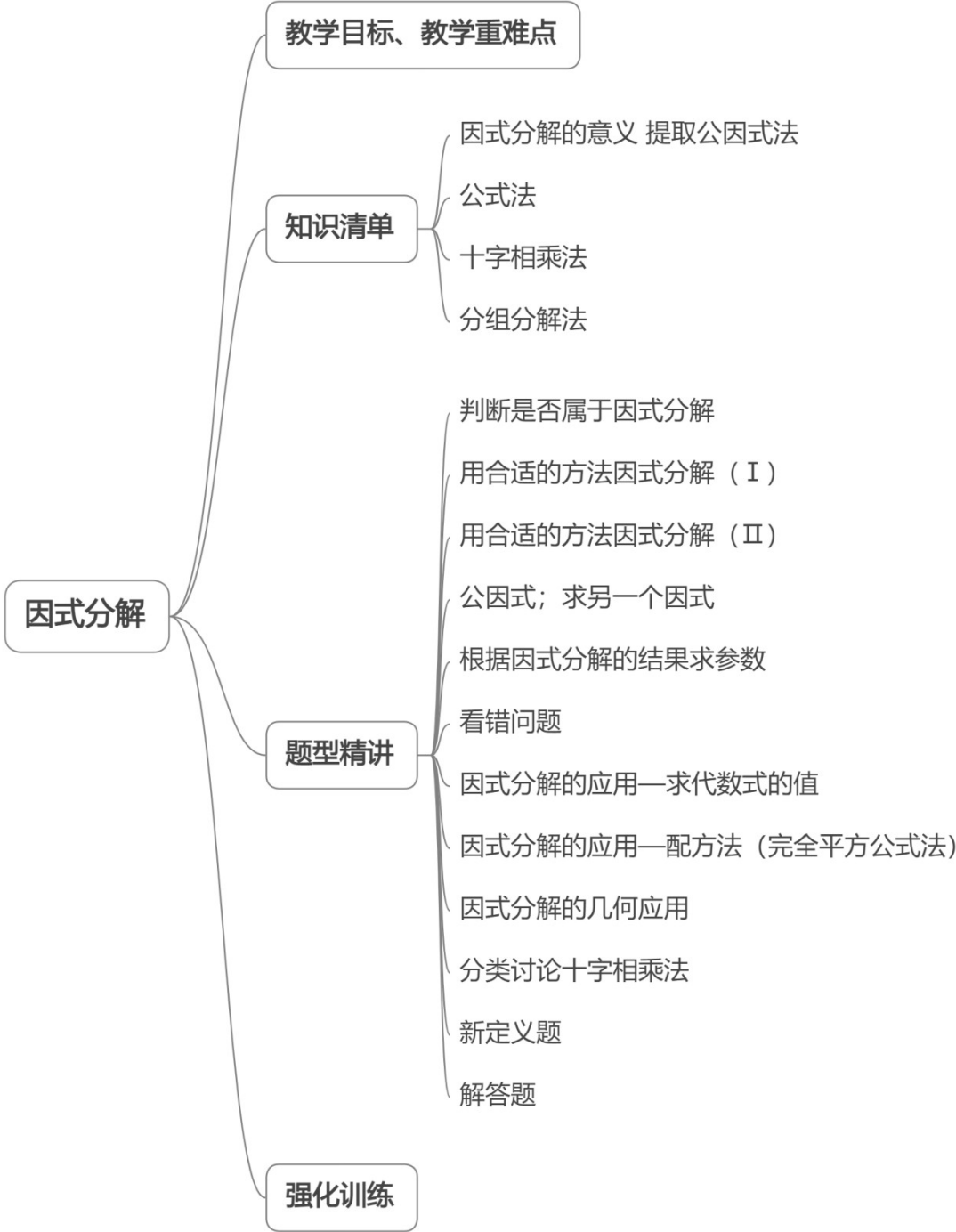


# 第 12 章 因式分解

## 内容概览



## 教学目标、教学重难点

|      |               |
|------|---------------|
| 教学目标 | 1. 了解因式分解的概念； |
|------|---------------|

|              |                                                                                                                                  |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|              | 2. 会用提公因式法和公式法对整式进行因式分解；<br>3. 会用十字相乘法和分组分解法对整式进行因式分解；<br>4. 因式分解的应用。                                                            |
| <b>教学重难点</b> | 1.重点<br>(1) 判断是否属于因式分解；<br>(2) 选择合适的方法进行因式分解；<br>(3) 利用因式分解求参数。<br>2.难点<br>(1) 因式分解有关化简、变形、求值等；<br>(2) 因式分解的综合应用；<br>(3) 分类讨论思想。 |

## 知识清单

### 知识点1 因式分解的意义 提取公因式法

**1.因式分解**：几个整式相乘，其中每个整式都称为积的因式.把含多个项的整式化为几个次数更低的整式的积，叫作把这个整式**因式分解**.

如： $x^2+x=x(x+1)$ ； $x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$ .

