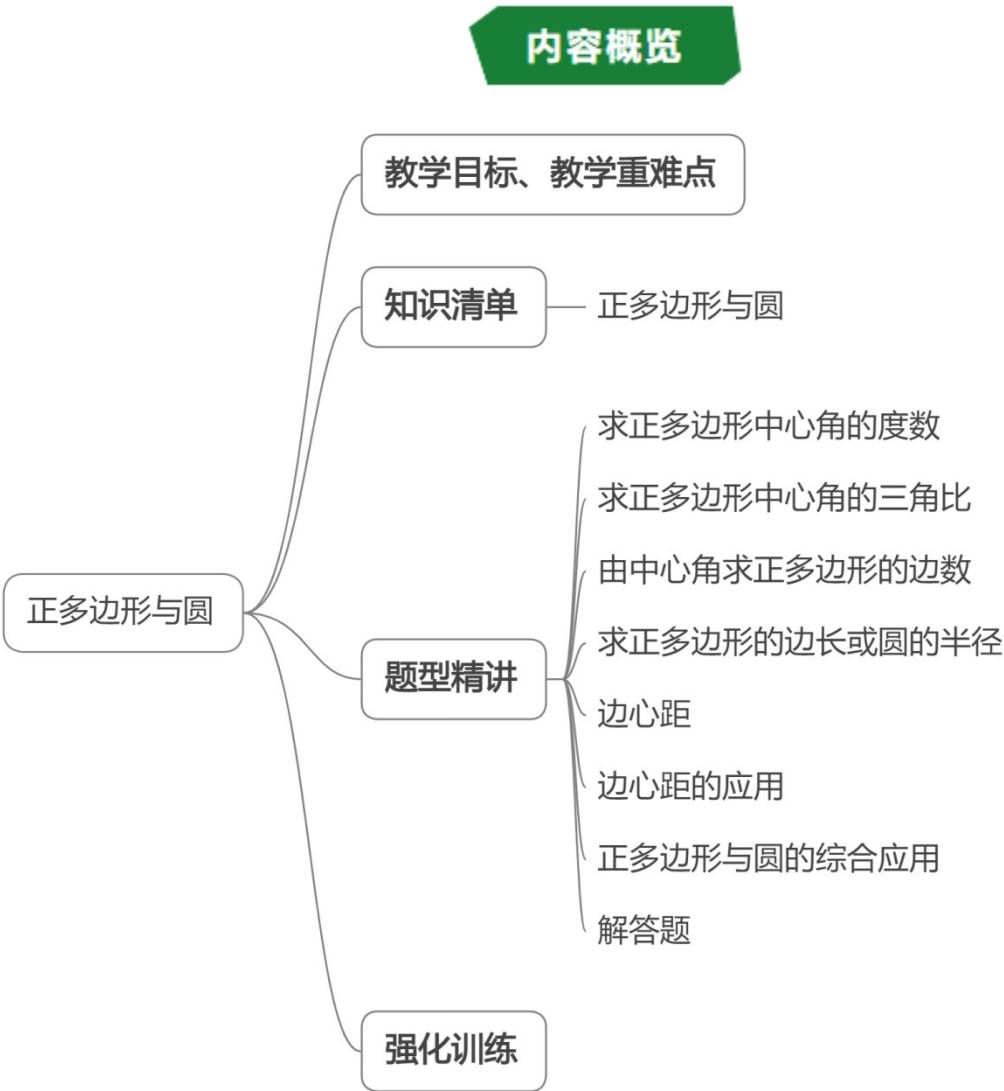


专题 27.6 正多边形与圆



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 了解正多边形的有关概念，如中心角、边心距等； 2. 学会计算正多边形的中心角、边心距； 3. 掌握正多边形与圆的综合应用．
教学重难点	1.重点 (1) 会求正多边形的有关概念； (2) 锐角的三角比在正多边形与圆的应用； (3) 正多边形与圆的有关作图。

2.难点

- (1) 新定义题；新数学情景题；分类讨论思想；
(2) 正多边形与圆的综合应用。

知识清单

知识点1 正多边形与圆

一、正多边形的概念

各边相等，各角也相等的多边形是正多边形。

要点：

判断一个多边形是否是正多边形，必须满足两个条件：(1)各边相等；(2)各角相等；缺一不可。如菱形的各边都相等，矩形的各角都相等，但它们都不是正多边形(正方形是正多边形)。

