

## 专题 02 特殊平行四边形

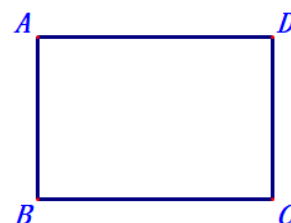
### 知识清单

#### 知识点 01 矩形

##### 1. 定义

四个内角都是直角的四边形叫作矩形。

矩形是一种特殊的平行四边形。



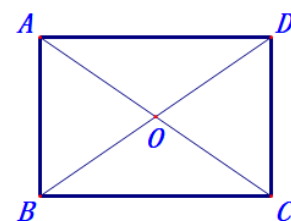
##### 2. 性质

(1) 矩形是一种特殊的平行四边形，所以它具有平行四边形的所有性质，

(2) 定理 矩形的两条对角线相等。

(3) 矩形既是中心对称又是轴对称图形

矩形的对称中心是对角线的交点，它有 2 条对称轴：分别是两组对边的垂直平分线。



##### 3. 判定

(1) 根据定义四个内角均为直角的四边形就是矩形。

(2) 判定定理 1：有一个内角是直角的平行四边形是矩形。

(3) 判定定理 2：对角线相等的平行四边形是矩形。

#### 知识点 02 菱形

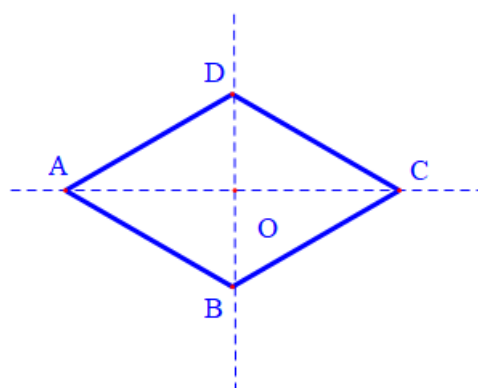
##### 1. 定义

四条边都相等的四边形叫作菱形。

菱形是一种特殊的平行四边形。

##### 2. 性质

(1) 菱形是一种特殊的平行四边形，所以它具有平行四边形的



所有性质；

菱形如下的一些**特殊**性质：

(<sup>2</sup>) 定理 菱形的两条对角线**互相垂直 (平分)**。

(<sup>3</sup>) 菱形既是中心对称图形又是轴对称图形。

菱形的对称中心是对角线的交点，它有<sup>2</sup>条对称轴，分别是两条对角线所在的直线。

(<sup>4</sup>) 由菱形是轴对称图形可知，菱形的对角线不仅互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角。

(<sup>5</sup>) 菱形的面积公式

①菱形是一种特殊的平行四边形，所以菱形的面积等于底乘以高；

②由上题可知，菱形的面积等于四个直角三角形的面积，也就等于对角线乘积的一半。

### 3. 菱形的判定

(1) 根据定义四条边都相等的四边形就是菱形。

(2) 判定定理 1：有一组邻边相等的平行四边形是菱形。

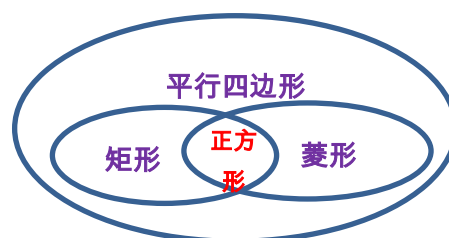
(3) 判定定理 2：对角线互相垂直的平行四边形是菱形。

## 知识点 03 正方形

### 1. 定义

四个角都是直角，四条边都相等的四边形叫作正方形。

正方形既是矩形又是菱形，更是一种特殊的平行四边形。



### 2. 正方形的性质和判定

(<sup>1</sup>) 正方形是一种特殊的平行四边形，它具有矩形、菱形、平行四边形的所有性质；

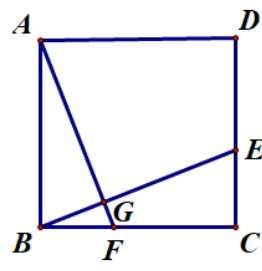
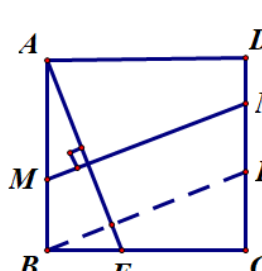
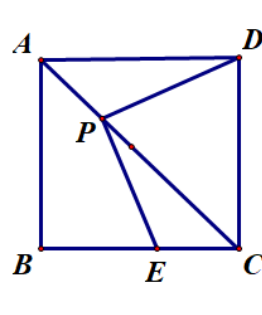
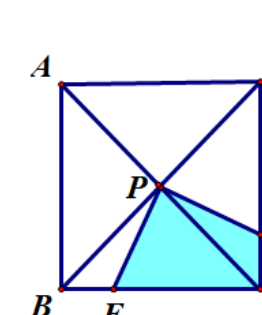
(<sup>2</sup>) 正方形既是中心对称图形又是轴对称图形。

正方形的对称中心是对角线的交点，它有<sup>4</sup>条对称轴，分别是两条对角线所在的直线和两组对边的垂直平分线。

(<sup>3</sup>) 要判定一个四边形是正方形可以判定它既是矩形又是菱形.

