

专题 01 一元二次方程 压轴题

题型归纳

题型一：一元二次方程的综合辨析 (I)

题型二：一元二次方程的综合辨析 (II)

题型三：一元二次方程的解的应用

题型四：一元二次方程的判别式的应用

题型五：一元二次方程的根与系数的关系

题型六：一元二次方程的代数应用

题型七：新定义题

题型八：换元法

题型九：一元二次方程的实际应用

题型专练

题型一：一元二次方程的综合辨析 (I)

1. 若定义：方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq c \neq 0$) 的“倒方程”. 则下列四个结论：

①如果 $x = -2$ 是 $x^2 + 2x + c = 0$ 的倒方程的一个解，则 $c = -\frac{3}{4}$.

②一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与它的倒方程有公共解.

③若一元二次方程 $ax^2 - 2x + c = 0$ 无解，则它的倒方程也无解.

④若 $ac < 0$ ，则 $ax^2 + bx + c = 0$ 与它的倒方程都有两个不相等的实数根.

上述结论正确的有 () 个

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

2. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + mx + n = 0$ ，下列说法：①若 $m - 2n = 1$ ，则方程一定有两个不相等的实数根；

②若 $m^2 - 2n < 0$ ，则方程没有实数根；③若 n 是方程 $x^2 + mx + n = 0$ 的一个根，则 $m + n = -1$ ；④若 $x = t$

$(t \neq 0)$ 是方程 $x^2 + mx + n = 0$ 的一个根，则 $x = \frac{1}{t}$ 是方程 $nx^2 + mx + 1 = 0$ 的一个根．其中正确的是 ()

- A . 1 B . 2 C . 3 D . 4

3 . 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，有下列说法：①若 $a - b + c = 0$ ，则方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 必有一个根为 -1 ；②若方程 $ax^2 + c = 0$ 有两个不相等的实根，则方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 必有两个不相等的实根；③若 c 是方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的一个根，则一定有 $ac + b + 1 = 0$ 成立．其中正确的有 ()

- A . 0 个 B . 1 个 C . 2 个 D . 3 个

题型二：一元二次方程的综合辨析 (II)

4 . 下列给出的四个命题，真命题的有 () 个

- ①若方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 两根为 -1 和 2 ，则 $2a + c = 0$ ；
②若 $a^2 - 5a + 5 = 0$ ，则 $\sqrt{(1-a)^2} = a - 1$ ；
③若 $b^2 - 4ac < 0$ ，则方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 一定无解；
④若方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个实根中有且只有一个根为 0 ，那么 $p \neq 0$ ， $q = 0$ 。

- A . 4 个 B . 3 个 C . 2 个 D . 1 个

5 . 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个实数根，且其中一个根为另一个根的 2 倍，则称这样的方程为“倍根方程”．以下关于倍根方程的说法，正确的有_____ (填序号)．

- ①方程 $x^2 - 9x + 18 = 0$ 是倍根方程；
②若 $(x+2)(mx+n) = 0$ 是倍根方程：则 $4m^2 + 5mn + n^2 = 0$ ；
③若 p, q 满足 $pq = 2$ ，则关于 x 的方程 $px^2 + 3x + q = 0$ 是倍根方程；
④若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 是倍根方程，则必有 $2b^2 = 9ac$ 。

6 . 定义：已知 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根，若 $x_1 < x_2 < 0$ ，且

$1 \leq \frac{x_1}{x_2} \leq 3$ ，则称这个方程为“友好方程”．如：一元二次方程 $x^2 + 8x + 15 = 0$ 的两根为 $x_1 = -5$ ， $x_2 = -3$ ，且

$1 \leq \frac{-5}{-3} \leq 3$ ，所以一元二次方程 $x^2 + 8x + 15 = 0$ 为“友好方程”．关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (1-p)x - p = 0$ ，