**2.因式**：其中， $x$ 、 $x+1$  是  $x^2+x$  的因式， $x^2+1$ 、 $x+1$ 、 $x-1$  是  $x^4-1$  的因式.

**要点：**

因式分解一般要分解到每个因式都不能再分解为止，如在  $x^4-1$  因式分解的过程中，因式  $x^2+1$  不能继续因式分解， $x^2-1$  还能继续因式分解为  $(x+1)(x-1)$ .

#### 3.公因式

①**观察**： $ma+mb+mc$  的每一项，你有什么发现？

我们把含多个项的整式中的每一项都含有的公共的因式叫作这个整式各项的**公因式**.

由  $m(a+b+c)=ma+mb+mc$ , 可得  $ma+mb+mc=m(a+b+c)$ .

这就将  $ma+mb+mc$  分解成两个整式的积.其中， **$m$**  是  $ma+mb+mc$  各项的**公因式**.

**要点：**

(1) 公因式必须是每一项中都含有的因式.

(2) 公因式可以是一个数,也可以是一个字母,还可以是一个整式.

(3) 公因式的确定分为数字系数和字母两部分:

①公因式的系数是各项系数的最大公约数.②字母是各项中相同的字母,指数取各字母指数最低的.

#### 4.提取公因式法

如果含多个项的整式的各项含有非常数的公因式,那么可以把这个公因式提取出来,从而将这个整式化为两个次数更低的整式的积,这种因式分解的方法叫作**提取公因式法**.

**要点:**

(1) 提取公因式法分解因式实际上是逆用乘法分配律,

$$\text{即 } ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

(2) 用提取公因式法分解因式的关键是准确找出整式各项的公因式.

(3) 当整式第一项的系数是负数时,通常先提出“-”号,使括号内的第一项的系数变为正数,同时整式的各项都要变号.

(4) 用提取公因式法分解因式时,若整式的某项与公因式相等或它们的和为零,则提取公因式后,该项变为:“+1”或“-1”,不要把该项漏掉,或认为是0而出现错误.

#### 【即学即练】

1. 下列等式从左到右的变形,属于因式分解的是 ( )

A.  $(a+1)(a-1)=a^2-1$

B.  $a^2+2a+1=a(a+2)+1$

C.  $am+bm=m(a+b)$

D.  $a^2+4=(a+2)^2$

2. 下列多项式中,不能用提公因式法分解因式的是 ( )

A.  $6x^2-3y$

B.  $x^2y-xy^2$

C.  $x^2+2xy+y^2$

D.  $16x^3y^2z+8x^2y^3$

3. 把  $9mn+6mn^2$  分解因式,应提取的公因式是 ( )

A.  $3m$

B.  $mn$

C.  $3mn$

D.  $mn^2$

4. 若多项式  $-12x^2y^3+16x^3y^2+4x^2y^2$  分解因式,其中一个因式是  $-4x^2y^2$ ,则另一个因式是 ( )

A.  $3y+4x-1$

B.  $3y-4x-1$

C.  $3y-4x+1$

D.  $3y-4x$

5. 因式分解:

(1)  $10ab^2c+6ac^2+2ac$  ;

(2)  $2m(a-b)-3n(b-a)$  ;

$$(3) 2a(a-3)^2 - 6a^2(3-a) - 8a(a-3)$$

## 知识点 2 公式法

### 1. 平方差公式

平方差公式  $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$  从左到右的变形是整式的乘法，从右到左的变形是因式分解。

如果一个整式符合平方差公式的特征，那么就可以用平方差公式把它因式分解。

要点：

- (1) 当整式的各项含有公因式时，通常先提取公因式，然后再考虑是否能进一步因式分解。
- (2) 因式分解要分解到每个因式都不能再分解为止。

### 2. 完全平方公式

完全平方公式  $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ,  $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$  从左到右的变形是整式的乘法，从右到左的变形是因式分解。如果一个整式符合完全平方公式的特征，那么就可以用完全平方公式把它因式分解。

举例分析：

因式分解： $9x^2-12x+4$

$$9x^2-12x+4=(3x)^2-2\cdot(3x)\cdot 2+2^2=(3x-2)^2.$$

$\downarrow$   
 $a^2$

$-2$

$\downarrow$   
 $a$

$\downarrow \quad \downarrow$   
 $b+b^2$

$\downarrow \quad \downarrow$   
 $= (a-b)^2$

要点：

(1) 完全平方公式的特点：左边是二次三项式，是这两数的平方和加（或减）这两数之积的 2 倍。右边是两数的和（或差）的平方。

(2) 完全平方公式有两个，二者不能互相代替，注意二者的使用条件。

**3. 公式法：**根据因式分解和整式乘法的关系，可以用平方差公式和完全平方公式将具有特殊形式的整式因式分解。像这样，根据常用的乘法公式将整式因式分解的方法叫作公式法。

### 4. 因式分解步骤

- (1) 如果整式的各项有公因式，先提取公因式；
- (2) 如果各项没有公因式那就尝试用公式法；
- (3) 如用上述方法也不能分解，那么就得选择分组或其它方法来分解。

### 5. 因式分解注意事项

- (1) 因式分解的对象是整式；
- (2) 最终把整式化成乘积形式；

(3) 结果要彻底，即分解到不能再分解为止

### 【即学即练】

1. 下列多项式中能用平方差公式分解因式的是 ( )

- A.  $a^2 + (-b)^2$       B.  $5m^2 - 20mn$       C.  $-x^2 - y^2$       D.  $-x^2 + 9$

2. 多项式  $a^2 - 2ab + b^2$ ,  $a^2 - 2ab - b^2$ ,  $(a+b)^2 + 4(a+b) + 4$  中，能用完全平方公式分解因式的有 ( )

- A. 0 个      B. 1 个      C. 2 个      D. 3 个

3. 分解因式： $ab^2 - 2ab + a =$ \_\_\_\_\_.