### 3. 正方形内的几何模型

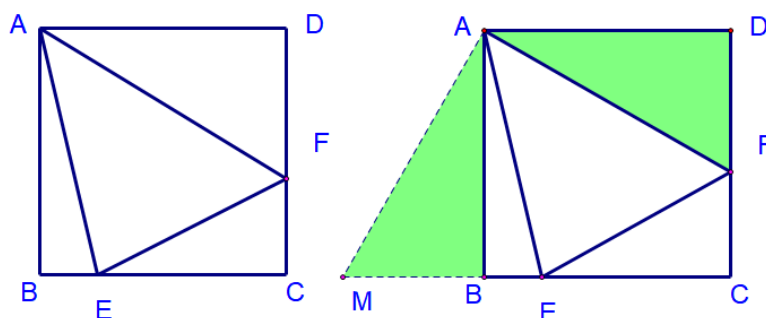
#### (<sup>1</sup>) 十字架模型

|                                                                                    |                                                                                                |                                                                                     |                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
|   | <p>模型一<br/>条件：BE⊥AF<br/>结论：<br/><math>\triangle ABF \cong \triangle BCE</math><br/>AF = BE</p> |   | <p>模型二<br/>条件：MN⊥AF<br/>结论：MN = AF</p>                 |
|  | <p>模型三<br/>条件：DP⊥PE<br/>结论：PD = PE</p>                                                         |  | <p>模型三<br/>条件：PE⊥PF<br/>结论：S<sub>四边形PECF</sub> 为定值</p> |

(<sup>2</sup>) 半角模型  
角模型  
基本模型：  
如图，在正方形

ABCD 中，点 E, F 分别在边 BC, CD 上，且  $\angle EAF = 45^\circ$ ，则 BE, EF, DF 之间的数量关系为  $EF = BE + DF$ ；

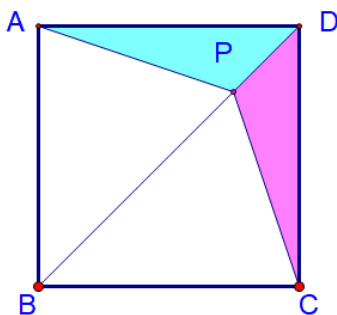
【分析】遇半角模型，将  $\triangle ADF$  绕点 A 逆时针旋转  $90^\circ$  至正方形左侧，证明  $\triangle AEF \cong \triangle AME$  即可.



#### (<sup>3</sup>) 飞镖模型

基本模型：如图，在正方形 ABCD 中，点 P 为对角线 BD 上任意一点，则有  $PA = PC$ .

【分析】证明  $\triangle APD \cong \triangle CPD$  即可.



### 题型精练

## 题型 01 矩形的性质

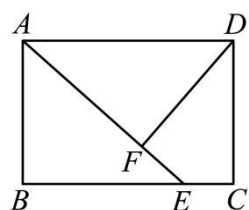
1. (25-26 八年级上·上海·期中) 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ( )

- A. 等腰三角形      B. 矩形      C. 正五边形      D. 平行四边形

2. (25-26 八年级上·广东深圳·阶段检测) 下列性质中，矩形不一定具有的性质是 ( )

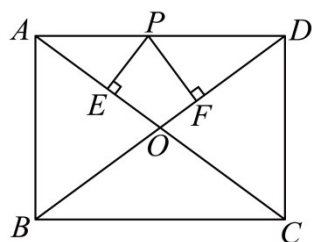
- A. 四边相等      B. 对角线互相平分      C. 对角线相等      D. 对角相等

3. (24-25 八年级下·全国·单元测试) 如图所示，在矩形  $ABCD$  中，点  $E$  在  $BC$  边上， $DF \perp AE$  于点  $F$ ，若  $EF = CE = 1$ ， $AB = 3$ ，则线段  $AF$  的长为 ( )



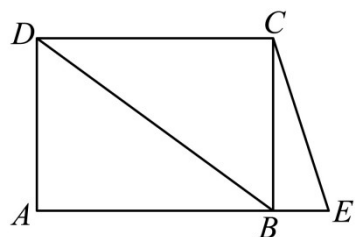
- A.  $2\sqrt{5}$       B. 4      C.  $2\sqrt{3}$       D.  $3\sqrt{2}$

4. (24-25 八年级下·辽宁大连·月考) 如图，在矩形  $ABCD$  中， $AB = 3$ ， $AD = 4$ ， $P$  是  $AD$  上不与  $A$  和  $D$  重合的一个动点，过点  $P$  分别作  $AC$  和  $BD$  的垂线，垂足为  $E$ ， $F$ ，则  $PE + PF$  的值为 ( )



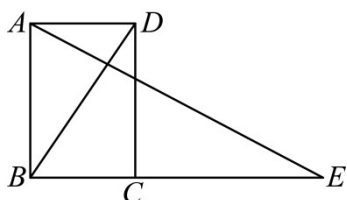
- A.  $\frac{12}{5}$       B.  $\frac{6}{5}$       C. 5      D.  $\frac{24}{5}$

5. (24-25 八年级下·江苏泰州·阶段检测) 如图, 矩形  $ABCD$  中, 点  $E$  在  $AB$  的延长线上, 且  $AE = BD$ ,  $\angle E = 72^\circ$ , 则  $\angle DBC =$  ( )

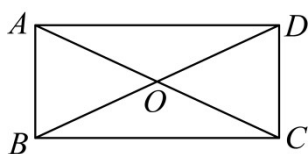


- A.  $36^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $54^\circ$       D.  $72^\circ$

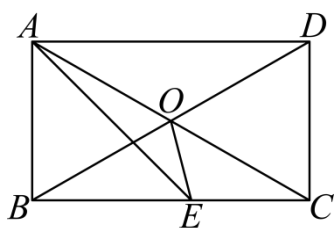
6. (24-25 八年级下·江苏宿迁·月考) 如图矩形  $ABCD$ , 点  $E$  在  $BC$  的延长线上,  $CE = BD$ , 连接  $AE$ , 如果  $\angle E = 28^\circ$ , 则  $\angle ADB =$  \_\_\_\_\_.



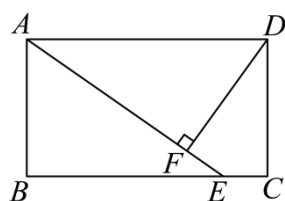
7. (24-25 八年级下·广东湛江·阶段检测) 如图, 在矩形  $ABCD$  中, 对角线  $AC$ 、 $BD$  相交于点  $O$ , 若  $\angle ADB = 20^\circ$ , 则  $\angle AOB$  的度数为\_\_\_\_\_.



