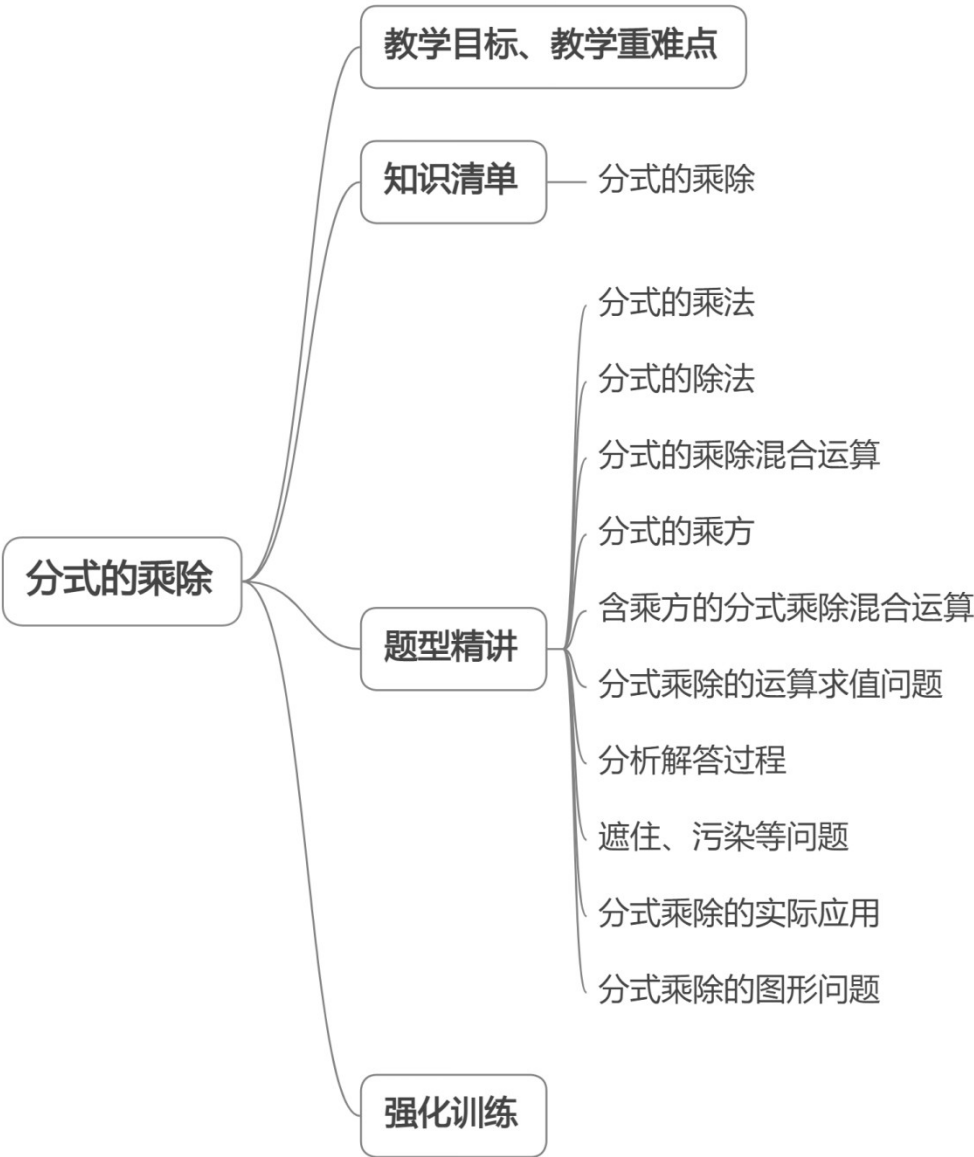


专题 13.2 分式的乘除

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 学会用类比的方法总结出分式的乘法、除法法则； 2. 会分式的乘法、除法运算； 3. 掌握乘方的意义，能根据乘方的法则，先乘方，再乘除进行分式运算。
教学重难点	1.重点

