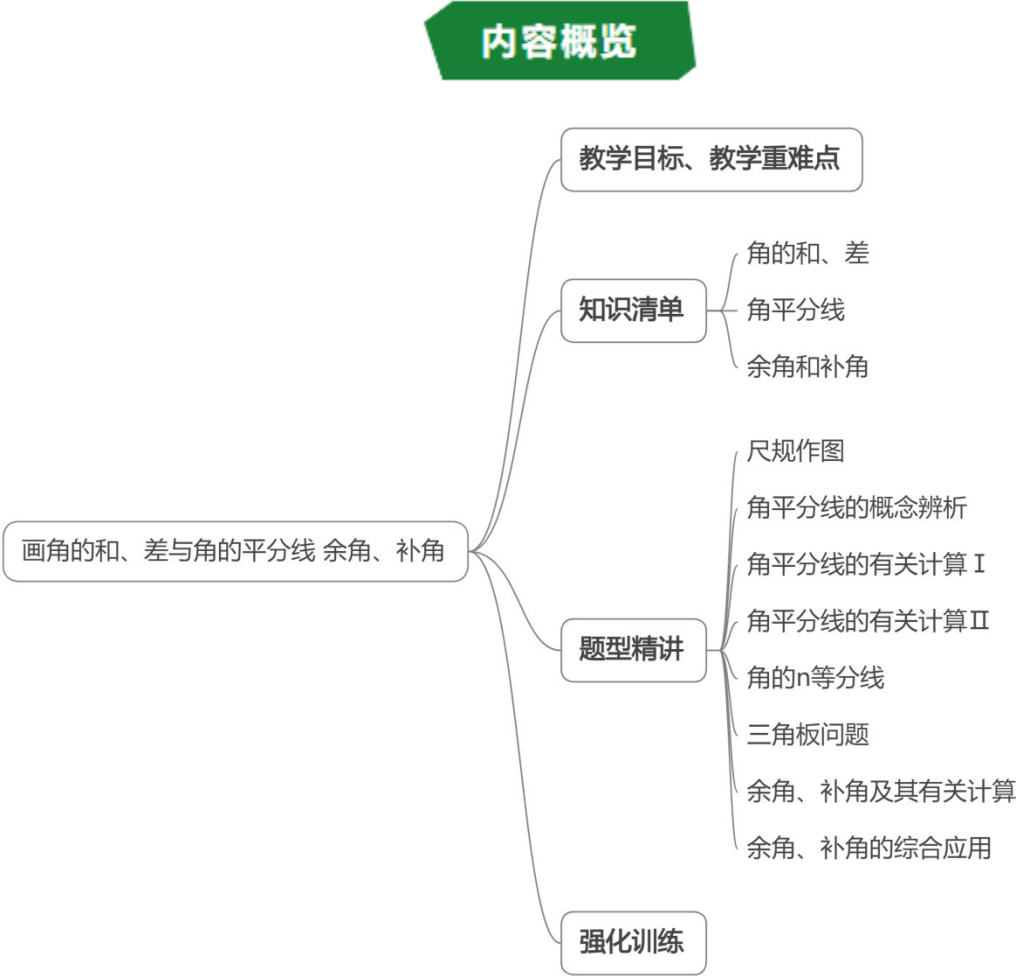


专题 4.4 画角的和、差与角的平分线 余角、补角



教学目标、教学重难点

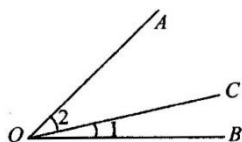
教学目标	1. 了解角的和、差关系，并学会计算； 2. 学会角的平分线的定义、作图及有关计算； 3. 掌握余角、补角的概念及计算。
教学重难点	1.重点 (1) 作图—角平分线，角的和、差； (2) 角的平分线在角的和、差计算中的应用； (3) 余角、补角及其应用； 2.难点 (1) 分类讨论思想；

(2) 角的计算有关的综合应用。

知识清单

知识点 1 角的和、差

如图所示， $\angle AOB$ 是 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的和，记作： $\angle AOB = \angle 1 + \angle 2$ ； $\angle 1$ 是 $\angle AOB$ 与 $\angle 2$ 的差，记作： $\angle 1 = \angle AOB - \angle 2$ 。



要点：

- (1) 用量角器量角和画角的一般步骤：①对中(角的顶点与量角器的中心对齐)；②重合(一边与刻度尺上的零度线重合)；③读数(读出另一边所在线的度数)。
- (2) 利用三角板除了可以做出 30° 、 45° 、 60° 、 90° 外，根据角的和、差关系，还可以画出 15° ， 75° ， 105° ， 120° ， 135° ， 150° ， 165° 的角。

