bm$

B . $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$

C . $y^2 - y + \frac{1}{4} = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$

D . $x^2 + x + 1 = x(x+1) + 1$

【变式4】 . 下列从左到右的变形中，哪些是因式分解？哪些不是？

(1) $24x^2y = 4x \cdot 6xy$;

(2) $(x+5)(x-5) = x^2 - 25$;

(3) $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$;

(4) $9x^2 - 6x + 1 = 3x(3x-2) + 1$;

(5) $x^2 + 1 = x\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

题型 02 用提公因式法分解因式

【典例1】 . 用提公因式法分解因式： $3x - 12x^2$.

【变式1】 . 用提公因式法分解因式：

(1) $9x^2 - 6xy + 3x$;

(2) $(a-b)^3 - (a-b)^2$;

(3) $3m(x-y) - n(y-x)$;

$$(4) -3a^{n+2} + 2a^{n+1} - 5a^n .$$

【变式 2】 . 用提取公因式法将下列各式分解因式：

$$(1) 6xyz - 3xz^2 ;$$

$$(2) x^4y - x^3z ;$$

$$(3) x(m-x)(m-y) - m(x-m)(y-m) .$$

【变式 3】 . 因式分解：

$$(1) 10ab^2c + 6ac^2 + 2ac ;$$

$$(2) 2m(a-b) - 3n(b-a) ;$$

$$(3) 2a(a-3)^2 - 6a^2(3-a) - 8a(a-3) .$$

题型 03 两个整式的公因式

【典例 1】 . 下列整式中，没有公因式的是 ()

A . $a(x+y)$ 和 $(x+y)$

B . $32(a+b)$ 和 $(-a+b)$

C . $3b(x-y)$ 和 $2(x-y)$ D . $(3a-3b)$ 和 $6(b-a)$

【变式 1】 . 整式 $x^2 - 4$ 与 $x^2 + 2x$ 的公因式是 ()

A . $x+2$

B . $x-2$

C . x

D . 2

【变式 2】 . 式子 $n^2 - 1$ 与 $n^2 + n$ 的公因式是 ()

A . $n+1$

B . n^2

C . n

D . $n-1$

【变式 3】 . 整式 $m^2 - 2m$ 与整式 $m^2 - 4m + 4$ 的公因式是 ()

A . $m+2$

B . $m-2$

C . $(m-2)(m+2)$

D . $(m-2)^2$

题型 04 整式的各项公因式

【典例 1】 . 将 $3a(x-y) - 9b(x-y)$ 用提公因式法分解因式，应提的公因式是 ()

A . $3a-b$

B . $x-y$

C . $3(x-y)$

D . $3a+b$

【变式 1】 . 把整式 $4x^2y^2z - 12xy^2z - 6xyz^2$ 分解因式时，应提取的公因式是 ()

- A. xyz B. $2xy$ C. $2xyz$ D. $2x^2y^2z^2$

【变式2】. 整式 $2x^m y^{n-1} - 4x^{m-1} y^n$ (m, n 均为大于1的整数) 各项的公因式是 ()

- A. $4x^{m-1} y^{n-1}$ B. $2x^{m-1} y^{n-1}$ C. $2x^m y^n$ D. $4x^m y^n$

题型 05 提公因式后，求另一个因式

【典例1】. 把 $-9x^3 + 6x^2 - 3x$ 因式分解时，提出公因式后，另一个因式是 ()

- A. $3x^2 - 2x$ B. $3x^2 - 2x - 1$
C. $-9x^2 + 6x$ D. $3x^2 - 2x + 1$

【变式1】. 把 $a(m-n) + 4(n-m)$ 提公因式后一个因式是 $m-n$ ，则另一个因式是_____.