	(1) 学会分式的乘除运算； (2) 分式的乘方；分式的乘除、乘方混合运算 (3) 利用分式的乘除解有关代数、图形问题。 2. 难点 (1) 分式的乘除有关化简、变形、求值问题等； (2) 分式乘除的综合应用。
--	---

知识清单

知识点 1 分式的乘除

一、分式的乘除法

1. 分式的乘法法则：分式乘分式，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母。用字母表示为：

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

2. 分式的除法法则：分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘。用字母表示为：

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

注：在本章中做分式除法时，总是默认除式的值不为 0。

要点：

- (1) 分式的乘除法都能统一成乘法，然后约去公因式，化为最简分式或整式。
- (2) 分式与分式相乘，若分子和分母是多项式，则先分解因式，看能否约分，然后再乘。
- (3) 整式与分式相乘，可以直接把整式（整式可以看作分母是 1 的代数式）和分式的分子相乘作为分子，分母不变。当整式是多项式时，同样要先分解因式，便于约分。
- (4) 分式的乘除法计算结果，要通过约分，化为最简分式或整式。

二、分式的乘方

分式的乘方运算法则：分式的乘方是把分子、分母分别乘方，用字母表示为：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (n \text{ 为正整数})$$

要点：

- (1) 分式乘方时，一定要把分式加上括号。不要把 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ 写成 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b}$
- (2) 分式乘方时，要首先确定乘方结果的符号，负数的偶次方为正，负数的奇次方为负。
- (3) 在一个算式中同时含有分式的乘方、乘法、除法时，应先算乘方，再算乘除，有多项式时应先分解因式，再约分。

(4) 分式乘方时，应把分子、分母分别看作一个整体.如 $\left(\frac{a-b}{b}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{b^2} \neq \frac{a^2-b^2}{b^2}$.

【即学即练】

1. 计算 $\frac{a}{b} \div \frac{a^2}{b}$ 的结果为 ()

A. $\frac{a^2}{b^2}$

B. $\frac{1}{a}$

C. a

D. $\frac{b^2}{a^3}$

2. 计算：

(1) $\frac{4a^2b}{3cd^2} \cdot \left(-\frac{5c^2d}{4ab^2}\right)$ ；

(2) $\frac{-3a^2}{4b^2} \div (-6a^2b)$ ；

(3) $\frac{a^2-4a+4}{a^2-4} \cdot \frac{4+4a+a^2}{a-2}$ ；

(4) $\frac{x}{x^2-1} \div \frac{x^2}{x^2+x}$ 。

3. 计算：

(1) $\left(\frac{2a^2b}{-c^3}\right)^3$ ；

(2) $\left(\frac{-3ab^2}{2c^2d^3}\right)^2$ 。

4. 计算：

(1) $\left(\frac{2c^3}{-3ab^2}\right)^2 \div \left(\frac{1}{ab}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3c}{2a}\right)^3$ ；

(2) $\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)^2 \cdot \frac{xy}{(y-x)^2} \div \left(\frac{x+y}{x}\right)^3$ 。

5. 化简 $\frac{x}{x-y} \div \frac{2x}{y^2-x^2}$ 的结果是 ()

A. $\frac{y-x}{2}$

B. $\frac{x-y}{2}$

C. $\frac{x+y}{2}$

D. $-\frac{x+y}{2}$

6. 若 $ab=1$ ，则 $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$ 等于 ()

A. $2a^2$

B. $2b^2$

C. a^2+b^2+2

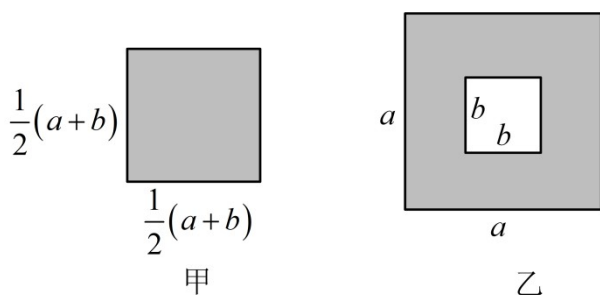
D. $a+b+2$

7. 老师在黑板上写了一个分式的除法计算题，如图，用手遮住了一部分，让同学们通过计算求出被遮住部分的式子，则被遮住的式子是_____.