8. (24-25 八年级下·河南南阳·期末) 已知, 如图,  $O$  是矩形  $ABCD$  对角线的交点,  $AE$  平分  $\angle BAD$ ,  $\angle AOD = 120^\circ$ , 则  $\angle AEO$  的度数为\_\_\_\_\_.



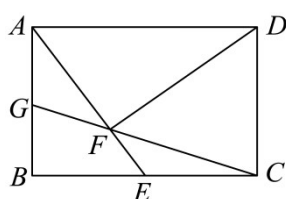
9. (23-24 八年级下·四川南充·期末) 如图, 在矩形  $ABCD$  中, 点  $E$  是  $BC$  边上一点,  $AE = AD$ ,  $DF \perp AE$  于点  $F$ .



(1) 求证：  $AB = DF$  .

(2) 若  $AB = 8$  ,  $CE = 4$  , 求  $BC$  的长 .

10 . ( 24-25 八年级下·四川泸州·期中 ) 如图，矩形  $ABCD$  中，  $AB = 4$  ,  $AD = 6$  , 点  $E$  是  $BC$  的中点，  
 $DF \perp AE$  于点  $F$ ，连接并延长  $CF$  与  $AB$  交于点  $G$  .

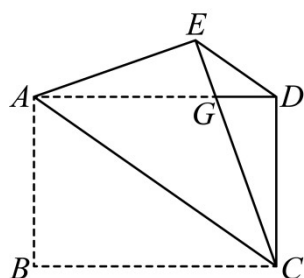


(1) 求  $AE$  ,  $DF$  的长；

(2) 求证：  $AG = FG$  .

## 题型 02 矩形的折叠问题

11 . ( 24-25 八年级下·上海黄浦·期末 ) 把一张矩形纸片  $ABCD$  沿对角线  $AC$  折叠，点  $B$  的对应点为点  $E$ ，  
 边  $EC$  交边  $AD$  于点  $G$  . 连接  $ED$  ( 如图所示 ) . 当  $BC = \sqrt{2}AB$  时，下列结论中，不正确的是 ( )



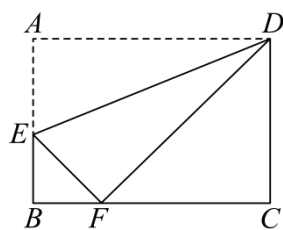
A .  $\triangle AEG \cong \triangle CDG$

B .  $ED \parallel AC$

C .  $AG = 4GD$

D .  $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle AEG}$

12 . ( 23-24 八年级下·全国·课后作业 ) 如图，在矩形  $ABCD$  中，  $AD = 15$  ,  $AB = 9$  .  $E$  是边  $AB$  上一点，将  
 $\triangle ADE$  沿  $DE$  所在直线折叠，使得点  $A$  恰好落在  $CB$  边上点  $F$  处，则  $EF$  的长是 ( )



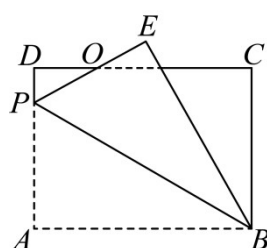
A . 4

B . 5

C .  $2\sqrt{5}$

D .  $3\sqrt{2}$

13. ( 25-26 八年级上·河南洛阳·月考 ) 如图，矩形  $ABCD$  中， $AB=8, BC=6$ ， $P$  为  $AD$  边上的一点，沿直线  $BP$  将  $\triangle ABP$  翻折至  $\triangle EBP$ （点  $A$  落到点  $E$  处）。如图  $PE$  与  $CD$  相交于点  $O$ ，且  $OE=OD$ ，则  $AP$  的长为（  
 )

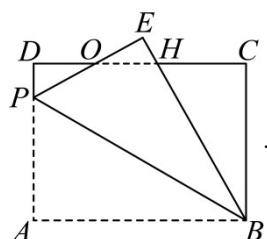


A . 4

B . 5

C . 4.8

D .  $2\sqrt{7}$



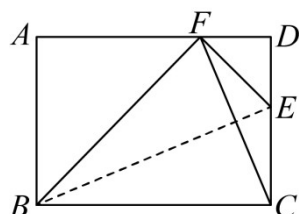
$$DP = EH = 6 - x \quad CH = CD - DH = 8 - x \quad BH = BE - EH = 8 - (6 - x) = x + 2$$

根据勾股定理，得  $(8-x)^2 + 6^2 = (x+2)^2$ ，

解得  $x = 4.8$ ，

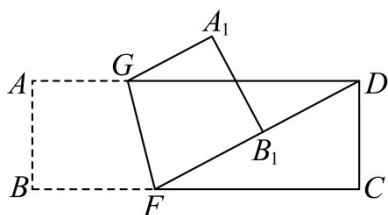
故  $AP = 4.8$ 。

14. ( 24-25 八年级下·上海闵行·月考 ) 如图，已知在矩形  $ABCD$  中， $AB = \sqrt{2}$ ， $BC = 2$ ，将这个矩形沿直线  $BE$  折叠，使点  $C$  落在边  $AD$  上的点  $F$  处，折痕  $BE$  交边  $CD$  于点  $E$ ，那么  $\angle DCF$  等于\_\_\_\_\_度。

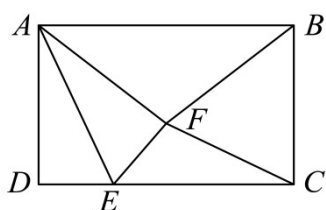


15. ( 24-25 八年级下·上海徐汇·期末 ) 如图，在矩形  $ABCD$  中， $AB=8, AD=24$ ，点  $F$  在  $BC$  边上，折叠