【变式2】. 若整式 $-12x^2y^3 + 16x^3y^2 + 4x^2y^2$ 分解因式，其中一个因式是 $-4x^2y^2$ ，则另一个因式是 ()

- A. $3y + 4x - 1$ B. $3y - 4x - 1$ C. $3y - 4x + 1$ D. $3y - 4x$

【变式3】. 将整式 $x^2y(a-b) - xy(b-a) + y(a-b)$ 提公因式后，另一个因式为 ()

- A. $x^2 - x + 1$ B. $x^2 + x + 1$ C. $x^2 - x - 1$ D. $x^2 + x - 1$

【变式4】. 把整式 $(m+1)(m-1) + (m-1)$ 提取公因式 $(m-1)$ 后得 $(m-1)(\quad)$ ，括号中内容是 ()

- A. $m+1$ B. $2m$ C. $m-1$ D. $m+2$

题型 06 提取公式法求代数式的值

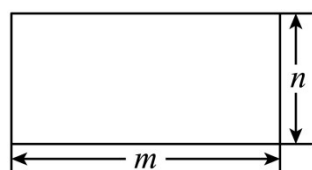
【典例1】. 已知 $ab = 2$ ， $a - 2b = 3$ ，则 $4ab^2 - 2a^2b$ 的值是_____.

【变式1】. 若 $x + y = 5$ ， $xy = 3$ ，则 $x^2y + xy^2 =$ _____.

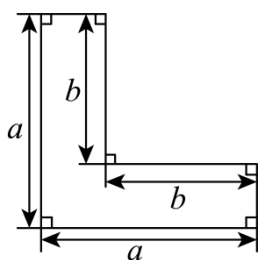
【变式2】. 已知 $a + b = 2$ ， $ab = 2$ ，求 $12a^3b + a^2b^2 + 12ab^3$ 的值.

题型 07 提取公式法的几何应用

【典例1】. 如图，边长为 m, n 的长方形，它的周长为 10，面积为 6，则 $m^2n + mn^2$ 的值为_____.

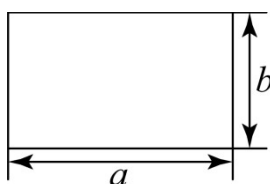


【变式1】. 如图，“L”形图形的面积为 7，如果 $a - b = 1$ ，那么 $a + b =$ _____.



【变式2】. 已知 a, b 分别是长方形的长和宽，它的周长为 12，面积为 8，则 $\frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{2}ab^2$ 的值为_____.

【变式3】. 如图，长宽分别为 a, b 的长方形周长为 16，面积为 12，则 $a(a+b)(a-b) - a(a+b)^2$ 的值为 ()



A. 193

B. -192

C. 384

D. -384

题型 08 由因式分解求参数的值

【典例1】. 小明把整式 $2x^2 - 13x + n$ 分解因式，有一个因式是 $(x-5)$ ，则 n 的值为 ()

A. -15

B. 40

C. -40

D. 15

【变式1】. 已知关于 x 的整式 $2x^2 - 11x + m$ 因式分解后有一个因式是 $x-3$ ，试求 m 的值.

【变式2】. 把整式 $x^2y^5 - xy^n z$ 因式分解时，提取的公因式是 xy^5 ，则 n 的值可能为 ()

A. 6

B. 4

C. 3

D. 2

【变式3】. 若关于 x 的二次三项式 $3x^2 + mx - n$ 分解因式的结果为 $(3x+2)(x-1)$ ，求 $m+n$ 的值.

【变式4】. 已知关于 x 的二次三项式 $x^2 + x + a$ 能分解因式成两个一次整式的积，其中一个一次整式是 $x-2$ ，则另一个一次整式是 ()

A. $x-1$

B. $x+1$

C. $x-3$

D. $x+3$

强化训练

一、单选题

1. 下列从左边到右边的变形，属于因式分解的是 ()

A . $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ B . $x^2 - 2x + 1 = x(x-2) + 1$

C . $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ D . $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$

2 . 下列变形属于因式分解的有 ()

① $8xy^3 = 2xy \cdot 4y^2$; ② $x^2 + 1 = x\left(x + \frac{1}{x}\right)$; ③ $(x+5)(x-5) = x^2 - 25$; ④ $x^2 + 2x - 3 = x(x+2) - 3$; ⑤

$x^2y + xy^2 = xy(x+y)$.