$$\frac{x}{x+1} \div \text{手} = \frac{2x^2}{x^2-1}$$

8. 小明把同样数量的花种撒在甲、乙两块地上 (如图阴影部分)，则甲、乙两块地的撒播密度的比为__

(撒播密度 = $\frac{\text{花种数量}}{\text{撒播面积}}$)



题型精讲

题型 01 分式的乘法

【典例 1】 $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}$

【变式 1】 $\frac{2}{xy} \cdot \frac{x}{8}$

【变式 2】 计算： $\frac{a^2}{b} \cdot \frac{b}{a} =$ _____.

【变式 3】 计算： $\frac{4x}{3y} \cdot \frac{y}{2x^3} =$ _____.

【变式 4】 计算： $\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{(x-2)^2} =$ _____.

题型 02 分式的除法

【典例 1】 . 计算 $\frac{x}{y} \div \frac{2}{y}$ 的结果是()

- A . $2x$ B . $2y$ C . $\frac{2}{y}$ D . $\frac{1}{2}x$

【变式 1】 . 计算： $\frac{12b}{a} \div \frac{3b}{2a} =$ _____ .

【变式 2】 . 计算： $-3x^2y \div \frac{3x^2}{4y} =$ _____ .

【变式 3】 . 计算： $\frac{a+1}{a} \div \frac{a+1}{a^2} =$ _____ .

【变式 4】 . 化简： $\frac{2}{m^2-m} \div \frac{1}{m-1} =$ _____ .

题型 03 分式的乘除混合运算

【典例 1】 . 计算： $\left(\frac{x^2}{y}\right) \cdot \left(\frac{y}{x}\right) \div \left(-\frac{y}{x}\right)$.

【变式 1】 . 计算： $-\frac{b}{2a} \div \frac{3b}{4a} \cdot \frac{2a}{3b}$;

【变式 2】 . 计算：

$$(1) \frac{-a^2b}{2c} \cdot \left(-\frac{4cd}{5ab^2}\right) ;$$

$$(2) \frac{xy^3}{2z^3} \div \frac{3x^2y^2}{-4z^2} ;$$

$$(3) \frac{x^2-4x+4}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+1}{x^2-4} ;$$

$$(4) \frac{x^2-4x}{x} \div (x^2-16) .$$

题型 04 分式的乘方

【典例 1】 . 计算：

$$(1) \left(\frac{2a^2b}{-c^3}\right)^3 ;$$

$$(2) \left(\frac{-3ab^2}{2c^2d^3} \right)^2.$$

【变式 1】 . 计算：

$$(1) \left(\frac{a^2}{-b^3} \right)^4;$$

$$(2) \left(\frac{x^2y}{-z^2} \right)^3;$$

$$(3) \left(-\frac{x}{y} \right)^2 \cdot \left(-\frac{y^2}{x} \right)^4.$$

【变式 2】 . 下列计算正确的是 ()

$$A. \left(\frac{b^3}{2a} \right)^2 = \frac{b^6}{2a^2}$$

$$B. \left(\frac{-3b}{2a} \right)^2 = \frac{-9b^2}{4a^2}$$

$$C. \left(\frac{2y}{-3x} \right)^3 = \frac{8y^3}{-27x^3}$$

$$D. \left(\frac{3x}{x-a} \right)^2 = \frac{9x^2}{x^2-a^2}$$

题型 05 含乘方的分式乘除混合运算

【典例 1】 . 计算：

$$(1) \left(\frac{2c^3}{-3ab^2} \right)^2 \div \left(\frac{1}{ab} \right)^3 \cdot \left(-\frac{3c}{2a} \right)^3;$$

$$(2) \left(\frac{x^2-y^2}{xy} \right)^2 \cdot \frac{xy}{(y-x)^2} \div \left(\frac{x+y}{x} \right)^3.$$