有下列两个结论：①当 $p = -\frac{2}{3}$ 时，该方程是“友好方程”；②若该方程是“友好方程”，则有且仅有 3 个整数 p

满足要求，对于这两个结论判断正确的是 ()

- A. ①②都正确 B. ①②都错误 C. ①正确，②错误 D. ①错误，②正确

题型三：一元二次方程的解的应用

7. 两个关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与 $cx^2 + bx + a = 0$ ，其中 a, b, c 是常数，且 $a + c = 0$ ，如果 $x = 2024$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根，那么下列各数中，一定是方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的根的是 ()

- A. ± 2024 B. $-\frac{1}{2024}$ C. -2024 D. $\pm \frac{1}{2024}$

8. 已知下面三个关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 1$ ， $bx^2 + cx + a = -3$ ， $cx^2 + ax + b = 2$ 恰好有一个相同的实数根，则 $a + b + c$ 的值为 _____.

题型四：一元二次方程的判别式的应用

9. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + (2a - 1)x + a - 13 = 0$ 至少有一个整数根，且 a 为正整数，则满足条件的 a 共有 _____ 个.

10. 一元二次方程的根有 3 种情况，分别是两个不相等的实数根，两个相等的实数根以及没有实数根.

基于上述认识，我们继续探索“ $M \cdot N = 0$ ”型的方程 (M, N 都是只含 x 的整式) 的根的情况.

(1) 当 $M = x^2 + 2x - 3$ ， $N = x - 1$ 时，该类型方程的根的情况是 ()

- A. 有三个实数根，它们各不相等
B. 有三个实数根，有且只有两个根相等
C. 有三个实数根，它们都相等
D. 没有实数根

(2) 下列“ $M \cdot N = 0$ ”型的方程：

① $(x^2 - 2x + 1)(2x^2 - 4x + 2) = 0$ ；

② $(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 6x + 9) = 0$ ；

③ $(x^2 + 4x)(x^2 - 4x) = 0$ ；

$$\textcircled{4} (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 8x + 15) = 0 ;$$

$$\textcircled{5} (x^2 - 36)(x^2 - 12x + 36) = 0 .$$

至少有两个相等的实数根的方程是_ (填序号) .

(3) 当 $M = x^2 + 3x + c$, $N = x^2 - 3x + c$ (c 是常数) 时 , 请写出该类型方程的根的情况及对应的 c 的取值范围 .

题型五：一元二次方程的根与系数的关系

11 . 关于 x 的方程 $ax^2 + (a+2)x + 9a = 0$ 有两个不等的实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < 1 < x_2$, 那么 a 的取值范围是 ()

A . $-\frac{2}{7} < a < \frac{2}{5}$ B . $a > \frac{2}{5}$ C . $a < -\frac{2}{7}$ D . $-\frac{2}{11} < a < 0$

12 . 对于一切不小于 2 的自然数 n , 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (n+2)x - 2n^2 = 0$ 的两个根为 $a_n, b_n (n \geq 2)$,

则 $\frac{1}{(a_2 - 2)(b_2 - 2)} + \frac{1}{(a_3 - 2)(b_3 - 2)} + \cdots + \frac{1}{(a_{2021} - 2)(b_{2021} - 2)} = \underline{\hspace{2cm}} .$

13 . 设 a, b, c, d 是四个不同的实数 , 如果 a, b 是方程 $x^2 - 10cx - 11d = 0$ 的两根 , c, d 是方程 $x^2 - 10ax - 11b = 0$ 的两根 , 那么 $a + b + c + d$ 的值为_____ .

14 . 韦达是法国杰出的数学家 , 其贡献之一是发现了多项式方程根与系数的关系 , 如一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两实数根分别为 x_1, x_2 , 则方程可写成 $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, 即

$ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2 = 0$, 容易发现根与系数的关系 : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a}$. 设一元三次方程

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 三个非零实数根分别 x_1, x_2, x_3 , 现给出以下结论 :

① $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, ② $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$; ③ $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$; ④ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{c}{d}$, 其中正确的是_____

(写出所有正确结论的序号) .