【即学即练】

1. 已知 $\angle \alpha$ 、 $\angle \beta$ ，用尺规画出 $\angle AOB = \angle \alpha + 2\angle \beta$ 。(不写作法，标明字母)

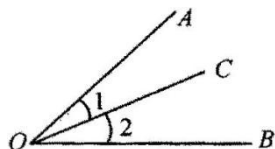


知识点 2 角平分线

1. 角平分线

从一个角的顶点出发，把这个角分成相等的两个角的射线，叫做这个角的平分线。如图所示， OC 是 $\angle AOB$ 的角平分线， $\angle AOB = 2\angle AOC = 2\angle BOC$ ，

$$\angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB.$$



要点：由角平分线的概念产生的合情推理其思维框架与线段中点的思维框架一样。

2. 角平分线的画法：①用量角器作角平分线

例 如图 4-2-19，已知 $\angle ABC$ ，画出它的平分线。

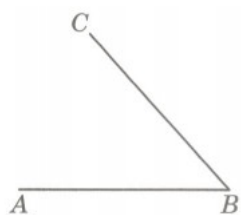


图 4-2-19

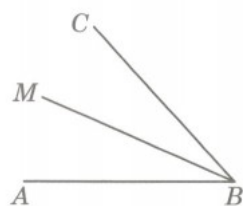


图 4-2-20

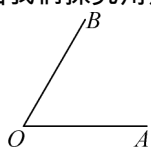
解如图 4-2-20,

①用量角器量得 $\angle ABC=48^\circ$,所以 $\frac{1}{2}\angle ABC=24^\circ$;

②以 B 为顶点,射线 BA 为一边,在 $\angle ABC$ 的内部用量角器画 $\angle ABM=24^\circ$. BM 就是所要画的 $\angle ABC$ 的平分线.

②尺规作角的平分线

下面我们探究用尺规作角的平分线.



已知： $\angle AOB$.

求作：射线 OC，使 $\angle AOC = \angle BOC$.

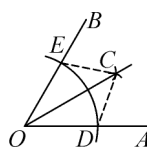
作法：

(1)在 OA 和 OB 上分别截取 OD，OE，使 $OD = OE$ ；

(2)分别以 D，E 为圆心，以大于 DE 的长为半径作弧，两弧在 $\angle AOB$ 内交于点 C；

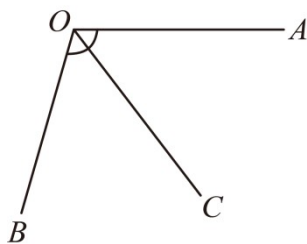
(3)作射线 OC.

OC 就是 $\angle AOB$ 的平分线(如图).



【即学即练】

1. 如图，在下面的四个等式中，不能表示“OC 是 $\angle AOB$ 的平分线”的是 ()



A. $\angle AOC = \angle BOC$

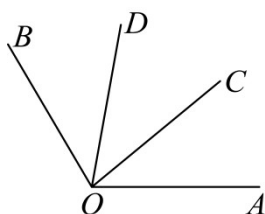
B. $\angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOB$

C. $\angle AOB = 2\angle BOC$

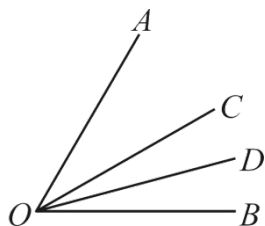
D. $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$

2. 如图， $\angle AOC = \angle COD = \angle BOD$ ，则 OD 平分_____，OC 平分_____， $\frac{2}{3}\angle AOB =$ _____

= _____ .

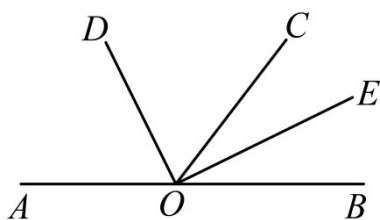


3. 如图所示, OC 是 $\angle AOB$ 的角平分线, OD 平分 $\angle BOC$, 且 $\angle AOB = 60^\circ$, 则 $\angle COD$ 为 ()



- A. 15° B. 30° C. 45° D. 20°

4. 如图, 已知点 A 、 O 、 B 在同一条直线上, 射线 OD 和射线 OE 分别平分 $\angle AOC$ 和 $\angle BOC$, 已知 $\angle AOC = 150^\circ$, 则 $\angle DOE$ 的度数为 ()



- A. 75° B. 80° C. 85° D. 90°

知识点3 余角和补角

1. 定义: 一般地, 如果两个角的和等于 90° (直角), 就说这两个角互为余角, 即其中一个角是另一个角的余角.