【变式 1】 . 分式计算：

$$(1) \frac{2x}{5x-3} \div \frac{3}{9-25x^2} \cdot \frac{x}{5x+3};$$

$$(2) \left(\frac{a^2b}{-cd^3} \right)^3 \div \frac{2a}{d^3} \cdot \left(\frac{c}{2a} \right)^2.$$

【变式 2】 . 计算：

$$(1) 4a^2b \div \left(-\frac{a}{2b} \right)^2 \cdot \left(-\frac{b}{8a} \right);$$

$$(2) \left(\frac{a^2 b}{-c} \right)^3 \cdot \left(\frac{c^2}{-ab} \right)^2 \div \left(\frac{bc}{a} \right)^4 ;$$

$$(3) \left(\frac{x^2 - y^2}{xy} \right)^2 \div (x + y) \left(\frac{x}{x - y} \right)^3 .$$

【变式3】 . 计算 $\left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 9} \right)^2 \div \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x} \right)^3 \div \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 6} \right)^2 \div \frac{3x + x^2}{4 - x^2} = \underline{\hspace{2cm}} .$

题型 06 分式乘除的运算求值问题

【典例1】 . 先化简，再求值： $\frac{a}{a-1} \cdot \frac{a^2-1}{a}$ ，其中 $a = 2025$.

【变式1】 . 先化简，再求值： $\frac{x+3}{x-2} \div \frac{x^2+6x+9}{x^2-4}$ ，其中 $x = 1$.

【变式2】 . 先化简： $\frac{x+3}{1-x} \div \frac{x^2+3x}{x^2-2x+1}$ ，并在 1、-3、0、2 四个数中选择一个适合的数作为 x 的值代入

求值 .

【变式3】 . 已知 $m - \frac{1}{m} = 3$ ，则 $m^4 + \frac{1}{m^4}$ 的值为_____ .

题型 07 分析解答过程

【典例1】 . 以下是小茗同学化简分式 $\frac{m^2-4}{m^2-4m+4} \div \frac{2}{2-m}$ 的运算过程：

解：原式 $= \frac{m^2-4}{m^2-4m+4} \cdot \frac{2-m}{2}$ ①

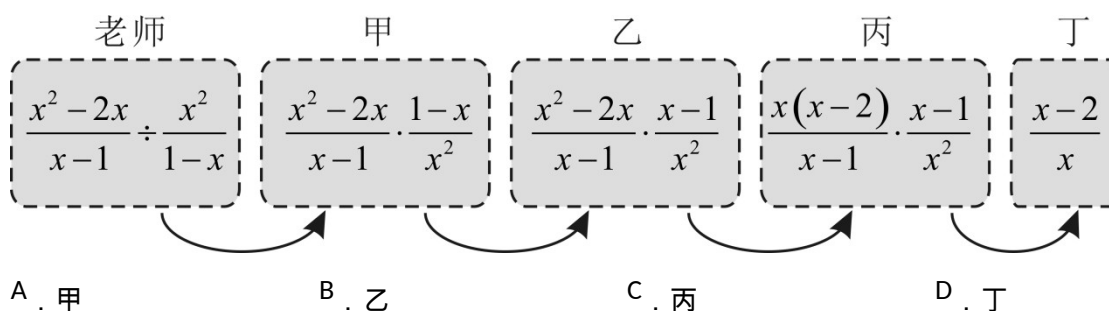
$= \frac{(m+2)(m-2)}{(m-2)^2} \cdot \frac{2-m}{2}$ ②

$= \frac{m+2}{2}$ ③

(1) 上面的运算过程中第_____步开始出现了错误；

(2) 请你写出完整的解答过程 .