矩形使  $FB$  落在射线  $FD$  上，折痕为  $GF$ ，点  $A, B$  分别落在点  $A_1, B_1$  处．如果  $AG = 7$ ，那么  $B_1D$  的长为\_\_\_\_\_．



16. (2025·上海松江·二模) 如图，矩形  $ABCD$  中， $AB = 8$ ， $AD = 5$ ，点  $E$  在边  $CD$  上，将  $\triangle ADE$  沿直线  $AE$  翻折，点  $D$  落在点  $F$  处，联结  $BF$ 、 $CF$ ．如果  $\triangle BCF$  是以  $BF$  为腰的等腰三角形，那么  $DE$  的长是\_\_\_\_\_．



17. (25-26 八年级上·江苏苏州·月考) 如图 1，四边形  $ABCD$  是长方形， $\angle A = \angle B = \angle C = \angle ADC = 90^\circ$ ， $AD = BC$ ， $AB = CD$ ， $AD = 6$ ， $AB = 10$ ，点  $E$  是  $AB$  边上一点，连接  $DE$ ，过点  $E$  作  $DE$  的垂线，交  $BC$  于点  $F$ ，将  $\triangle BEF$  沿  $EF$  所在直线翻折得到  $\triangle EFG$ ，其中点  $G$  是点  $B$  的对应点．

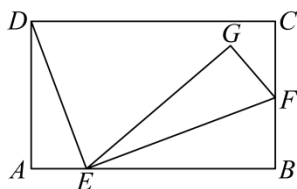


图1

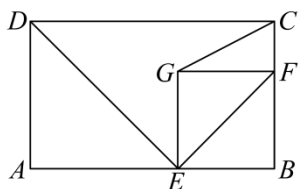


图2

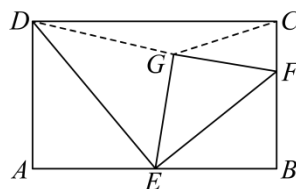
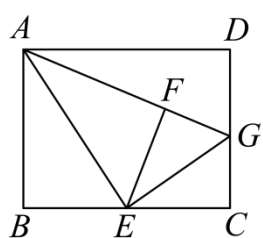


图3

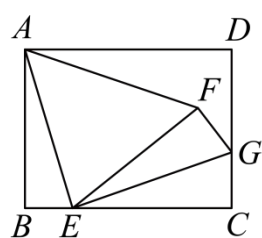
- (1) 如图 2，连接  $CG$ ，若  $\angle AED = 45^\circ$ ，直接写出  $CG$  的长为\_\_\_\_\_；
- (2) 连接  $DG$ ，若  $\triangle DEG$  是以  $DE$  为腰的等腰三角形时，求  $AE$  的长；
- (3) 如图 3，连接  $CG$ ，若  $FG$  的延长线正好经过点  $D$ ，直接写出  $\triangle CDG$  的面积为\_\_\_\_\_．

18. (24-25 八年级下·上海青浦·期末) 在矩形  $ABCD$  中， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，点  $E$ 、 $G$  分别在边  $BC$ 、 $CD$  上，

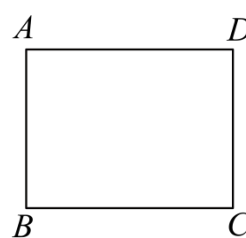
$EG \perp AE$ ，将  $\triangle EGC$  沿直线  $EG$  翻折得  $\triangle EGF$ ，联结  $AF$ 。



(1) 图



(2) 图



备用图

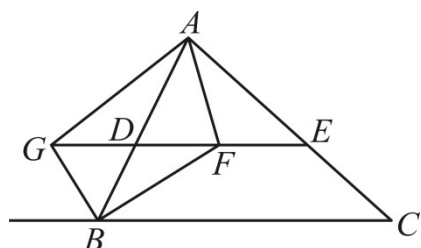
- (1) 如图，当  $EF \perp AF$  时，求证： $BE = EC$ ；
- (2) 如图，当  $AE = EG$  时，求  $\triangle AEF$  的面积；
- (3) 当  $\triangle AEF$  为等腰三角形时，求线段  $BE$  的长。

### 题型 03 矩形的判定

19. (23-24 八年级下·上海徐汇·期末) 已知四边形  $ABCD$  中， $AC$  与  $BD$  交于点  $O$ ， $AB \parallel CD$ ，那么下列命题中错误的是 ( )

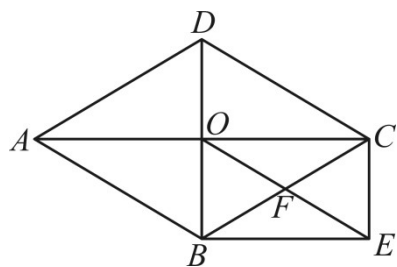
- A. 如果  $AB = CD$ ， $AC \perp BD$ ，那么四边形  $ABCD$  是菱形
- B. 如果  $OB = OD$ ， $AC \perp BD$ ，那么四边形  $ABCD$  是菱形
- C. 如果  $AB = CD$ ， $OA = OD$ ，那么四边形  $ABCD$  是矩形
- D. 如果  $AD = BC$ ， $OA = OB$ ，那么四边形  $ABCD$  是矩形

20. (24-25 八年级下·湖北武汉·期中) 如图，在  $\triangle ABC$  中，点  $D, E$  分别在边  $AB, AC$  上，且  $DE \parallel BC$ ， $\angle ABC$  的平分线  $BF$  和它的邻补角的平分线  $BG$  分别交直线  $DE$  于点  $F$  和  $G$ ，连接  $AF, AG$ ，则下列结论错误的是 ( )



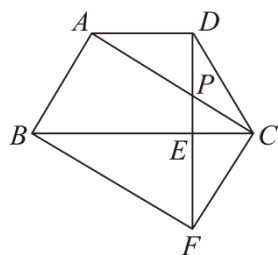
- A. 当  $AF \parallel BG$  时，则四边形  $AGBF$  为矩形
- B. 当  $AD = BD$  时，则四边形  $AGBF$  为矩形
- C. 当  $AB = FG$  时，则四边形  $AGBF$  为矩形
- D. 当  $BF = BG$  时，则四边形  $AGBF$  为菱形

21. (24-25 八年级下·上海浦东新·期中) 如图, 菱形  $ABCD$  中,  $AC$  与  $BD$  相交于点  $O$ , 点  $F$  是  $BC$  的中点,  $AC = 10$ ,  $BD = 6$ , 连接  $OF$ .