A . 4 个 B . 3 个 C . 2 个 D . 1 个

3 . 整式 $xy - x$ 的公因式是 ()

A . x B . $x-1$ C . y D . xy

4 . 下列代数式中，不能用提公因式因式分解的是 ()

A . $ac + bc$ B . $2x - 4xy$ C . $ax + y$ D . $-x^2 + xy$

5 . 整式 $6ab^2 + 18a^2b^2 - 12a^3b^2c$ 的公因式是 ()

A . $6a^2b^2$ B . $6ab^2$ C . $6ab^2c$ D . $6a^3b^2c$

6 . 若 $x^2 - 4x + m = (x-2)(x+n)$, 则 m 、 n 的值分别为 ()

A . -4 , 2 B . 4 , -2 C . -4 , -2 D . 4 , 2

二、填空题

7 . (1) 整式 $3a^2 - 6ab + 3$ 的公因式是_____ ;

(2) 整式 $-4xy^3 - 16x^2 + 8x$ 的公因式是_____ ;

(3) 整式 $x(b+c-a) - y(b+c-a) - (-a+b+c)$ 的公因式是_____ ;

(4) 整式 $4x(x-2)^2 - 2x(2-x)$ 的公因式是_____ .

8 . 因式分解 : $xy - x^2 =$ _____ .

9 . 因式分解 : $-20x^4y^3 + 28x^2y^4z =$ _____ .

10 . 如果整式 $-\frac{1}{5}abc + \frac{1}{5}ab^2 - a^2bc$ 的一个因式是 $-\frac{1}{5}ab$, 那么另一个因式是_____ .

11 . 若 $m - n - 1 = 0$, 则 $m^2 - mn - n + 1$ 的值为_____ .

三、解答题

12. 把下列各式分解因式：

(1) $ax + ay$;

(2) $3mx - 6my$;

(3) $8m^2n + 2mn$

(4) $12xyz - 9x^2y^2$;

(5) $2a(y - z) - 3b(z - y)$;

(6) $p(a^2 + b^2) - q(a^2 + b^2)$.

13. 将下列各式分解因式：

(1) $6x^3y^2 - 8xy^3z$;

(2) $-4a^3b^2 + 12a^2b - 4ab$;

(3) $3a(a - 2b) + 6b(2b - a)$;

(4) $5m(y - x)^2 - 10(x - y)^3$.

14. 已知 $x - y = 2$, $xy = -1$, 用因式分解法求 $x(x + y)(x - y) - x(x - y)^2$ 的值 .

15. 已知 a 、 b 、 x 、 y 满足 $a + b = x + y = 3$, $ax + by = 7$, 求：

(1) $ay + bx$;

(2) $(a^2 + b^2)xy + ab(x^2 + y^2)$.

16. 观察下列因式分解的过程：

① $x^2 + 9x + 8 = (x^2 + 8x) + (x + 8) = x(x + 8) + (x + 8) = (x + 1)(x + 8)$

② $x^2 - 3x - 4 = x^2 - 4x + x - 4 = x(x - 4) + (x - 4) = (x - 4)(x + 1)$

③ $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3)$

.....

根据上述因式分解的方法，尝试将下列各式进行因式分解：

(1) $x^2 - 2x - 3$;

(2) $t^2 - 8t + 7$.

17. 阅读下列因式分解的过程，再回答所提出的问题：

$$1+x+x(x+1)+x(x+1)^2=(1+x)[1+x+x(x+1)]=(1+x)^2(1+x)=(1+x)^3.$$

(1)上述因式分解的方法是_____，共应用了_____次；

(2)将下列整式分解因式： $1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+x(x+1)^3$ ；

(3)若分解 $1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots+x(x+1)^{2023}$ ，则需应用上述方法_____次，结果是_____。