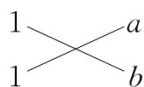
4. 分解因式： $3a^2 - 27 =$ \_\_\_\_\_.

## 知识点 3 十字相乘法

### 1. 十字相乘法

一般地，如果二次三项式  $x^2 + px + q = x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ ,

那么这样的因式分解的过程可以表示为



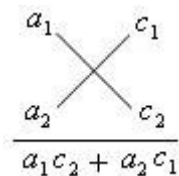
像这样，通过适当地分解系数，把二次三项式因式分解的方法叫作十字相乘法。

要点：

常数项的因数分解往往有多种情况，此时选择的关键在于判断哪两个因数的和恰好等于一次项的系数。

### 2. 二次项系数不为 1 的十字相乘法

在二次三项式  $ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 中，如果二次项系数  $a$  可以分解成两个因数之积，即  $a = a_1a_2$ ，常数项  $c$  可以分解成两个因数之积，即  $c = c_1c_2$ ，把  $a_1, a_2, c_1, c_2$  排列如下：



按斜线交叉相乘，再相加，得到  $a_1c_2 + a_2c_1$ ，若它正好等于二次三项式  $ax^2 + bx + c$  的一次项系数  $b$ ，即  $a_1c_2 + a_2c_1 = b$ ，那么二次三项式就可以分解为两个因式  $a_1x + c_1$  与  $a_2x + c_2$  之积，即  $ax^2 + bx + c = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$ 。

要点：

(1) 分解思路为“看两端，凑中间”

(2) 二次项系数  $a$  一般都化为正数，如果是负数，则提出负号，分解括号里面的二次三项式，最后结果

不要忘记把提出的负号添上.

### 【即学即练】

- 代数式  $x^2 - 5x + 6$  因式分解的结果的是 ( )  
 A.  $(x-2)(x-3)$     B.  $(x-1)(x+6)$     C.  $(x+2)(x+3)$     D.  $(x+1)(x-6)$
- 因式分解： $x^2 - 17x + 52 = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- 已知多项式  $x^2 + 6x + k$ ，分解后有一个因式为  $(x-1)$ ，那么  $k$  的值可以是 ( )  
 A. 5；                      B. -5；                      C. 7；                      D. -7.
- 要使  $x^2 + mx - 6$  能在有理数的范围内因式分解，则整数  $m$  的值有 ( )  
 A. 2 个                      B. 3 个                      C. 4 个                      D. 5 个

## 知识点 4 分组分解法

### 1. 分组分解法

对于一个整式的整体，若不能直接运用提公因式法和公式法进行因式分解时，可考虑分步处理的方法，即把这个整式分成几组，先对各组分别分解因式，然后再对整体作因式分解——分组分解法. 即先对题目进行分组，然后再分解因式.

**要点：**分组分解法分解因式常用的思路有：

| 方法    | 分类 | 分组方法              | 特点                          |
|-------|----|-------------------|-----------------------------|
| 分组分解法 | 四项 | 二项、二项             | ①按字母分组 ②按系数分组<br>③符合公式的两项分组 |
|       |    | 三项、一项             | 先完全平方公式后平方差公式               |
|       | 五项 | 三项、二项             | 各组之间有公因式                    |
|       | 六项 | 三项、三项<br>二项、二项、二项 | 各组之间有公因式                    |
|       |    | 三项、二项、一项          | 可化为二次三项式                    |

### 2. 添、拆项法

把整式的某一项拆开或填补上互为相反数的两项（或几项），使原式适合于提公因式法、公式法或分组分解法进行分解. 要注意，必须在与原整式相等的原则下进行变形.

添、拆项法分解因式需要一定的技巧性，在仔细观察题目后可先尝试进行添、拆项，在反复尝试中熟练掌握技巧和方法.

### 【即学即练】

- 因式分解： $xm + xn + ym + yn = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 因式分解： $8ax - by + 4ay - 2bx$

3. 因式分解： $1 - x^2 + 2xy - y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 已知 $m^2 + 2mn + 2n^2 - 6n + 9 = 0$ ，求 $m, n$ 的值.