二、正多边形的重要元素

1.正多边形的外接圆和圆的内接正多边形

正多边形和圆的关系十分密切，只要把一个圆分成相等的一些弧，就可以作出这个圆的内接正多边形，这个圆就是这个正多边形的外接圆。

2.正多边形的有关概念

- (1)一个正多边形的外接圆的圆心叫做这个正多边形的中心。
- (2)正多边形外接圆的半径叫做正多边形的半径。
- (3)正多边形每一边所对的圆心角叫做正多边形的中心角。
- (4)正多边形的中心到正多边形的一边的距离叫做正多边形的边心距。

3.正多边形的有关计算

(1)正 n 边形每一个内角的度数是 $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ ；

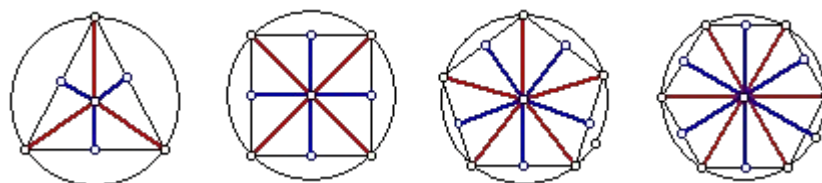
(2)正 n 边形每个中心角的度数是 $\frac{360^\circ}{n}$ ；

(3)正 n 边形每个外角的度数是 $\frac{360^\circ}{n}$ 。

要点：要熟悉正多边形的基本概念和基本图形，将待解决的问题转化为直角三角形。

三、正多边形的性质

- 1.正多边形都只有一个外接圆，圆有无数个内接正多边形。
- 2.正 n 边形的半径和边心距把正 n 边形分成 $2n$ 个全等的直角三角形。
- 3.正多边形都是轴对称图形，对称轴的条数与它的边数相同，每条对称轴都通过正 n 边形的中心；当边数是偶数时，它也是中心对称图形，它的中心就是对称中心。



4.边数相同的正多边形相似。它们周长的比，边心距的比，半径的比都等于相似比，面积的比等于相似比的平方。

5.任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心圆

要点：（1）各边相等的圆的内接多边形是圆的内接正多边形；（2）各角相等的圆的外切多边形是圆的外切正多边形。

四、正多边形的画法

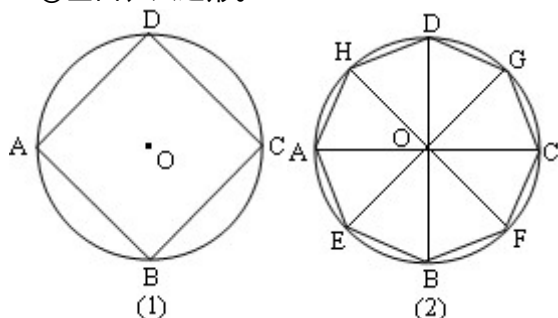
1.用量角器等分圆

由于在同圆中相等的圆心角所对的弧也相等，因此作相等的圆心角(即等分顶点在圆心的周角)可以等分圆；根据同圆中相等弧所对的弦相等，依次连接各分点就可画出相应的正 n 边形。

2.用尺规等分圆

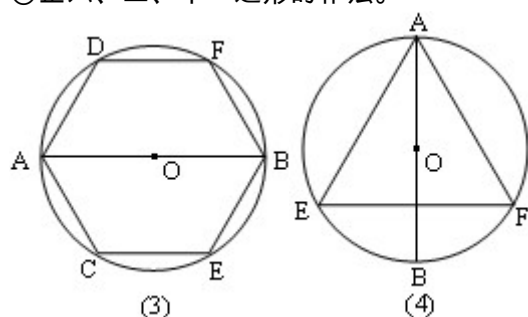
对于一些特殊的正 n 边形，可以用圆规和直尺作图。

①正四、八边形。



在 $\odot O$ 中，用尺规作两条互相垂直的直径就可把圆分成 4 等份，从而作出正四边形。再逐次平分各边所对的弧(即作 $\angle AOB$ 的平分线交 $\widehat{AB}$ 于 E) 就可作出正八边形、正十六边形等，边数逐次倍增的正多边形。