【变式1】 . 老师设计了接力游戏，甲、乙、丙、丁四位同学用合作的方式完成分式化简，规则是：每人只能看到前一人给的式子，并进行一步计算，再将结果传递给下一人，最后完成化简过程如图所示，接力中，自己负责的一步出现错误的同学是 ()



【变式 2】 . 下面的分式化简题呈现了小李的正确解答过程，但都分算式被遮挡。

解： $(\square - \frac{12}{a-2}) \div \frac{a-4}{a-2}$
 $= \frac{a^2-16}{a-2} \cdot \frac{a-2}{a-4}$
 $= a+4$

(1) 求被遮挡部分的代数式（化为最简）；

(2) 小王认为“该分式的值不可能为 6”，请你回答下面的两个问题并说明理由；

① 你知道小王为什么这样判断吗？

② 小王的说法全面吗？

题型 08 遮住、污染等问题

【典例 1】 . 数学课上，老师讲了分式的除法，放学后，小刚回到家中拿出课堂笔记，认真复习老师课上

讲的内容，他突然发现一道题：化简 $\frac{x}{x^2-1} \div \frac{x^2}{\Delta}$ ，其中“ Δ ”处被墨迹盖住了，但他知道这道题化简的结果为

$\frac{1}{x-1}$ ，则“ Δ ”所表示的式子为_____。

【变式 1】 . 美琪在做数学作业时，不小心将式子中除号后面的式子污染，即 $\frac{4-x^2}{3x^2-2xy} \div \blacksquare$ ，通过查看答

案，得知答案为 $\frac{x+2}{3x-2y}$ ，则被污染的式子为（ ）

- A. $\frac{2}{x+2}$ B. $\frac{x-2}{x}$ C. $\frac{2-x}{x}$ D. $\frac{x+1}{2x-1}$

题型 09 分式乘除的实际应用

【典例 1】 . 学校绿化养护原本采用漫灌的方式， b 吨水可用 a 天。为了节约用水，现采用喷灌的方式， b

吨水可多用 10 天，则漫灌每天的用水量是喷灌每天用水量的_____倍。

【变式1】 . 已知小明上学时，走上坡路，速度为 m 千米/时；放学回家时，沿原路返回，速度为 n 千米/时，则小明上学和放学时的平均速度为_____ .

【变式2】 . 如果 a 名同学 b 小时共搬运 c 块砖，那么 c 名同学以同样速度搬运 a 块砖所需的时间是 () 小时

- A . $\frac{c^2}{a^2b}$ B . $\frac{c^2}{ab}$ C . $\frac{ab}{c^2}$ D . $\frac{a^2b}{c^2}$

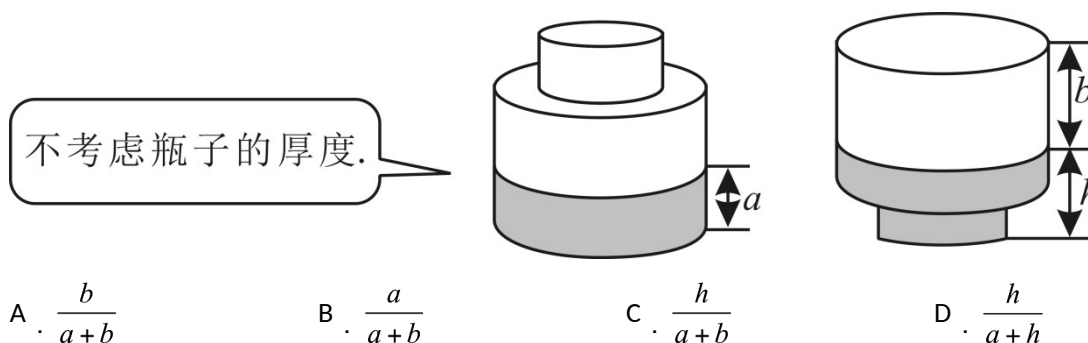
【变式3】 . 学校医务室给学生准备中药，一碗中药原来的高度是碗的 $\frac{4}{5}$ ，静置一会高度变成碗的 $\frac{2}{3}$ (只计水的蒸发)，则中药的浓度变为原来的 () 倍 .