## 题型精讲

### 题型 01 判断是否属于因式分解

【典例 1】. 下列等式从左到右的变形是因式分解的是 ( )

A.  $150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$

B.  $2x(x+1) = 2x^2 + 2x$

C.  $(a-1)(b-1) = (1-a)(1-b)$

D.  $a^2 + 8a + 16 = (a+4)^2$

【变式 1】. 下列等式中，从左到右的变形是因式分解的是 ( )

A.  $x(x-2) = x^2 - 2x$

B.  $a^2 + 4a - 21 = a(a+4) - 21$

C.  $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$  D.  $x+2 = x\left(1+\frac{2}{x}\right)$

【变式 2】. 下列各式从左到右的变形，是因式分解的有 ( )

①  $12xy^3 = 2xy \cdot 6y^2$  ;

②  $x^2 - 6xy + 5y^2 = x(x-6y) + 5y^2$  ;

③  $(-2x+3y)(2x+3y) = -4x^2 + 9y^2$  ;

④  $3x - 6y = 3(x-2y)$  ;

⑤  $3x^2y - xy = xy(3x-1)$  ;

⑥  $1+x+\frac{1}{4x^2} = \left(1+\frac{1}{2x}\right)^2$  .

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

### 题型 02 用合适的方法因式分解 (I)

【典例 1】. 因式分解

(1)  $a^2b - 2ab^2 + ab$  ;

(2)  $2ax^2 - 4axy + 2ay^2$  ;

$$(3) a^2(x-y) + 16(y-x) ;$$

$$(4) (x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2 .$$

**【变式 1】** . 用十字相乘法分解因式：

$$(1) a^2 + 2a - 3 ;$$

$$(2) 2x^2 - 6x - 8 ;$$

$$(3) (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 .$$

**【变式 2】** . 分解因式： $x^2 + xy - 6y^2 - 2x + 19y - 15$

### 题型 03 用合适的方法因式分解 ( II )

**【典例 1】** . 分解因式： $3m^3 - 12m = \underline{\hspace{2cm}}$  .

**【变式 1】** . 因式分解： $3x^4 - 48 = \underline{\hspace{2cm}}$  .

**【变式 2】** . 因式分解

$$(1) -2x^3 + 16x^2 - 24x$$

$$(2) a^2 - b^2 - x^2 + y^2 - 2ay + 2bx$$

**【变式 3】** . 因式分解： $x^{n+1} - 3x^n - 10x^{n-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

### 题型 04 利用因式分解简便计算

**【典例 1】** . 利用因式分解计算：

$$(1) 101^2 + 49^2 + 101 \times 98 ;$$

$$(2) 800^2 - 1600 \times 798 + 798^2 .$$

**【变式 1】** . 简便计算：

$$(1) 9999 \times 10001 - 10000^2 ;$$

$$(2) 99999^2 + 199999 .$$

**【变式 2】** . 利用因式分解简化运算：

$$(1) 2025 + 2025^2 - 2025 \times 2026 ;$$

$$(2) 56.2 \times 2026 - 462 \times 202.6 .$$

### 题型 05 公因式；求另一个因式

**【典例1】** . 式子  $n^2 - 1$  与  $n^2 + n$  的公因式是 ( )

- A .  $n + 1$                       B .  $n^2$                       C .  $n$                       D .  $n - 1$

**【变式1】** . 多项式  $m^2 - 2m$  与多项式  $m^2 - 4m + 4$  的公因式是 ( )

- A .  $m + 2$                       B .  $m - 2$                       C .  $(m - 2)(m + 2)$                       D .  $(m - 2)^2$

**【变式2】** . 把  $-9x^3 + 6x^2 - 3x$  因式分解时，提出公因式后，另一个因式是 ( )

- A .  $3x^2 - 2x$                       B .  $3x^2 - 2x - 1$   
C .  $-9x^2 + 6x$                       D .  $3x^2 - 2x + 1$

**【变式3】** . 若多项式  $-12x^2y^3 + 16x^3y^2 + 4x^2y^2$  分解因式，其中一个因式是  $-4x^2y^2$ ，则另一个因式是 ( )

- A .  $3y + 4x - 1$                       B .  $3y - 4x - 1$                       C .  $3y - 4x + 1$                       D .  $3y - 4x$

## 题型 06 根据因式分解的结果求参数

**【典例1】** . 把多项式  $x^2 - x + k$  分解成两个因式  $(x - m)(x - 5)$  的积，那么  $k$ 、 $m$  的值分别是 ( )

- A .  $k = 20$  ,  $m = -4$                       B .  $k = 20$  ,  $m = 4$   
C .  $k = -20$  ,  $m = -4$                       D .  $k = -20$  ,  $m = 4$

**【变式1】** . 若多项式  $2x^2 + kx - 24$  因式分解后的结果是  $(ax + 3)(x - 8)$ ，则  $k$  的值是 ( )

- A . 10                      B . -12                      C . -13                      D . 13

## 题型 07 看错问题

**【典例1】** . 甲乙两人完成因式分解  $x^2 + ax + b$  时，甲看错了  $a$  的值，分解的结果是  $(x + 6)(x - 2)$ ，乙看错了  $b$  的值，分解结果为  $(x - 8)(x + 4)$ ，那么  $x^2 + ax + b$  分解因式正确的结果为\_\_\_\_\_ .