②正六、三、十二边形的作法。



通过简单计算可知，正六边形的边长与其半径相等，所以，在 $\odot O$ 中，任画一条直径 AB ，分别以 A 、 B 为圆心，以 $\odot O$ 的半径为半径画弧与 $\odot O$ 相交于 C 、 D 和 E 、 F ，则 A 、 C 、 E 、 B 、 F 、 D 是 $\odot O$ 的 6 等分点。

显然， A 、 E 、 F (或 C 、 B 、 D)是 $\odot O$ 的 3 等分点。

同样，在图(3)中平分每条边所对的弧，就可把 $\odot O$ 12 等分……。

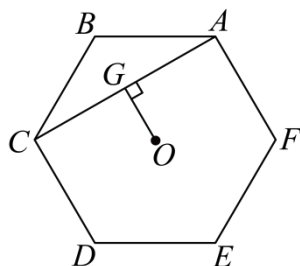
要点：画正 n 边形的方法：（1）将一个圆 n 等份，（2）顺次连结各等分点。

【即学即练】

1. 正四边形的边心距与边长之比为 ()

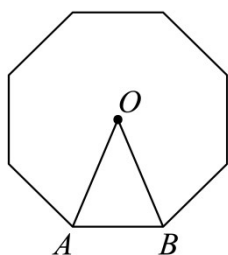
- A. $1:2$ B. $\sqrt{2}:2$ C. $\sqrt{3}:1$ D. $\sqrt{3}:2$

2. 如图，点 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，连接 AC . 若正六边形的边长为 4，则点 O 到 AC 的距离 OG 的长为 ()



- A. $2\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 1

3. 青秀山的龙象塔是南宁市的地标建筑之一，始建于明代万历年间 . 该塔为八角九层，重檐砖结构 . 如图所示的正八边形是龙象塔其中一层的平面示意图，点 O 为正八边形的中心，则 $\angle AOB$ 的度数为 ()

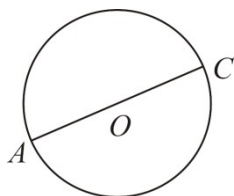


- A. 60° B. 54° C. 45° D. 30°

4. 已知正六边形的半径为 4，则它的面积是 ()

- A. $12\sqrt{3}$ B. 12 C. $24\sqrt{3}$ D. 24

5. 如图，已知 AC 为 $\odot O$ 的直径 . 请用尺规作图法，作出 $\odot O$ 的内接正方形 $ABCD$. (保留作图痕迹 . 不写作法)



题型精讲

题型 01 求正多边形中心角的度数

【典例 1】. 正六边形的中心角的度数是 ()

- A . 30° B . 45° C . 60° D . 90°

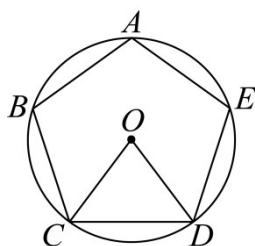
【变式 1】. 正十边形的中心角的度数为 ()

- A . 30° B . 36° C . 45° D . 60°

【变式 2】. 将一个正八边形绕着其中心旋转后与原图形重合，旋转角的大小不可能是 ()

- A . 45° B . 60° C . 135° D . 180°

【变式 3】. 如图，五边形 $ABCDE$ 是 $\odot O$ 的内接正五边形，则正五边形中心角 $\angle COD$ 的度数是 ()



- A . 60° B . 36° C . 76° D . 72°

题型 02 求正多边形中心角的三角比

【典例 1】. 正十二边形中心角的余弦值为_____.

【变式 1】. 正二十四边形中心角的余弦值为_____.

【变式 2】. 正四十八边形中心角的十倍角的余弦值为_____.