- A . 1.7 B . 1.4 C . 1.3 D . 1.2

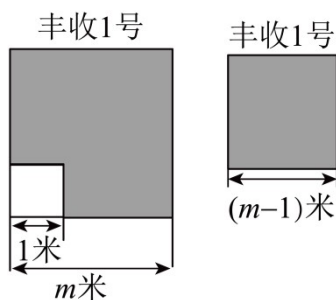
【变式4】 . 某小区为了进一步美化环境，物业计划安排绿化施工队在小区里的一块空地上种植 m 棵树，若甲队单独完成，则需要 $n(n>1)$ 天，若乙队单独完成，则需要的时间比甲队的 2 倍多 1 天，则甲队平均每天植树的棵数是乙队的 3 倍吗？请说明理由 .

题型 10 分式乘除的图形问题

【典例1】 . 如图，一个瓶身为圆柱体的玻璃瓶内装有高 a 厘米的墨水，将瓶盖盖好后倒置，墨水水面高为 h 厘米，则瓶内的墨水的体积约占玻璃瓶容积的 ()



【变式1】 . 如图，“丰收¹号”小麦试验田是边长为 m 米 ($m>1$) 的正方形去掉一个边长为 1 米的正方形蓄水池后余下的部分，“丰收²号”小麦试验田是边长为 $(m-1)$ 米的正方形，两块试验田的小麦都收获了 n kg . 设“丰收¹号”和“丰收²号”小麦试验田的单位面积产量分别为 P kg/m² 和 Q kg/m² . 用含 m 的式子表示：



(1) $P = \underline{\hspace{2cm}} \text{ kg/m}^2$, $Q = \underline{\hspace{2cm}} \text{ kg/m}^2$;

(2) P 是 Q 的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 倍.

强化训练

一、单选题

1. 计算 $\frac{x}{y} \div \frac{2}{y}$ 的结果是 ()

A. $2x$

B. $2y$

C. $\frac{2}{y}$

D. $\frac{x}{2}$

2. 计算 $\left(-\frac{a}{2b}\right) \cdot \frac{2b}{a^2}$ 的结果是 ()

A. $-\frac{1}{a}$

B. $-\frac{1}{2a}$

C. $-\frac{1}{4a}$

D. $-\frac{b^2}{a}$

3. 计算 $\left(-\frac{a^2b}{a-b}\right)^3$ 的结果是 ()

A. $\frac{a^5b}{(a-b)^3}$

B. $\frac{a^6b^3}{a^3-b^3}$

C. $-\frac{a^6b^3}{(a-b)^3}$

D. $\frac{a^5b^3}{a^3-b^3}$

4. 计算 $x^3 \div \left(\frac{x^3}{y}\right)^2$ 的结果是 ()

A. $\frac{x^6}{y^2}$

B. x^3y^2

C. $\frac{y^2}{x^3}$

D. x^3y^6

5. 下列各式中, 计算结果正确的有 ()

① $\frac{3x}{x^2} \cdot \frac{x}{3x} = \frac{1}{x}$ ② $a \div b \times \frac{1}{b} = a$ ③ $\frac{a}{a^2-1} \div \frac{a^2}{a^2+a} = \frac{1}{a-1}$

④ $8a^2b^2 \div \left(-\frac{3a}{4b^2}\right) = -6a^3b$ ⑤ $\left(-\frac{a^2}{b}\right) \cdot \left(-\frac{b^2}{a}\right) \div (ab)^2 = \frac{1}{ab}$

- A . 1 个 B . 2 个 C . 3 个 D . 4 个

6 . $\left(-\frac{b^2}{m}\right)^{2n+1}$ 的值是 ()