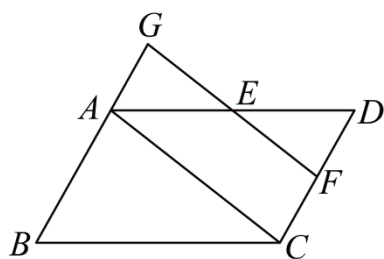


- (1) 求  $OF$  的长.
- (2) 延长  $OF$  到点  $E$ , 使得  $EF = OF$ , 连接  $BE$ ,  $CE$ . 求证: 四边形  $OBEC$  是矩形.

22. (24-25 八年级下·上海金山·期末) 如图, 已知: 在梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $AB = DC$ , 过点  $D$  作  $DE \perp BC$ , 垂足为  $E$ , 延长  $DE$  至  $F$ , 使  $EF = DE$ , 连接  $BF$ ,  $AC$ ,  $AC$  与  $DE$  相交于点  $P$ .



- (1) 求证: 四边形  $ABFC$  是平行四边形;
- (2) 如果  $AD = DE$ ,  $AP = DC$ , 求证: 四边形  $ABFC$  是矩形.
23. (24-25 八年级下·上海松江·期末) 如图, 已知在  $\square ABCD$  中, 点  $E$ 、 $F$  分别是边  $AD$ 、 $CD$  的中点, 过点  $E$ 、 $F$  的直线交  $BA$  的延长线于点  $G$ , 联结  $AC$ .



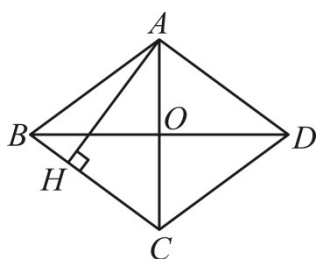
- (1) 求证: 四边形  $ACFG$  是平行四边形;
- (2) 联结  $CE$ , 如果  $CE = AE$ , 求证: 四边形  $ACFG$  是矩形.

## 题型 04 菱形的性质

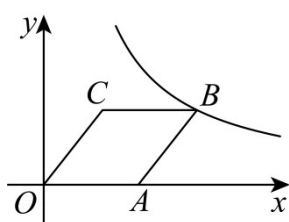
24. (24-25 八年级下·上海·阶段检测) 菱形的一个锐角为  $60^\circ$ ，边长为 20 厘米，则此菱形较长的对角线的长等于\_\_\_\_\_厘米.

25. (24-25 八年级下·上海·月考) 已知菱形的周长为  $8\sqrt{3}$ ，对角线之和为 8，则菱形的面积为\_\_\_\_\_.

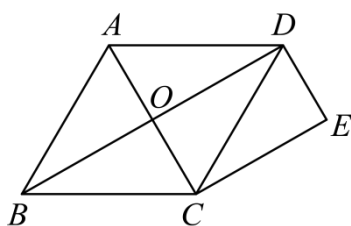
26. (24-25 八年级下·上海松江·期末) 如图，菱形  $ABCD$ ，对角线  $AC$ ， $BD$  相交于点  $O$ ，测得  $AB = 10\text{cm}$ ， $AC = 12\text{cm}$ ，过点  $A$  作  $AH \perp BC$  于点  $H$ ，那么  $AH$  的长为\_\_\_\_\_cm.



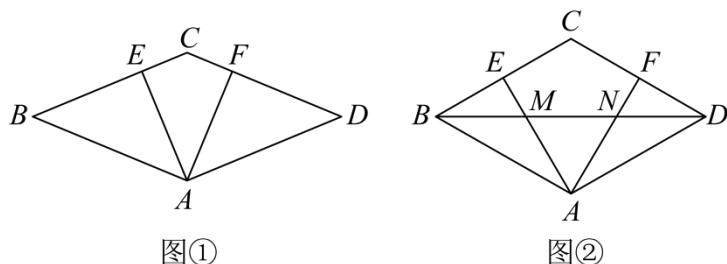
27. (24-25 八年级下·上海·期中) 如图：菱形  $OABC$  的顶点  $C$  坐标为  $(5, 12)$ ，顶点  $A$  在  $x$  轴的正半轴上，反比例函数  $y = \frac{k}{x} (x > 0)$  的图像经过顶点  $B$ ，则  $k$  的值为\_\_\_\_\_.



28. (22-23 八年级下·山东济南·期末) 如图，若  $O$  是菱形  $ABCD$  对角线的交点，作  $DE \parallel AC$ ， $CE \parallel BD$ ， $DE$ ， $CE$  交于点  $E$ ，试判断四边形  $OCED$  的形状？请说明理由.



29. (24-25 八年级下·上海闵行·期末) 已知：在菱形  $ABCD$  中， $AE \perp BC$ ， $AF \perp CD$ ，垂足为  $E$ 、 $F$ .