**【变式1】** . 两位同学将一个二次三项式  $ax^2 + bx + c$  分解因式时，其中一位同学因看错了一次项系数而分解成  $3(x - 1)(x + 2)$ ，另一位同学因看错了常数项而分解成  $3(x + 2)(x - 3)$ ，则原来的多项式为

**【变式2】** . 因式分解  $x^2 + ax + b$ ，甲看错了  $a$  的值，分解的结果是  $(x + 6)(x - 2)$ ，乙看错了  $b$  的值，分解的结果为  $(x - 8)(x + 4)$ ，那么  $x^2 + ax + b$  分解因式正确的结果为 ( )

- A .  $(x + 3)(x - 4)$                       B .  $(x + 4)(x - 3)$   
C .  $(x + 6)(x - 2)$                       D .  $(x + 2)(x - 6)$

## 题型 08 因式分解的应用—求代数式的值

【典例 1】. 已知  $a - b = 1$ ，则  $a^2 - b^2 - 2b$  的值为\_\_\_\_\_.

【变式 1】. 已知： $a^2 + b^2 - 4a - 6b + 13 = 0$ ，求  $5a - 10b + 3$  的值\_\_\_\_\_.

【变式 2】. 如果  $x - 2y + 2 = 0$ ，那么  $\frac{1}{4}x^2 - xy + y^2 - 3 =$ \_\_\_\_\_.

【变式 3】. 若  $y - x = -1$ ， $xy = 4$ ，则代数式  $-\frac{1}{2}x^3y + x^2y^2 - \frac{1}{2}xy^3$  的值是\_\_\_\_\_.

## 题型 09 因式分解的应用—配方法（完全平方公式法）

【典例 1】. 已知  $A = x^2 + 6y + 1$ ， $B = -y^2 + 2x - 9$ ，且  $x \neq 1$ ， $y \neq -3$ ，则  $A$ ， $B$  的大小关系为  $A$  \_\_\_\_\_  $B$  .  
( 填“>”“=”或“<” )

【变式 1】. 若  $M = 3x^2 - 8xy + 9y^2 - 4x + 6y + 13$ ，则  $M$  的值一定是 ( )

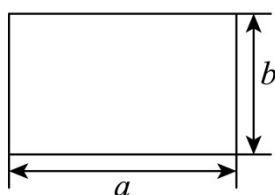
- A . 0                                  B . 负数                                  C . 正数                                  D . 非负数

【变式 2】. 无论  $a$ 、 $b$  为任何实数，代数式  $a^2 + b^2 - 4a + 6b + 13$  的值总是 ( )

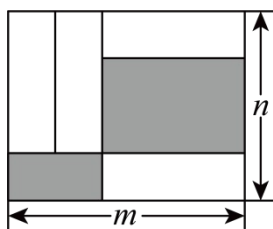
- A . 非正数                                  B . 非负数                                  C . 0                                  D . 正数

## 题型 10 因式分解的几何应用

【典例 1】. 如图，长方形的长宽分别为  $a$ ， $b$ ，且  $a$  比  $b$  大 3，面积为 10，则  $a^2b - ab^2$  的值为\_\_\_\_\_.



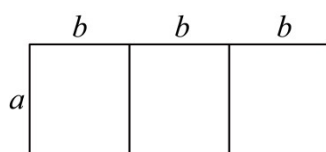
【变式 1】. 四个长宽分别为  $a$ ， $b$  的小长方形（白色的）按如图所示的方式放置，形成了一个长、宽分别为  $m$ 、 $n$  的大长方形，则下列各式不能表示图中阴影部分的面积是 ( )



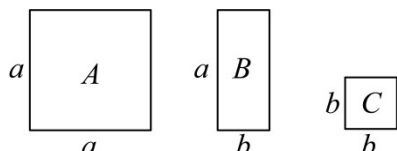
- A .  $mn - 4ab$                                   B .  $mn - 2ab - am$                                   C .  $an + 2bn - 4ab$                                   D .  $a^2 - 2ab - am + mn$

【变式 2】. 如图，将三个边长分别为  $a$ ， $b$  的小长方形组成一个大长方形，已知大长方形的周长为 12，

面积为 7 . 则代数式  $a^3b + 6a^2b^2 + 9ab^3$  的值是\_\_\_\_\_ .



**【变式 3】** . 如图有三种类型卡片  $A$ 、 $B$ 、 $C$  , 现用  $A$  型卡片 3 张 ,  $B$  型卡片  $k$  张 ,  $C$  型卡片 4 张一起拼成一个长方形 . 当  $k =$  \_\_\_\_\_ 时 , 这个长方形的周长最长为\_\_\_\_\_ .