类似地, 如果两个角的和等于 180° (平角), 就说这两个角互为补角, 即其中一个角是另一个角的补角.

2. 性质: (1) 同角 (等角) 的余角相等. (2) 同角 (等角) 的补角相等.

要点:

(1) 互余互补指的是两个角的数量关系, 互余、互补的两个角只与它们的和有关, 而与它们的位置无关.

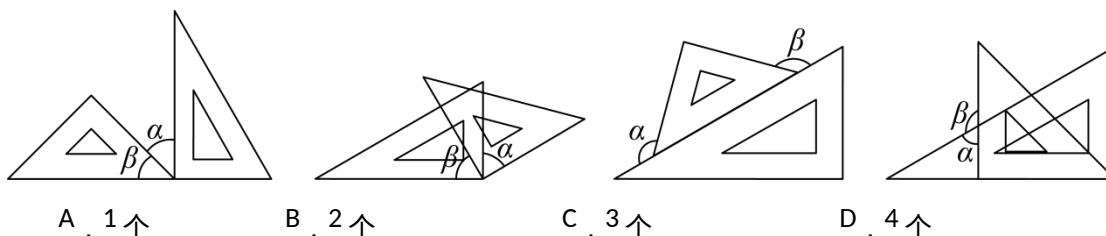
(2) 一般地, 锐角 α 的余角可以表示为 $(90^\circ - \alpha)$, 一个角 α 的补角可以表示为 $(180^\circ - \alpha)$. 显然一个锐角的补角比它的余角大 90° .

【即学即练】

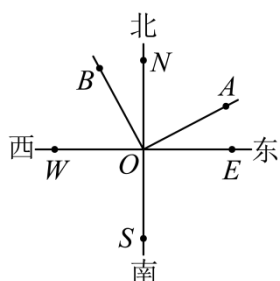
1. 已知 $\angle \alpha = 53^\circ 26'$, 则 $\angle \alpha$ 的余角的大小为 _____.

2. 若 $\angle \beta$ 与 $\angle \alpha$ 互补, $\angle \beta = 3\angle \alpha$, 则 $\angle \alpha = \underline{\quad}^\circ$.

3. 一个角的补角是它的余角的3倍，则这个角是_____.
4. $\angle AOB$ 是直角， OC 是位于 $\angle AOB$ 内的一条射线， OD 平分 $\angle COB$ ， OE 平分 $\angle COA$ ，则 $\angle EOD$ 补角的度数为_____.
5. 如图，将一副三角尺按不同位置摆放，摆放方式中 $\angle \alpha = \angle \beta$ 的图形有 ()



6. 如图，射线 OE 、 OS 、 OW 、 ON 分别表示东、南、西、北方向，已知 $\angle AOB = 90^\circ$.

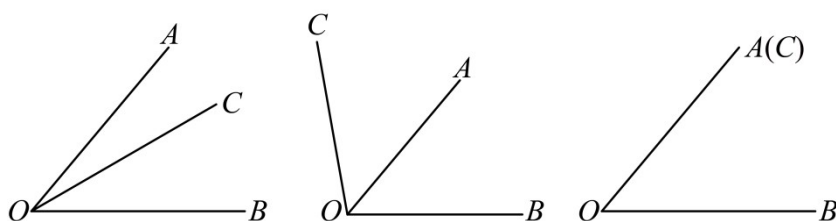


- (1) 图中与 $\angle AON$ 互余的角是_____；
- (2) 图中与 $\angle AON$ 互补的角是_____；
- (3) 如果 $\angle BOE = 118^\circ$ ，那么点 A 在点 O 的_____方向.

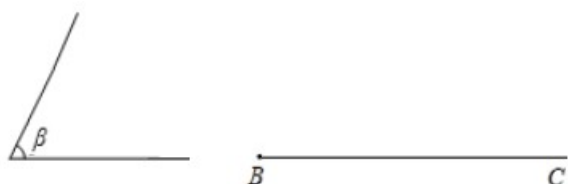
题型精讲

题型 01 尺规作图

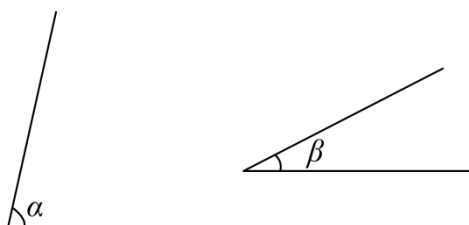
【典例 1】 . 根据图形，写出 OC 与 $\angle AOB$ 的位置关系，并用数学符号写出 $\angle AOB$ 与 $\angle COB$ 的大小关系.