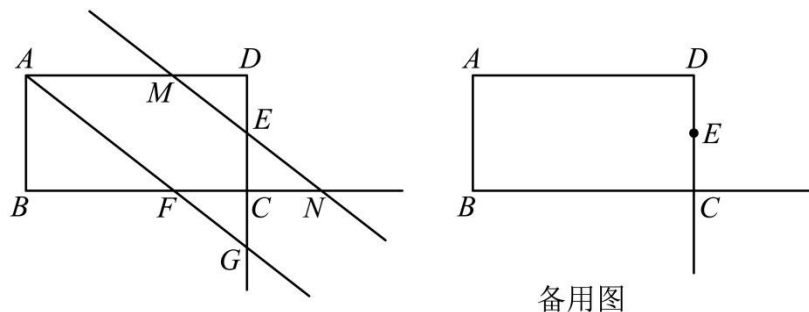


图①

图②

- (1) 如图①，如果  $\angle BAE = \angle EAF$ ，求证： $AE = BE$ ；
- (2) 如图②，如果对角线  $BD$  与  $AE$ 、 $AF$  交于点  $M$ 、 $N$ ，且  $BM = MN$ ，求证： $\angle EAF = 2\angle BAE$ 。

30. (24-25 八年级下·上海奉贤·期末) 如图，在矩形  $ABCD$  中， $AB = 3$ ， $AD = 7$ ， $E$  是边  $CD$  的中点，点  $F$  在边  $BC$  上，连接  $AF$  并延长，交射线  $DC$  于点  $G$ ，过点  $E$  作  $AF$  的平行线，分别交边  $AD$  与射线  $BC$  分别于点  $M$ 、 $N$ 。



备用图

- (1) 如果点  $F$  与点  $C$  重合时，求  $\frac{AM}{DM}$  的值；
- (2) 如果四边形  $AFNM$  是菱形，求这个菱形的面积；
- (3) 连接  $EF$ 、 $GN$ ，当  $EF = GN$  时，求  $BF$  的长。
31. (23-24 八年级下·上海松江·期末) 已知四边形  $ABCD$  是菱形， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $AB = 4$ ， $\angle EAF$  的两边分别与射线  $CB$ 、射线  $DC$  交于点  $E$ 、 $F$ ，点  $E$  与点  $C$ 、点  $B$  不重合， $\angle EAF = 60^\circ$ 。

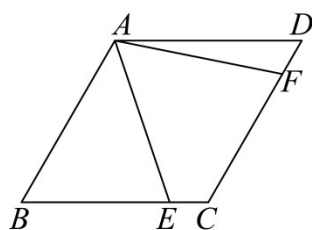


图1

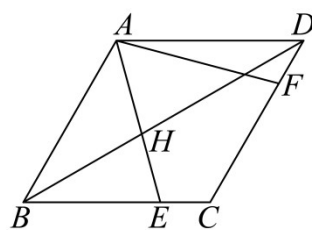
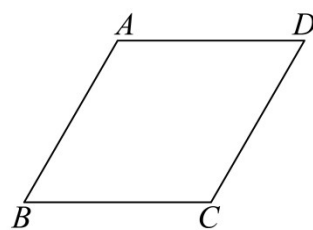


图2



备用图

(1) 当点  $E$  在线段  $CB$  上时，

① 如图 1，求证： $BE = CF$ ；

② 连接  $BD$  交  $AE$  于点  $H$ ，当  $BE = BH$  时，求  $BE$  的长。

(2) 当  $\angle BAE = 15^\circ$  时，求  $BE$  的长。（直接写出答案）

## 题型 05 菱形的判定

32. (24-25 八年级下·上海·期中) 下列命题中是真命题的是 ( )

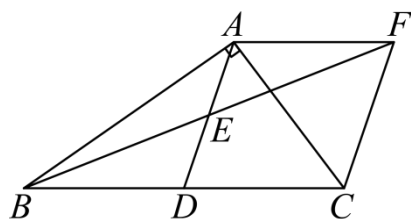
A. 对角线相等的矩形是正方形

B. 对角线互相垂直的四边形是菱形

C. 对角线互相垂直的平行四边形是矩形

D. 对角线互相平分且相等的四边形是矩形

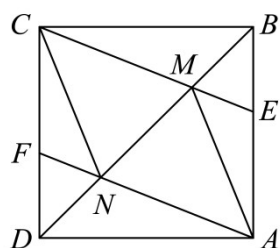
33. (25-26 九年级上·山西运城·期中) 如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $D$  是  $BC$  的中点， $E$  是  $AD$  的中点，延长  $BE$  至点  $F$ ，使得  $BE = EF$ 。



(1) 求证：四边形  $ADCF$  是菱形。

(2) 若  $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AB = \sqrt{3}$ ，求四边形  $ADCF$  的周长。

34. (24-25 八年级下·上海浦东新·期中) 已知：如图，在正方形  $ABCD$  中，点  $E$ 、 $F$  分别在边  $AB$ 、 $CD$  上，且  $AF = CE$ 。对角线  $BD$  分别交  $EC$ 、 $AF$  于点  $M$ 、 $N$ ，连接  $AM$ 、 $CN$ 。



(1) 求证：四边形  $AFCE$  是平行四边形；

(2) 求证：四边形  $AMCN$  是菱形。

35. (24-25 八年级下·上海宝山·期末) 在平行四边形  $ABCD$  中，对角线  $AC$ 、 $BD$  相交于点  $O$ ， $AC = 2\sqrt{3}$ ， $BD = 2$ ， $E$  是边  $AB$  上的一点，连接  $DE$ 。

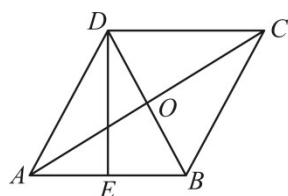


图1

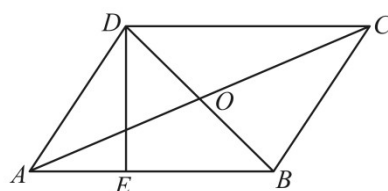
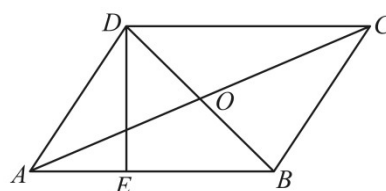