题型 03 由中心角求正多边形的边数

【典例 1】. 若一个圆的内接正多边形的中心角为 18° ，则该正多边形的边数是 ()

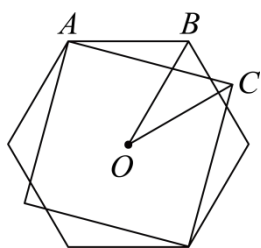
- A . 14 B . 18 C . 16 D . 20

【变式 1】. 若一个正多边形的中心角为 45° ，则这个正多边形的边数为 ()

- A . 七 B . 八 C . 九 D . 十

【变式 2】. 如图，正六边形与正方形有重合的中心 O ，若 $\angle BOC$ 是正 n 边形的一个中心角，则 n 的值为

()



A . 16

B . 12

C . 10

D . 8

题型 04 求正多边形的边长或圆的半径

【典例 1】 . 半径为 2 的圆内接正方形的边长是 ()

A . 2

B . 4

C . $2\sqrt{3}$

D . $2\sqrt{2}$

【变式 1】 . 边长为 a 的正十边形的半径是 ()

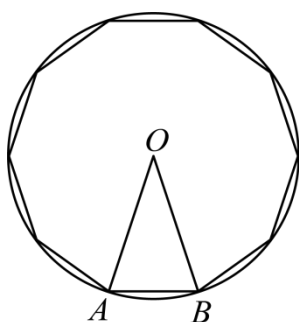
A . $\frac{a}{2\cos 72^\circ}$;

B . $\frac{a}{2}\cos 72^\circ$

C . $\frac{a}{2}\tan 72^\circ$

D . $\frac{a}{2\tan 72^\circ}$

【变式 2】 . 如图，正十边形的外接圆半径为 R ，则这个正十边形的边长为 ()



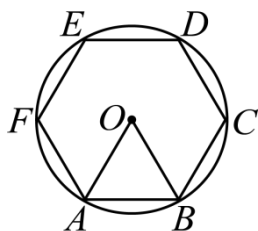
A . $R \cdot \sin 18^\circ$

B . $R \cdot \sin 36^\circ$

C . $2R \cdot \sin 18^\circ$

D . $2R \cdot \sin 36^\circ$

【变式 3】 . 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$ ， $OA=1$ ，则 AB 的长为 ()



A . 2

B . 3

C . 1

D . $\frac{1}{2}$

题型 05 边心距

【典例 1】. 若正六边形的边长为 1 ，那么正六边形的中心角的度数是_____，半径是_____，边心距是_____，它的每一个内角是_____。正 n 边形的一个外角度数与它的_____角的度数相等。

【变式 1】. 边长为 2 的等边三角形的边心距是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【变式 2】. 若正六边形外接圆的半径为 4 ，则它的边心距为 ()

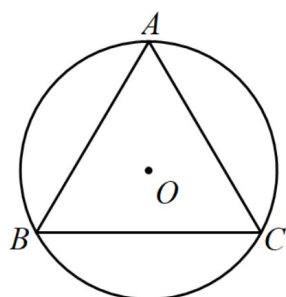
- A. 2 B. $4\sqrt{3}$ C. 4 D. $2\sqrt{3}$

题型 06 边心距的应用

【典例 1】. 等边三角形的边心距、半径和高的比是 ()。

- A. $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ B. $1:2:\sqrt{3}$ C. $1:\sqrt{3}:2$ D. $1:2:3$

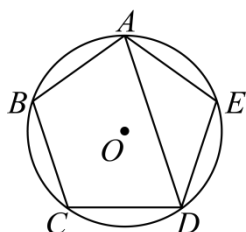
【变式 1】. 已知 $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接正三角形， $\odot O$ 的半径是 12cm ，则 $\triangle ABC$ 边心距的值为_____。



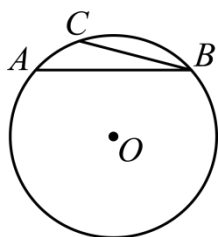
【变式 1】⁰. 已知正多边形的边长为 a ，且它的一个外角是其内角的一半，那么此正多边形的边心距是_____。

题型 07 正多边形与圆的综合应用

【典例 1】. 如图。点 O 是正五边形 $ABCDE$ 的中心， $\odot O$ 是正五边形的外接圆， $\angle ADE$ 的余弦值为_____。

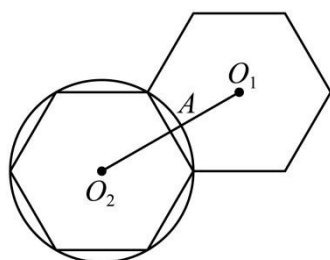


【变式 1】. 如图， AB 、 BC 和 AC 分别为 $\odot O$ 内接正方形，正六边形和正 n 边形的一边，则 n 是_____。



【变式 2】 . 已知同一个圆的内接正六边形与内接正三角形的面积之差为 $12\sqrt{3}\text{cm}^2$, 则该圆的半径为 cm .