### 题型 11 分类讨论十字相乘法

**【典例 1】** . 二次三项式  $x^2 - 12x + k$  在整数范围内可以分解成两个一次因式 , 则  $k$  的值的个数有\_\_\_\_\_个 .

**【变式 1】** . 已知  $x^2 - ax - 24$  在整数范围内可以分解因式 , 则整数  $a$  的值有\_\_\_\_\_个

### 题型 12 新定义题

**【典例 1】** . 定义 : 如果一个正整数能表示为两个正整数  $m$  ,  $n$  的平方差 , 且  $m - n = 2$  , 则称这个正整数为“智慧优数” . 例如 , 当  $m = 3$  ,  $n = 1$  时 ,  $8 = 3^2 - 1^2$  , 8 是一个智慧优数 , 若将智慧优数从小到大排列 , 第 2024 个智慧优数是\_\_\_\_\_ .

**【变式 1】** . 如果一个数是某个整数的平方 , 那么这个数称为完全平方数 . 已知  $4n^2 + 10n + 1949$  是完全平方数 , 则整数  $n$  的最大值是\_\_\_\_\_ .

### 题型 13 解答题

**【典例 1】** . 阅读下列解题的过程 .

分解因式 :  $x^4 + 64$

解 :  $x^4 + 64 = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2$

$= (x^2 + 8)^2 - 16x^2$

$= (x^2 + 8 + 4x)(x^2 + 8 - 4x)$

请按照上述解题思路完成下列因式分解 :

(1)  $a^4 + 4$  ;

(2)  $x^4 - 43x^2y^2 + 81y^4$  .

**【变式1】** . 在学习《因式分解》的相关知识时，“探究性学习”小组的甲、乙两名同学分别对下面式子进行了因式分解，具体如下：

|                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>甲：<math>x^2 - xy + 4x - 4y</math></p> <p><math>= (x^2 - xy) + (4x - 4y)</math> (分成两组)</p> <p><math>= x(x - y) + 4(x - y)</math> (直接提公因式)</p> <p><math>= (x - y)(x + 4)</math> .</p> | <p>乙：<math>a^2 - b^2 - c^2 + 2bc</math></p> <p><math>= a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)</math> (分成两组)</p> <p><math>= a^2 - (b - c)^2</math> (直接运用公式)</p> <p><math>= (a + b - c)(a - b + c)</math> .</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

请你在他们的启发下，解答下面各题：

(1) 因式分解： $4a^2 - b^2 + 1 + 4a$ ；

(2) 因式分解： $a^2 - ac - ab + bc$  .

**【变式2】 . 【阅读材料】**

把代数式通过配凑等手段，得到局部完全平方式（两数和的平方公式或两数差的平方公式），再进行有关运算和解题，这种解题方法叫做配方法．配方法在因式分解、最值问题中都有着广泛的应用．

例如：

① 用配方法因式分解： $a^2 + 6a + 8$

原式  $= a^2 + 6a + 9 - 1 = (a + 3)^2 - 1 = (a + 3 + 1)(a + 3 - 1) = (a + 4)(a + 2)$

② 求  $2x^2 + 12x + 22$  的最小值 .

解： $2x^2 + 12x + 22 = 2(x^2 + 6x + 11)$

先求出  $x^2 + 6x + 11$  的最小值

$x^2 + 6x + 11 = x^2 + 6x + 9 + 2 = (x + 3)^2 + 2$ ;

由于  $(x + 3)^2$  是非负数，所以  $(x + 3)^2 \geq 0$ ，可得到  $(x + 3)^2 + 2 \geq 2$ ，即  $x^2 + 6x + 11$  的最小值为 2 .

进而  $2x^2 + 12x + 22$  的最小值为 4 .

**【知识应用】**

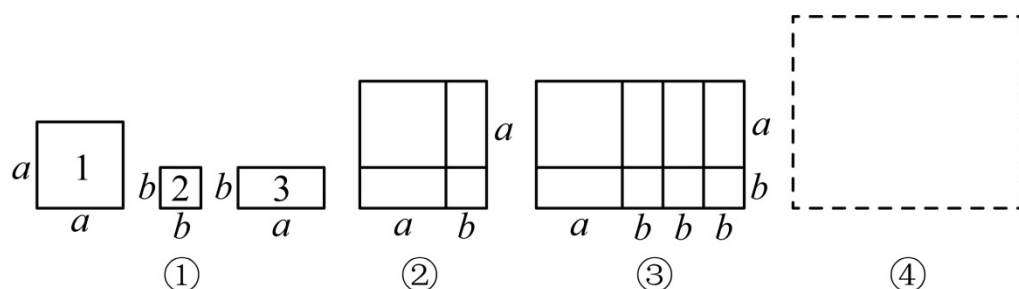
请根据上述材料解决下列问题：

(1) 在横线上添上一个常数项使之成为完全平方式： $a^2 + 8a + \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 用配方法因式分解： $a^2 + 10a + 16$ ；

(3)求  $3x^2 - 12x + 15$  的最小值 .

**【变式3】** . 小刚同学动手剪了如图①所示的正方形与长方形纸片若干张 . 他用 1 张 1 号、1 张 2 号和 2 张 3 号卡片拼出一个新的图形 ( 如图② ) . 根据图②的面积关系可得等式 :  $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$  , 即使用拼图将  $a^2 + 2ab + b^2$  分解因式 .