- A . $\frac{b^{2n+3}}{m^{2n+1}}$ B . $-\frac{b^{2n+3}}{m^{2n+1}}$ C . $\frac{b^{4n+2}}{m^{2n+1}}$ D . $-\frac{b^{4n+2}}{m^{2n+1}}$

7 . 化简 $\frac{a^2-a}{a+1} \times \frac{a^2-1}{a^2-2a+1}$ 的结果是 ()

- A . $\frac{1}{a}$ B . a C . $\frac{a+1}{a-1}$ D . $\frac{a-1}{a+1}$

8 . 浓度为 $p\%$ 的盐水 m 公斤与浓度为 $q\%$ 的盐水 n 公斤混合后的溶液浓度是 ()

- A . $\frac{p+q}{2} \%$ B . $(mp+nq)\%$ C . $\frac{(mp+nq)}{p+q} \%$ D . $\frac{(mp+nq)}{m+n} \%$

9 . 分式 $\frac{a^2-a+\frac{1}{4}}{a-3} \div \frac{2a-1}{a^2-3a}$ 化简的最终结果是 ()

- A . $a^2 - \frac{1}{2}a$ B . $\frac{a\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}{2a-1}$ C . $\frac{a}{2a-1}$ D . $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a$

10 . 甲杯中盛有 m 毫升红墨水，乙杯中盛有 m 毫升蓝墨水，从甲杯中倒出 a 毫升到乙杯里 ($0 < a < m$)，搅匀后，又从乙杯倒出 a 毫升到甲杯里，则这时 ()

- A . 甲杯中混入的蓝墨水比乙杯中混入的红墨水少
B . 甲杯中混入的蓝墨水比乙杯中混入的红墨水多
C . 甲杯中混入的蓝墨水和乙杯中混入的红墨水相同
D . 甲杯中混入的蓝墨水与乙杯中混入的红墨水多少关系不定

二、填空题

11 . 计算： $9a^2 \cdot \frac{b^2}{3a} =$ _____ .

12 . 化简 $\frac{1}{x-1} \div \frac{1}{x^2-1} =$ _____ .

13 . 计算： $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \div \left(-\frac{a}{3b}\right) \cdot \frac{4a}{b^3} =$ _____ .

14. 化简： $(a-1) \div \frac{1-a}{a} \cdot (-a) =$ _____.

15. (1) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+x}{x-3} =$ _____;

(2) $\frac{a-b}{a^2+ab} \div \frac{ab-a^2}{a^2b^2-a^4} =$ _____.

16. 若 $\frac{1}{m}$ 等于它的倒数，则 $\frac{m^2+4m+4}{m^2-4} \div \frac{m^2+2m}{m-2}$ 的值为_____.

17. 学校绿化养护原本采用漫灌的方式， b 吨水可用 a 天. 为了节约用水，现采用喷灌的方式， b 吨水可多用 10 天，则漫灌每天的用水量是喷灌每天用水量的_____倍.

18. 给定一系列分式： $\frac{x}{y}$ ， $-\frac{x^3}{2y^2}$ ， $\frac{x^5}{4y^3}$ ， $-\frac{x^7}{8y^4}$ ，... (其中 $x \neq 0$ ， $y \neq 0$)，那么第 n 个分式是_____，

这列分式中第 n 个分式除以第 $(n-1)$ 个分式的商是_____.

三、解答题

19. 计算：

(1) $\frac{-y}{x} \cdot \frac{2x}{3y}$;

(2) $\frac{5b}{2a^2} \cdot \frac{2b^2}{3a}$;

(3) $xy \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$;

(4) $-\frac{2y^3}{3x} \cdot \left(-\frac{x^2}{4x^3y}\right)$.