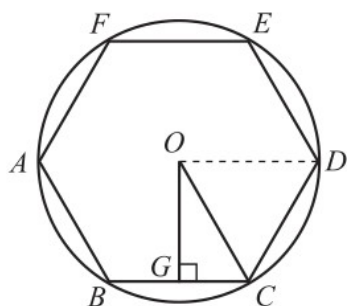
【变式 3】 . 如图, 将两个全等的正六边形一边重合放置在一起, 中心分别为 O_1 , O_2 , 连接 O_1O_2 , 其中一个正六边形的外接圆与 O_1O_2 交于点 A . 若外接圆 O_2 的半径为 2 , 则 $O_1A =$ _____ .



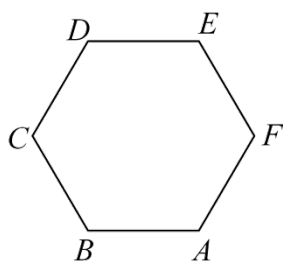
【变式 4】 . 已知一个圆与一个角的两边各有两个公共点, 且在两边上截得的两条弦正好是该圆内接正五边形的两条边, 那么这个角的大小是_____ .

题型 08 解答题

【典例 1】 . 如图, 在圆内接正六边形 $ABCDEF$ 中, 半径 $OC = 4$, $OG \perp BC$, 垂足为 G , 求这个正六边形的中心角、边长和边心距 .



【变式 1】 . 正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 8 , 求这个正六边形的周长和面积 .



【变式2】. 如图，已知正六边形 $ABCDEF$ ，请仅用无刻度的直尺按要求完成以下作图（保留作图痕迹）.

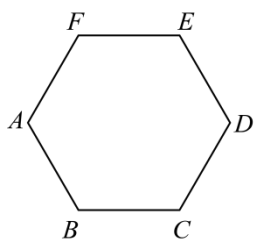


图1

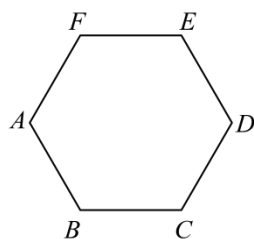
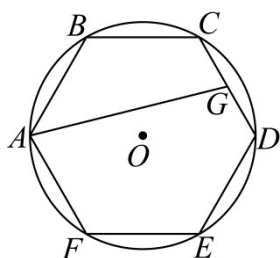


图2

(1) 在图1的正六边形 $ABCDEF$ 内部作一点 M ，连接 AM ，使得 $\sin \angle BAM = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) 在图2的正六边形 $ABCDEF$ 内部作一点 N ，连接 AN ，使得 $\tan \angle BAN = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

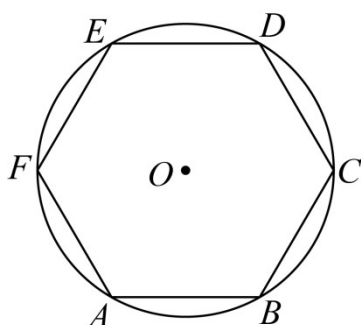
【变式3】. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$ ，半径为 2cm .



(1) 求 CD 的长度；

(2) 若 G 为 CD 的中点，连接 AG ，求 AG 的长度.

【变式4】. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$ ， $\odot O$ 半径为 4 .