(1)如果要拼成一个长为  $(a+2b)$  , 宽为  $(a+b)$  的大长方形 , 则需要 2 号卡片 \_\_\_\_\_ 张 , 3 号卡片 \_\_\_\_\_ 张 ;

(2)当他拼成如图③所示的长方形 , 根据图③的拼图可以把多项式  $a^2 + 4ab + 3b^2$  分解因式 , 其结果是 \_\_\_\_\_ ;

(3)动手操作 , 请依照小刚的方法 , 在④的方框中画出面积为  $a^2 + 5ab + 6b^2$  的长方形拼图 , 并利用拼图分解因式  $a^2 + 5ab + 6b^2$  .

## 强化训练

### 一、单选题

1 . 对于①  $(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$  , ②  $x^2 - 3xy = x(x-3y)$  , 从左到右的变形 , 表述正确的是 ( )

A . 都是因式分解

B . 都是乘法运算

C . ①是因式分解 , ②是乘法运算

D . ①是乘法运算 , ②是因式分解

2 . 下列从左到右的变形 , 是因式分解的是 ( )

A .  $(a+3)(a-3) = a^2 - 9$

B .  $x^2 + x - 5 = (x-2)(x+3) + 1$

C .  $a^2b + ab^2 = ab(a+b)$

D .  $x^2 + 1 = x\left(x + \frac{1}{x}\right)$

3 . 多项式  $36ab^2c + 12abc$  的公因式是 ( )

A .  $24abc$

B .  $12abc$

C .  $12a^2b^2c^2$

D .  $6a^2b^2c^2$

4. 下列各式中，能用完全平方公式分解因式的是 ( )

- A.  $16x^2 + 1$       B.  $x^2 + 2x - 1$       C.  $a^2 + 2ab - 4b^2$       D.  $x^2 - x + \frac{1}{4}$

5. 若  $x^2 + px + q = (x-3)(x+5)$ ，则  $p$  的值为 ( )

- A.  $-15$       B.  $-2$       C.  $2$       D.  $8$

6. 已知  $ab = 3, a + b = 2$ ，则代数式  $ab^2 + a^2b - 3ab$  的值为 ( )

- A.  $-3$       B.  $0$       C.  $3$       D.  $2$

## 二、填空题

7. 因式分解： $81x^4 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 因式分解： $x^2 - 7xy - 8y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 因式分解： $x^2 - 4y^2 - x - 2y = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 因式分解： $12x^2y^3 - 8x^3y^2 + 20x^2y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 如果  $x-3$  是多项式  $2x^2 - 11x + m$  的一个因式，则  $m$  的值                     .

12. 如果  $1 + x + x^2 = 0$ ，那么  $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{99}$  的值是             .

13. 现有若干张边长为  $a$  的正方形  $A$  型纸片，边长为  $b$  的正方形  $B$  型纸片，长、宽为  $a, b$  的长方形  $C$  型纸片，丽丽同学选取了 5 张  $A$  型纸片，10 张  $B$  型纸片，27 张  $C$  型纸片拼成了一个长方形，则此长方形的周长为              (用含  $a, b$  的代数式表示)

14. 定义：如果一个正整数能表示为两个正整数  $m, n$  的平方差，且  $m - n > 1$ ，则称这个正整数为“智慧优数”。例如， $16 = 5^2 - 3^2$ ，16 就是一个智慧优数，可以利用  $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$  进行研究。若将智慧优数从小到大排列，第 9 个智慧优数是             。

## 三、解答题

15. 因式分解

(1)  $x^2 - 25x$  ;

(2)  $2x(a-2) + y(2-a)$  .

16. 分解因式

(1)  $-1 + b^2$       (2)  $x^3 - 6x^2 + 9x$       (3)  $9(x+y)^2 - 16(x-y)^2$

$$(4) a^2(x-y)+4(y-x) \quad (5) x^4-2x^3-35x^2 \quad (6) 1-a^2-4b^2+4ab$$

### 17. 因式分解

$$(1) -3x^3y+6x^2y^2-3xy^3;$$

$$(2) (a-2b)^2-4a^2;$$

$$(3) (x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24;$$

$$(4) a^2+4ab+4b^2-ac-2bc.$$

$$18. \text{分解因式: } x^2+xy-6y^2-2x+19y-15$$

$$19. \text{已知 } x-y=2, xy=-1, \text{用因式分解法求 } x(x+y)(x-y)-x(x-y)^2 \text{ 的值.}$$

$$20. \text{下面是某同学对多项式 } (m^2-4m)(m^2-4m+8)+16 \text{ 进行因式分解的过程.}$$

$$\text{解: 设 } m^2-4m=n,$$

$$\text{原式} = n(n+8)+16 \quad (\text{第一步})$$

$$= n^2+8n+16 \quad (\text{第二步})$$

$$= (n+4)^2 \quad (\text{第三步})$$

$$= (m^2-4m+4)^2 \quad (\text{第四步})$$

(1) 该同学第二步到第三步运用了因式分解\_\_\_\_\_.