图2



备用图

(1) 如果  $DE \perp AB$ ，

① 如图 1，当点  $E$  为  $AB$  中点时，求证：四边形  $ABCD$  为菱形；

② 如图 2，设  $AE = x$ ， $AB = y$ ，求  $y$  与  $x$  的函数解析式（不用写定义域）；

(2) 连接  $OE$ ，如果  $\triangle ODE$  是以  $OE$  为腰的等腰直角三角形，求  $BE$  的长。连接

## 题型 05 正方形的性质与判定

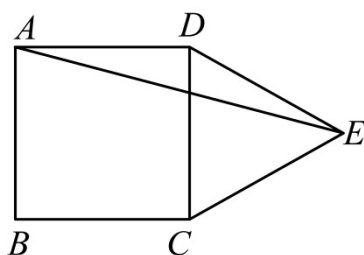
36. (24-25 八年级下·上海徐汇·期末) 下列命题中，不正确的是 ( )

- A. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形
- B. 对角线相等的平行四边形是矩形；
- C. 对角线相等的矩形是正方形
- D. 对角线相等的菱形是正方形 .

37. (24-25 八年级下·上海松江·期末) 已知矩形  $ABCD$  的对角线  $AC$ 、 $BD$  交于点  $O$ ，下列条件中能判定四边形  $ABCD$  是正方形的是 ( )

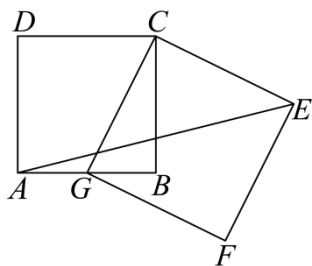
- A.  $OA = OC$
- B.  $OA = OB$
- C.  $OA \perp OB$
- D.  $AC = BD$

38. (23-24 八年级下·云南红河·期末) 如图，在正方形  $ABCD$  外侧作等边  $\triangle CDE$ ，则  $\angle AED$  的度数是 ( )



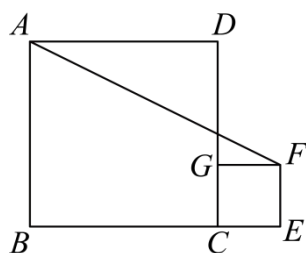
- A.  $10^\circ$
- B.  $12.5^\circ$
- C.  $15^\circ$
- D.  $30^\circ$

39. (25-26 八年级上·上海·期中) 如图，已知四边形  $ABCD$  和四边形  $CEFG$  均为正方形，点  $G$  是  $AB$  的中点，连接  $AE$ ，若  $AB = 4$ ，则  $AE$  的长为 ( )



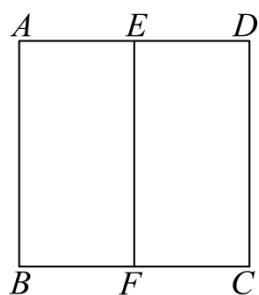
- A.  $2\sqrt{5}$
- B.  $4\sqrt{5}$
- C. 5
- D.  $2\sqrt{17}$

40. (24-25 八年级下·上海松江·期末) 如图，正方形  $ABCD$  和正方形  $CEFG$  中， $B$ 、 $C$ 、 $E$  三点共线，点  $G$  在  $CD$  上， $BC = 3$ ， $CE = 1$ ，那么  $AF$  的长是\_\_\_\_\_。

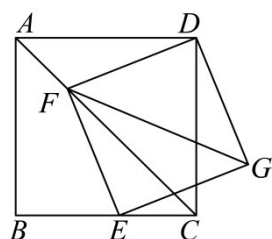


41. (24-25 八年级下·上海浦东新·阶段检测) 正方形  $ABCD$  的边长是  $8\text{cm}$ ，点  $M$  在边上，且  $MC = 2\text{cm}$ ， $P$  是正方形边上的一个动点，连接  $PB$ ，当  $PB = AM$  时， $PC$  的长是\_\_\_\_\_。

42. (24-25 八年级下·上海·期中) 如图，在正方形  $ABCD$  中，点  $E$ 、 $F$  分别为边  $AD$ 、 $BC$  的中点，点  $P$  在边  $CD$  上，如果将  $\triangle BPC$  沿直线  $BP$  翻折后，点  $C$  恰好落在线段  $EF$  上的点  $Q$  处，线段  $EQ$  的长为  $1$ ，那么正方形  $ABCD$  的边长为\_\_\_\_\_。



43. (24-25 八年级下·上海浦东新·期末) 已知：如图，正方形  $ABCD$  中， $AB = 2\sqrt{2}$ ，点  $F$  为对角线  $AC$  上一点，联结  $DF$ ，过点  $F$  作  $FE \perp DF$  交线段  $BC$  于点  $E$  (点  $E$  不与点  $B$ ，点  $C$  重合)，过  $E$  作  $EG \perp FE$ ，过  $D$  作  $DG \perp DF$ ， $EG$  与  $DG$  交于点  $G$ 。

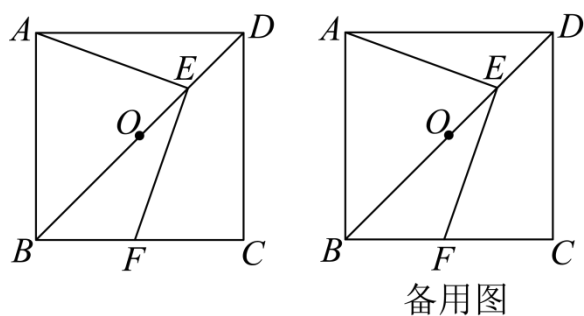


(1) 证明四边形  $DFEG$  为正方形；

(2) 联结  $CG$ ，设  $CG = x$ ， $FC = y$ ，求  $y$  关于  $x$  的函数关系式，并写出定义域；

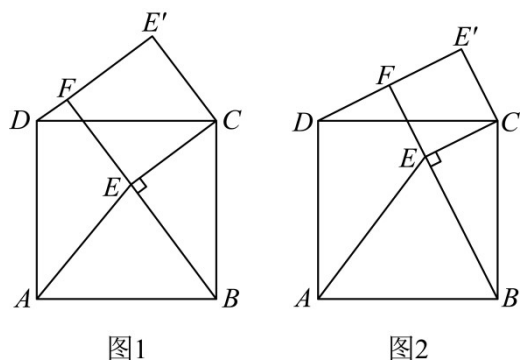
(3) 当  $\triangle ECG$  为等腰三角形时，直接写出  $CG$  的长度。