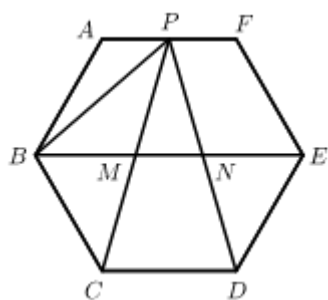


- (1)求点 O 到 AB 的距离；
 (2)求正六边形 $ABCDEF$ 的面积．

强化训练

一、单选题

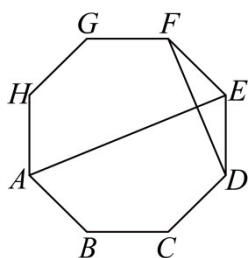
- 一个圆的半径为 4，则该圆的内接正方形的边长为 () ．
 A . 2 B . $2\sqrt{2}$ C . $4\sqrt{2}$ D . 8
- 若一个正 n 边形(n 为大于 2 的整数) 的半径为 r ，则这个正 n 变形的边心距为 ()
 A . $r \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}$ B . $r \cdot \cos \frac{360^\circ}{n}$ C . $r \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$ D . $r \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$
- $\odot O$ 是一个正 n 边形的外接圆，若 $\odot O$ 的半径与这个正 n 边形的边长相等，则 n 的值为 ()
 A . 3 B . 4 C . 6 D . 8
- 圆 O 半径长为 2，对于圆 O 的内接正六边形 $ABCDEF$ ，下列说法错误的是 ()
 A . 中心角是 60° B . 内角是 120°
 C . 边心距为 $\sqrt{3}$ D . 边长为 4
- 如果某正多边形的外接圆半径是其内切圆半径的 $\sqrt{2}$ 倍，那么这个正多边形的边数是 ()
 A . 3 B . 4 C . 5 D . 无法确定
- 如图，六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，点 P 是边 AF 的中点， PC ， PD 分别与 BE 交于点 M ， N ，则 $S_{\triangle PBM} : S_{\triangle PCD}$ 的值为 () ．



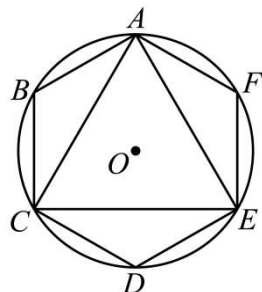
- A . $\frac{1}{2}$ B . $\frac{2}{3}$ C . $\frac{1}{4}$ D . $\frac{3}{8}$

二、填空题

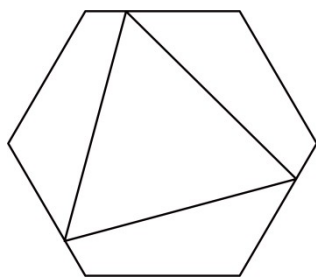
7. 正八边形的中心角等于 _____ 度 .
8. 正二十四边形中心角的余弦值为 _____ .
9. 边长为 3 的正六边形的边心距为 _____ .
10. 等边三角形面积为 a , 外接圆面积为 _____ .
11. 在正六边形中 , 若最长对角线长为 4 , 最短对角线长为 _____ .
12. 对角线条数和边数相同的正多边形的中心角的余弦值为 _____ .
13. 一个正多边形的边长为 2 , 中心角为 45° , 则这个正多边形的周长是 _____ .
14. 如果一个正六边形的边心距的长度为 $\sqrt{3}\text{cm}$, 那么它的半径的长度为 _____ cm .
15. 以锐角中正切值和余切值相等的锐角为中心角的正多边形的对角线条数为 _____ .
16. 如图 , AE, DF 是正八边形 $ABCDEFGH$ 的两条对角线 , 则 $\frac{AE}{DF} =$ _____ .



17. 如图 , 六边形 $ABCDEF$ 是 $\odot O$ 的内接正六边形 , 记 $\triangle ACE$ 的周长为 C_1 , 正六边形 $ABCDEF$ 的周长为 C_2 , 则 $\frac{C_1}{C_2}$ 的值为 _____ .

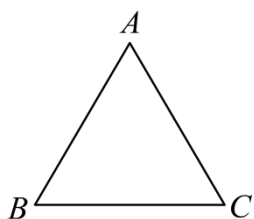


18. 正六边形是所有边相等、所有内角相等的六边形 . 在正六边形的边上取三点 , 若三点构成的三角形为等边三角形 , 则称该组成的图形为“优美图形” , 等边三角形的边长为“优美边长” . 如图 , “优美图形”中正六边形的边长为 3 , 则“优美边长”的取值范围为 _____ .