15 . 一元二次方程 $ax^2 + (b-2)x - 4 = 0$ 两根分别为 x_1, x_2 且 ($x_1 < x_2$)

(1) 若此方程一根为 1 , 则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 当 $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ 时 , 求 a, b 的值 ;

(3) 若 $-2at = b$, $x_1 = m$, $x_2 = n$ 且 $n \geq \frac{2}{a}$ 时 , 求证 : $t \leq \frac{m}{2}$.

16. 阅读材料：

材料¹：法国数学家弗朗索瓦·韦达于1615年在著作《论方程的识别与订正》中建立了方程根与系数的关系，提出一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$, $b^2-4ac \geq 0$) 的两根 x_1, x_2 有如下的关系（韦达定理）：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a};$$

材料²：如果实数 m, n 满足 $m^2-m-1=0$ 、 $n^2-n-1=0$ ，且 $m \neq n$ ，则可利用根的定义构造一元二次方程 $x^2-x-1=0$ ，然后将 m, n 看作是此方程的两个不相等实数根去解决相关问题。

请根据上述材料解决下面问题：

(1) 若实数 a, b 满足： $a^2+3a-5=0$ ， $b^2+3b-5=0$ ($a \neq b$) 则 $a+b=$ _____， $ab=$ _____；

(2) 若 x_1, x_2 是方程 $x^2-6x+k+3=0$ 两个不等实数根，且满足 $5|x_1|=x_2+6$ ，求 k 的值；

(3) 已知实数 m, n, t 满足： $m^2-4m=7+t$ ， $\frac{1}{4}n^2-n=\frac{1}{4}(7+t)$ ，且 $m < 0 < n$ ，求 $(n^2+1)(4m+8+t)$ 的取值范围。

题型六：一元二次方程的代数应用

17. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 5x+2 > a \\ x+14 \leq 3x+6 \end{cases}$ 有且仅有3个整数解，且关于 x 的一元二次方程

$x^2-(2a-1)x+a^2-8=0$ 没有实数根，则符合条件的整数 a 的和为_____。

18. 若整数 a 使得关于 x 的一元二次方程 $(a+2)x^2+2ax+a-1=0$ 有实数根，且关于 x 的不等式组

$\begin{cases} a-x < 0 \\ x+2 \leq \frac{1}{2}(x+7) \end{cases}$ 有解且最多有6个整数解，则符合条件的整数 a 为_____。

题型七：新定义题

19. 定义 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数，如： $[2.3]=2$ ， $[-0.32]=-1$ ， $[-2]=-2$ 。则方程 $x^2+3[x]=0$ 的解为（ ）

A. $-2\sqrt{3}$ 或 -3 或 0

B. $-\sqrt{3}$ 或 $-2\sqrt{3}$ 或 0

C. -3 或 $-\sqrt{6}$ 或 0

D. $-\sqrt{6}$ 或 $-\sqrt{3}$ 或 0

20. 将关于 x 的一元二次方程 $x^2-px+q=0$ 变形为 $x^2=px-q$ ，就可以将 x^2 表示为关于 x 的一次多项式，

从而达到“降次”的目的，又如 $x^3 = x \cdot x^2 = x(px - q) = \dots$ ，我们将这种方法称为“降次法”，通过这种方法可以化简次数较高的代数式．根据“降次法”，已知： $x^2 - x - 1 = 0$ ，且 $x > 0$ ，则 $x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ 的值为_____．

21．若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根均为整数，则称方程为“快乐方程”．通过计算发现，任何一个“快乐方程”的判别式 $b^2 - 4ac$ 一定为完全平方数．现规定 $F(a, b, c) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ 为该“快乐方程”的“快乐数”．例如“快乐方程” $x^2 - 3x - 4 = 0$ ，的两根均为整数，其“快乐数” $F(1, -3, -4) = \frac{4 \times 1 \times (-4) - (-3)^2}{4 \times 1} = -\frac{25}{4}$ ，若有另一个“快乐方程” $px^2 + qx + r = 0 (p \neq 0)$ 的“快乐数” $F(p, q, r)$ ，且满足 $r \cdot F(a, b, c) = c \cdot F(p, q, r)$ ，则称 $F(a, b, c)$ 与 $F(p, q, r)$ 互为“开心数”．