【变式 1】 . 已知射线 BC ， $\angle \beta$ ，用直尺和圆规作 $\angle ABC$ ，使 $\angle ABC = \angle \beta$ (不写作法，保留作图痕迹).



【变式2】. 已知 $\angle\alpha$ 、 $\angle\beta$ ，用尺规画出 $\angle AOB=2\angle\alpha-\angle\beta$ 。（不写作法，标明字母）



题型 02 角平分线的概念辨析

【典例1】. 下列关于角平分线的说法正确的是（ ）

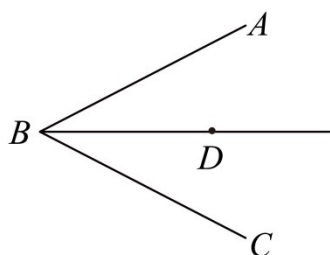
- A. 角的平分线是一条线段
- B. 角的平分线是平分这个角的直线
- C. 在角的内部，以角的顶点为端点的一条直线
- D. 在角的内部，以角的顶点为端点的一条射线

【变式1】. 已知 OC 是 $\angle AOB$ 内的一条射线，下列条件中不能确定射线 OC 平分 $\angle AOB$ 的是（ ）

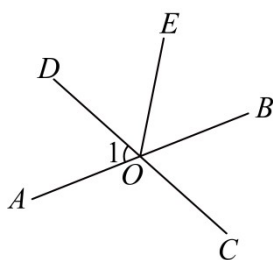
- A. $\angle BOC = \frac{1}{2}\angle AOB$
- B. $\angle AOB = 2\angle AOC$
- C. $\angle AOC = \angle BOC$
- D. $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC$

题型 03 角平分线的有关计算

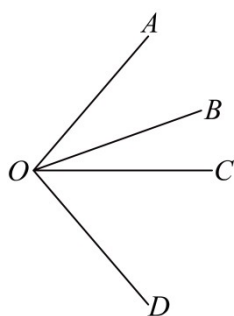
【典例1】. 如图已知 BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线，如果 $\angle ABD = 20^\circ 30'$ ，那么 $\angle ABC =$ _____。（结果用度表示）



【变式1】. 如图，直线 AB 、 CD 交于点 O ，若 $\angle 1 = 64^\circ$ ，射线 OE 平分 $\angle BOD$ ，那么 $\angle EOC =$ _____。

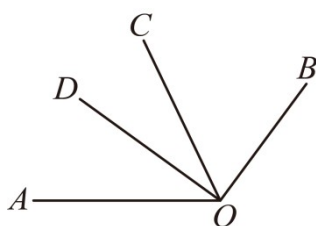


【变式2】 . 如图, $\angle AOB = 30^\circ$, $\angle COB = 20^\circ$, OC 平分 $\angle AOD$. 则 $\angle COD$ 是 ()



- A . 50° B . 20° C . 25° D . 30°

【变式3】 . 如图, 已知: OC 平分 $\angle AOB$, $\angle BOC = 2\angle COD$, 且 $\angle COD = 27^\circ$, 则 $\angle AOB$ 的度数为 ()



- A . 110° B . 108° C . 27° D . 81°

题型 04 角平分线的有关计算II

【典例1】 . 已知 $\angle AOB = 20^\circ$, $\angle AOC = 4\angle AOB$, OD 平分 $\angle AOB$, OM 平分 $\angle AOC$, 则 $\angle MOD$ 的度数是 ()

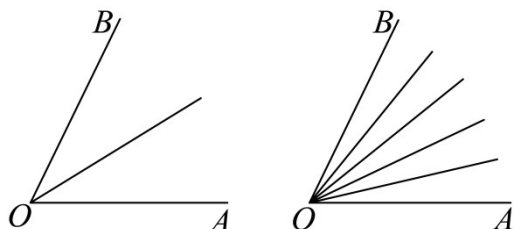
- A . 20° 或 50° B . 20° 或 60° C . 30° 或 50° D . 30° 或 60°

【变式1】 . 已知 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线, $\angle BOD = \frac{1}{3}\angle COD$, OE 平分 $\angle COD$, 设 $\angle AOB = \alpha$, 则 $\angle BOE =$ ()