20. 计算

(1) $\frac{3xy^2}{4z^2} \cdot \frac{8z^3}{y}$

(2) $\frac{ab^2}{2cd} \div \frac{-3ax}{4cd}$

(3) $\left(-\frac{a}{b}\right)^2 \div \frac{3a}{4b} \cdot \frac{2b}{3a}$

(4) $\frac{a+2}{a-2} \cdot \frac{1}{a^2+2a}$

$$(5) \frac{a+1}{a-1} \cdot \frac{a}{a^2-1}$$

$$(6) \frac{a-1}{a^2-4a+4} \div \frac{a^2-1}{a^2-4}$$

$$21. (1) \frac{5c}{2a^2b^4} \div (-6ab^6c^2) \div \frac{20c^3}{30a^3b^{10}}$$

$$(2) (xy-x^2) \div \frac{x^2-2xy+y^2}{xy} \cdot \frac{x-y}{x^2}$$

$$(3) \frac{a^4-a^2b^2}{a^2-2ab+b^2} \div \frac{a^2+ab}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a}$$

$$(4) \frac{2x-6}{4-4x+x^2} \div (x+3)^2 \cdot \frac{x-2}{3-x}$$

22. 先化简 $\frac{1}{a+1} \div \frac{a}{a^2+2a+1}$ ，然后在 0, 1, -1 中挑选一个合适的数代入求值。

23. 先化简，再求值： $\left(\frac{a+b}{2ab^2}\right)^3 \div \left(\frac{a^2-b^2}{ab^3}\right)^2 \div \left[\frac{1}{2(a-b)}\right]^2$ ，其中 $a = -\frac{1}{2}$ ， $b = \frac{2}{3}$ 。

24. 下面是一位同学化简代数式 $\left(\frac{2x}{x+2} - x\right) \div \frac{x^2-2x}{x+2}$ 的解答过程：

$$\text{解：原式} = \frac{2x-x^2+2x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x(x-2)} \quad \text{①}$$

$$= \frac{x(4-x)}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x(x-2)} \quad \text{②}$$

$$= \frac{4-x}{x-2} \quad \text{③}$$

(1) 这位同学的解答，在第_____步出现错误。

(2) 请你写出正确的解答过程，并求出当 $x=4$ 时，原式的值。

25. 老师在黑板上书写了一个代数式的正确计算结果，随后用手遮住了原代数式的一部分，如图：

$$\left(\text{手} - \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}\right) \div \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x-1}$$

(1) 求被手遮住部分的代数式，并将其化简；

(2) 原代数式的值能等于-1吗？请说明理由。

26. “果园飘香”水果超市运来凤梨和西瓜这两种水果，已知凤梨重 $(m-2)^2 \text{ kg}$ ，西瓜重 $(m^2-4) \text{ kg}$ ，其中 $m > 2$ ，售完后，两种水果都卖了 540 元。

(1) 请用含 m 的代数式分别表示这两种水果的单价。

(2) 凤梨的单价是西瓜单价的多少倍？

27. (1) 根据图形 (1) 的面积写出一个公式：_____

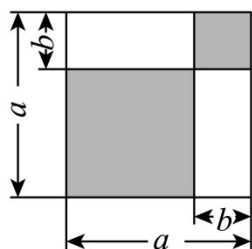


图1

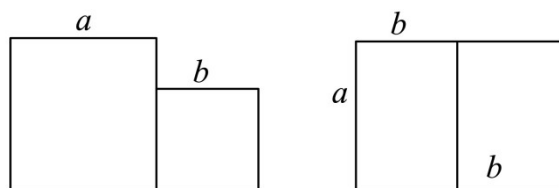


图2

图二是两块试验田，“丰收1号”小麦的试验田是边长 a 米、 b 米两个正方形，“丰收2号”小麦的试验田是边长为 a 米、 $2b$ 米的长方形，($a \neq b$) 两块试验田的小麦都收获了 500kg。

(2) 哪种小麦的单位面积产量高？(请说明理由)

(3) 高的单位面积产量是低的单位面积产量的多少倍？