44. (25-26 八年级下·北京大兴·期中) 如图，在正方形  $ABCD$  中，点  $O$  是对角线  $BD$  的中点，点  $E$  是线段  $OD$  上一动点 (不与点  $D$ 、 $O$  重合)。连接  $AE$ ，作  $EF \perp AE$  交  $BC$  于点  $F$ 。



- (1) 猜想  $AE$  与  $EF$  的数量关系，并证明；
- (2) 连接  $AF$ ，交  $BD$  于点  $G$ ，用等式表示线段  $DE$ ， $EG$ ， $GB$  的数量关系，并证明。

45. (25-26 八年级下·广西贵港·期中) 如图 1，点  $E$  为正方形  $ABCD$  内一点， $\angle CEB = 90^\circ$ ，将  $\text{Rt}\triangle CBE$  绕点  $C$  沿顺时针方向旋转  $90^\circ$ ，得到  $\triangle CDE'$ （点  $B$  的对应点为点  $D$ ），延长  $BE$  交  $DE'$  于点  $F$ ，连接  $AE$ 。



- (1) 四边形  $CE'FE$  是——（填：平行四边形、矩形、正方形中最合适的一个）；
- (2) 如图 2，若  $AB = AE$ ，猜想线段  $DF$  与  $FE'$  的数量关系，并证明。

46. (25-26 九年级上·四川成都·期中) 【初步发现】如图 1，点  $E$ 、 $F$  分别在正方形  $ABCD$  的边  $BC$ ， $CD$  上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，延长  $CD$  至点  $G$ ，使得  $DG = BE$ ，得到  $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ ，从而发现  $EF = BE + DF$ 。已知  $BE = 3$ ， $DF = 2$ ，求正方形  $ABCD$  的边长。

【类比探究】如图 2，正方形  $ABCD$  中， $P, F, Q$  三点分别在边  $AD, CD, BC$  上，连接  $AF, PQ$ ，若  $\angle FOQ = 45^\circ$ ， $AB = 3$ ， $PQ = \sqrt{13}$ ，求线段  $AF$  的长。

【拓展迁移】如图 3，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ，两锐角的角平分线交于点  $O$ ，点  $M, N$  分别在边  $AC, BC$  上，且都不与点  $C$  重合，若  $\angle MON = 45^\circ$ ，连接  $MN$ ，当  $AC = 3$ ， $BC = 4$  时，求  $\triangle MCN$  的周长。

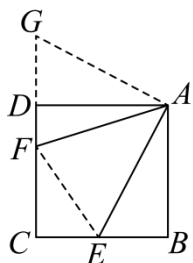


图1

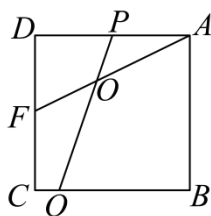


图2

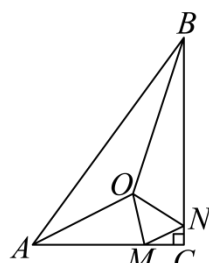


图3

47. (25-26 八年级下·江苏泰州·阶段检测) 问题情境：如图 1，在正方形  $ABCD$  中，点  $E, F$  分别在边  $BC, CD$  上，且  $AE \perp BF$ ，垂足为  $M$ 。那么  $AE$  与  $BF$  相等吗？

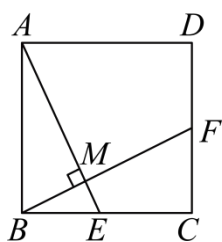


图1

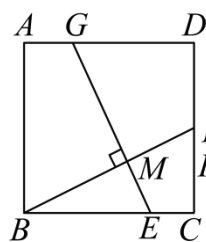


图2

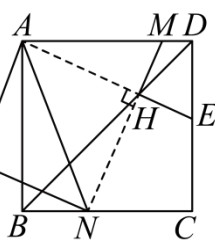
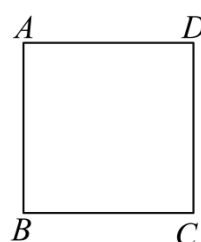


图3



备用图

(1) 直接判断： $AE$  \_\_\_\_\_  $BF$  (填“=”或“ $\neq$ ”)；

在“问题情境”的基础上，继续探索：

问题探究：

(2) 如图 2，在正方形  $ABCD$  中，点  $E, F, G$  分别在边  $BC, CD$  和  $DA$  上，且  $GE \perp BF$ ，垂足为  $M$ 。那么  $GE$  与  $BF$  相等吗？证明你的结论；

问题拓展：

(3)如图 3，点  $E$  在边  $CD$  上，且  $MN \perp AE$ ，垂足为  $H$ ，当  $H$  在正方形  $ABCD$  的对角线  $BD$  上时，连接  $AN$ ，将  $\triangle AHN$  沿着  $AN$  翻折，点  $H$  落在点  $H'$  处。

①四边形  $AHNNH'$  是正方形吗？请说明理由；

②若  $AB = 6$ ，点  $P$  在  $BD$  上， $BD = 3BP$ ，直接写出  $PH' + AH'$  的最小值为\_。