(1)“快乐方程” $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的“快乐数”为_____；

(2)若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m - 1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ (m 为整数，且 $1 < m < 6$) 是“快乐方程”，求 m 的值，并求该方程的“快乐数”；

(3)若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + m + 1 = 0$ 与 $x^2 - (n + 2)x + 2n = 0$ (m 、 n 均为整数) 都是“快乐方程”，且其“快乐数”互为“开心数”，求 n 的值．

题型八：换元法

22．阅读下列材料：

解方程 $(x^2 - 1)^2 - 5(x^2 - 1) + 6 = 0$ ，

解：设 $x^2 - 1 = y$ ，则原方程化为 $y^2 - 5y + 6 = 0$ ，

解得 $y_1 = 2$ ， $y_2 = 3$ ．

当 $y = 2$ 时， $x^2 - 1 = 2$ ，解得： $x = \pm\sqrt{3}$ ；

当 $y = 3$ 时， $x^2 - 1 = 3$ ，解得 $x = \pm 2$ ．

∴原方程的解为： $x_1 = \sqrt{3}$ ， $x_2 = -\sqrt{3}$ ， $x_3 = 2$ ， $x_4 = -2$ ．

以上解一元二次方程的方法叫做换元法，通过换元法达到了降次或者简化方程的目的，这体现了数学中的转化思想．

(1)请用上述方法解下列方程： $(2x - 5)^2 - 4(2x - 5) + 3 = 0$ ；

(2) 已知实数 x, y 满足 $(x^2 + y^2 + 3)^2 - 7x^2 - 7y^2 - 21 = 8$ ，求 $x^2 + y^2$ 的值。

23. 问题：已知方程 $x^2 + x - 1 = 0$ ，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的 2 倍。

解：设所求方程的根为 y ，则 $y = 2x$ ，所以 $x = \frac{y}{2}$ ，把 $x = \frac{y}{2}$ ，代入已知方程，得 $\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y}{2} - 1 = 0$ 。

化简，得 $y^2 + 2y - 4 = 0$ ，故所求方程为 $y^2 + 2y - 4 = 0$ 。

这种利用方程根的代换求新方程的方法，我们称为“换根法”。

请用阅读材料提供的“换根法”求新方程（要求：把所求方程化为一般形式）。

(1) 已知方程 $x^2 + 2x - 1 = 0$ ，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的相反数，则所求方程为 _____；

(2) 已知关于 y 的一元二次方程 $cy^2 + by + a = 0$ 的根 ($c \neq 0$ ，有两个不等于零的实数根) 分别是某个已知一元二次方程的根的倒数，求该已知的一元二次方程。

(3) 已知关于 x 的一元二次方程 $(m^2 + 4)x^2 + (4m + 8)x + 4 = 0$ ($m \leq 15$) 有两个不等于零的实数根，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的倒数且它的两个根都为整数。

题型九：一元二次方程的实际应用

24. 某种商品的标价为 200 元/件，经过两次降价后的价格为 162 元/件，并且两次降价的百分率相同。

(1) 求该种商品每次降价的百分率；

(2) 若该种商品进价为 156 元/件，若以 200 元/件售出，平均每天能售出 20 件，另外每天需支付其他各种费用 150 元，在每件降价幅度不超过 10 元的情况下，若每件降价 1 元，则每天可多售出 5 件，如果每天盈利 1450 元，每件应降价多少元？