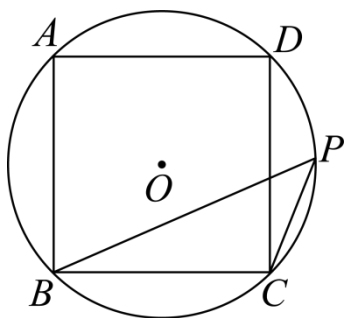


三、解答题

19. 如图，等边三角形 ABC 的边长为 10，求它的中心角、半径和边心距。



20. 如图，正方形 $ABCD$ 的外接圆为 $\odot O$ ，点 P 在劣弧 CD 上（不与点 C 重合）。



(1) 求 $\angle BPC$ 的度数；

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 8，求正方形 $ABCD$ 的边长。

21. 已知正五边形 $ABCDE$ ，请仅用无刻度的直尺作图，并完成相应的任务（保留作图痕迹，不写作法）。

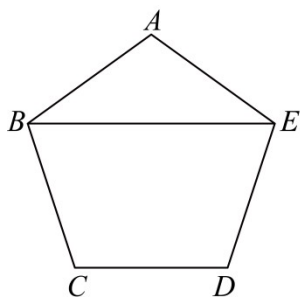


图1

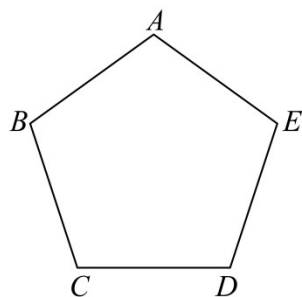


图2

【初步感知】

(1) 如图 1，请直接写出 $\angle ABE$ 的度数；

【实践探究】

(2) 请在图2中作出以BE为对角线的菱形ABME，并证明你的结论；

【拓展延伸】

(3) 请在图2正五边形ABCDE的基础上再设计一个新的正五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 。(不需要证明)

22. 如图M、N分别是 $\odot O$ 的内接正三角形ABC、正方形ABCD、正五边形ABCDE、...、正n边形ABCDEFG...的边AB、BC上的点，且 $BM = CN$ ，连接OM、ON

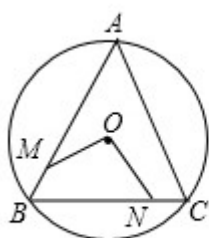


图1

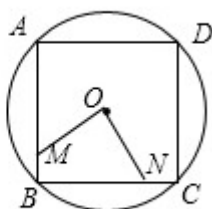


图2

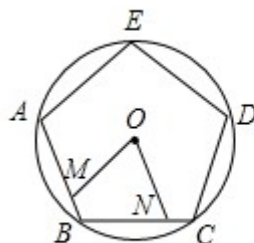
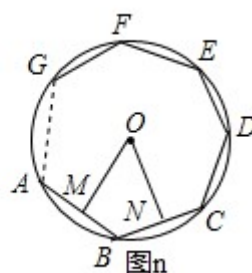


图3



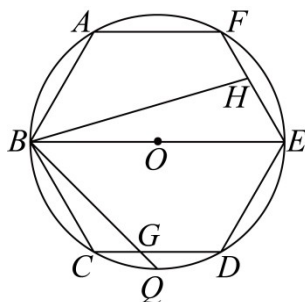
图n

(1) 求图1中 $\angle MON$ 的度数

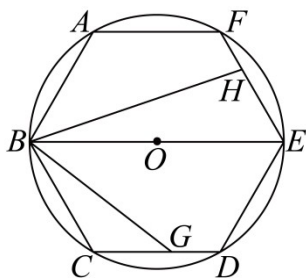
(2) 图2中 $\angle MON$ 的度数是____，图3中 $\angle MON$ 的度数是

(3) 试探究 $\angle MON$ 的度数与正n边形边数n的关系是——

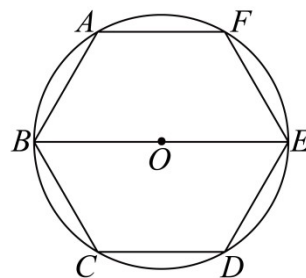
23. 如图，已知圆O是正六边形ABCDEF外接圆，直径 $BE = 8$ ，点G、H分别在射线CD、EF上（点G不与点C、D重合），且 $\angle GBH = 60^\circ$ ，设 $CG = x$ ， $EH = y$ 。



图①



图②



备用图

(1) 如图①，当直线BG经过弧CD的中点Q时，求： $\angle CBG$ 的正弦值；

(2) 如图②，当点G在边CD上时，试写出y关于x的函数关系式，并写出x的取值范围；

(3) 连接AH、EG，如果 $\triangle AFH$ 与 $\triangle DEG$ 相似，求CG的长。