A. 提取公因式

B. 平方差公式

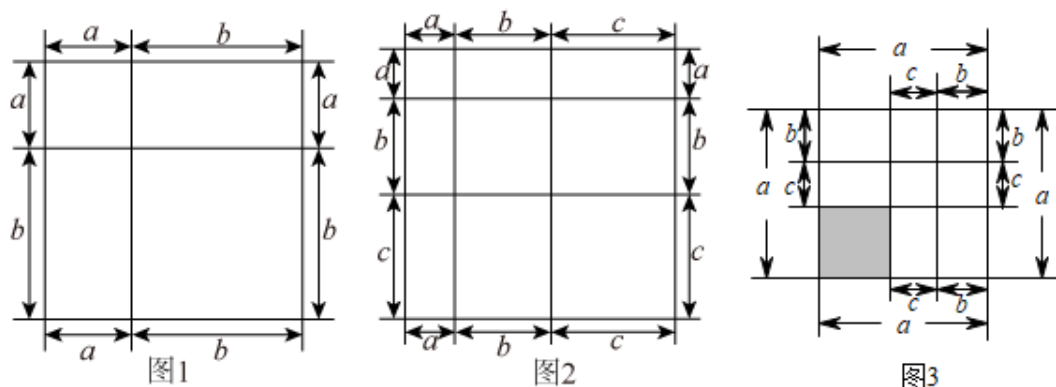
C. 完全平方公式

(2) 该同学是否完成了将该多项式因式分解? \_\_\_\_\_ (填“是”或“否”). 若没有完成, 请直接写出因式分解的最后结果\_.

$$(3) \text{请你模仿以上方法尝试对多项式 } (x^2-2x+4)(x^2-2x-2)+9 \text{ 进行因式分解.}$$

21. 我们知道对于一个图形, 通过不同的方法计算图形的面积可以得到一个数学等式.

$$\text{例如: 由图 1 可得到 } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



(1) 写出由图2所表示的数学等式：\_\_\_\_\_；

(2) 写出由图3所表示的数学等式(利用阴影部分)：\_\_\_\_\_；

(3) 已知实数  $a, b, c$  满足  $a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=1$  . 求：

①  $ab+bc+ca$  的值；

②  $a^3+b^3+c^3-3abc$  的值 .

22. 阅读下面材料，解答后面的问题：“十字相乘法”能将二次三项式分解因式，对于形如  $ax^2+bx+cy^2$  的关于  $x, y$  的二次三项式来说，方法的关键是将  $x^2$  项系数  $a$  分解成两个因数  $a_1, a_2$  的积，即  $a=a_1 \cdot a_2$ ，将  $y^2$  项系数  $c$  分解成两个因数  $c_1, c_2$  的积，即  $c=c_1 \cdot c_2$ ，并使  $a_1c_2+a_2c_1$  正好等于  $xy$  项的系数  $b$ ，那么可以直接写成结果： $ax^2+bx+cy^2=(a_1x+c_2y)(a_2y+c_1y)$

例：分解因式： $x^2-2xy-8y^2$

解：如图1，其中  $1=1 \times 1$ ， $-8=(-4) \times 2$ ，而  $-2=1 \times (-4)+1 \times 2$

所以  $x^2-2xy-8y^2=(x-4y)(x+2y)$

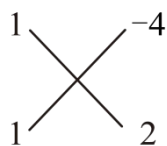


图1

而对于形如  $ax^2+bx+cy^2+dx+ey+f$  的关于  $x, y$  的二元二次式也可以用十字相乘法来分解。如图2。将  $a$  分解成  $mn$  乘积作为一列， $c$  分解成  $pq$  乘积作为第二列， $f$  分解成  $fk$  乘积作为第三列，如果  $mq+np=b$ ， $mk+nj=d$ ，即第1、2列，第2、3列和第1、3列都满足十字相乘规则，则原式  $= (mx+py+f)(nx+qy+k)$

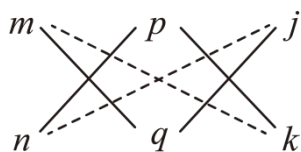


图2

例：分解因式  $x^2 + 2xy - 3y^2 + 3x + y + 2$

解：如图 3，其中  $1 = 1 \times 1$ ， $-3 = (-1) \times 3$ ， $2 = 1 \times 2$

而  $2 = 1 \times 3 + 1 \times (-1)$ ， $1 = (-1) \times 2 + 3 \times 1$ ， $3 = 1 \times 2 + 1 \times 1$

所以  $x^2 + 2xy - 3y^2 + 3x + y + 2 = (x - y + 1)(x + 3y + 2)$

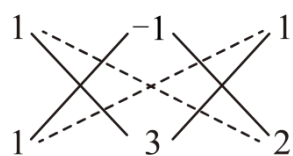


图3

请同学们通过阅读上述材料，完成下列问题：

(1) 分解因式：①  $6x^2 - 33xy + 42y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$  .

②  $2x^2 - xy - 6y^2 + x + 19y - 15 = \underline{\hspace{2cm}}$  .

(2) 若关于  $x$ ， $y$  的二元二次式  $x^2 + 7xy - 18y^2 - 3x + my - 40$  可以分解成两个一次因式的积，求  $m$  的值 .