25. 某汽车租赁公司用 650 万元资金购进 A、B 两种型号小轿车共 30 辆，已知 A 型车每辆 25 万元，比每辆 B 型车贵 10 万元。

(1) 求该公司购进 A、B 两种型号的轿车数量分别是多少；

(2) 据统计，每辆 A 型车的月租金为 4000 元时，可全部租出，每辆车的月租金每增加 300 元，未租出的车将增加 1 辆。B 型车的月租金为每辆 3000 元，因价格相对较低，每月均能全部租出。租出的车每辆每月的平均维护费为 500 元，未租出的车辆每月平均维护费为 100 元。规定每辆车月租金不能超过 5000 元，当每

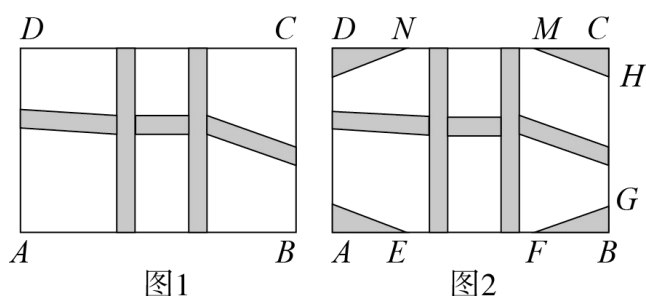
辆 A 型车的月租金定为多少元时，租赁公司的月收益（租金收入扣除维护费）可达到 9.95 万元？

26. 为奠基孩子深厚的人文底蕴，某中学初一年级各班家委会准备去书店购买《乐山乐水》、《艾青诗选》和《朝花夕拾》这三本书。书店老板从图书批发市场分别以 10 元/本、20 元/本、12 元/本的价格购进《乐山乐水》、《艾青诗选》和《朝花夕拾》这三本书共 4500 本，已知《乐山乐水》的数量是《朝花夕拾》的数量的 3 倍，共花费 52000 元。

(1) 求书店老板分别购进《乐山乐水》、《艾青诗选》和《朝花夕拾》这三本书各多少本？

(2) 该书店老板一开始分别以 25 元/本、60 元/本、30 元/本的价格售卖《乐山乐水》、《艾青诗选》和《朝花夕拾》这三本书，每天能售卖《乐山乐水》120 本，《艾青诗选》50 本，《朝花夕拾》20 本，后面经调查发现，不少学生早已购买《朝花夕拾》，于是他准备在原来售价的基础上，《乐山乐水》的售价不变，《艾青诗选》的每本售价提升原来的 $\frac{a}{15}$ ，《朝花夕拾》每本降价 $\frac{a}{5}$ 元，调整售价后，《乐山乐水》每天多售卖 $\frac{a}{3}$ 本，《艾青诗选》每天多售卖 $\frac{a}{4}$ 本，《朝花夕拾》的售卖量每天保持不变，这样一天能获利 6836 元，求 a 的值。

27. 某科研单位准备将院内一块长 30m，宽 20m 的长方形 ABCD 空地，建成一个长方形花园，要求在花园内修两条纵向平行和一条横向弯折的小道（小道进出口的宽度相等，且每段小道均为平行四边形），剩余的地方种植花草。



(1) 如图 1，要使种植花草的面积为 532m²，求小道进出口的宽度为多少米；

(2) 现将长方形花园的四个角建成休闲活动区，如图 2 所示， $\triangle AEQ$ 、 $\triangle BGF$ 、 $\triangle CMH$ 、 $\triangle DPN$ 均为全等的直角三角形，其中 $AE = BF = CM = DN$ ，设 $EF = HG = MN = PQ = a$ 米，竖向道路出口和横向弯折道路出口的宽度都为 2m，且竖向道路出口位于 MN 和 EF 之间，横向弯折道路出口位于 PQ 和 GH 之间。

① 求剩余的种植花草区域的面积（用含有 a 的代数式表示）；

②如果种植花草区域的建造成本是 100 元/米²、建造花草区域的总成本为 42000 元，求 a 的值．