- A . $\frac{5}{16}\alpha$ 或 $\frac{1}{8}\alpha$ B . $\frac{5}{16}\alpha$ 或 $\frac{1}{6}\alpha$ C . $\frac{1}{8}\alpha$ 或 $\frac{1}{6}\alpha$ D . $\frac{1}{6}\alpha$

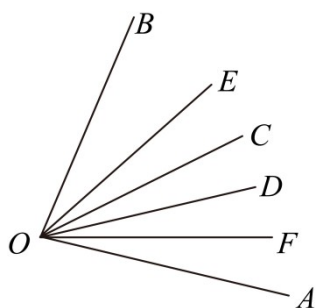
题型 05 角的 n 等分线

【典例 1】 . 如图，设锐角 $\angle AOB$ 的度数为 α ，若一条射线平分 $\angle AOB$ ，则图中所有锐角的和为 2α . 若四条射线五等分 $\angle AOB$ ，则图中所有锐角的和为 ()



- A . 7α B . 6α C . 5α D . 4α

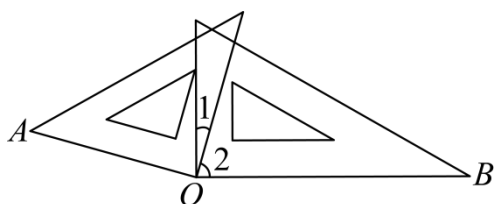
【变式 1】 . 如图，已知射线 OC 平分 $\angle AOB$ ，射线 OD, OE 三等分 $\angle AOB$ ，又 OF 平分 $\angle AOD$ ，图中等于 $\angle BOE$ 的角共有 ()



- A . 1 个 B . 2 个 C . 3 个 D . 4 个

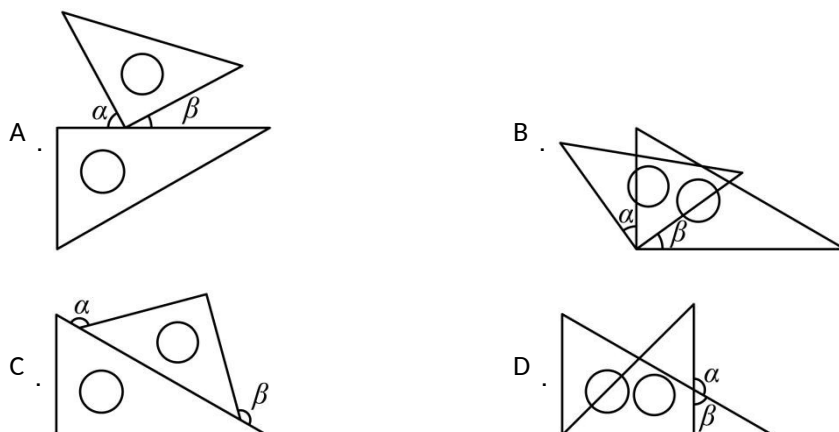
题型 06 三角板问题

【典例 1】 . 一副三角板按如图方式摆放，且 $\angle 2 = 2\angle 1$ ，则 $\angle AOB$ 的度数是 ()



- A . 120° B . 150° C . 160° D . 165°

【变式 1】 . 如图，将一副三角板按不同位置摆放，其中 α 和 β 互为余角的是 ()



题型 07 余角、补角及其有关计算

【典例 1】. $40^{\circ}36'$ 的余角为

【变式 1】. 已知 $\angle A$ 与 $\angle B$ 互余, $\angle B$ 与 $\angle C$ 互补. 若 $\angle A = 60^{\circ}$, 则 $\angle C$ 的度数是 ()

- A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

【变式 2】. 如果 $\angle 1 + \angle 2 = 90^{\circ}$, $\angle 2 + \angle 3 = 90^{\circ}$, 那么 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 的关系是 ()

- A. $\angle 1 + \angle 3 = 90^{\circ}$ B. $\angle 1 + \angle 3 = 180^{\circ}$
C. $\angle 1 = \angle 3$ D. 不能确定

【变式 3】. $\angle \alpha$ 与它的余角相等, $\angle \beta$ 与它的补角相等, 则 $\angle \alpha + \angle \beta = \underline{\hspace{1cm}}^{\circ}$.

【变式 4】. 如果一个锐角的补角是它的余角的 3 倍, 则这个角为 ()

- A. 45° B. 36° C. 72° D. 60°

【变式 5】. 一个角的补角是它的余角的 3 倍, 则这个角是_____.

【变式 6】. 如果两个角互为补角, 而其中一个角比另一个角的 4 倍少 30° , 那么这两个角的度数是

()

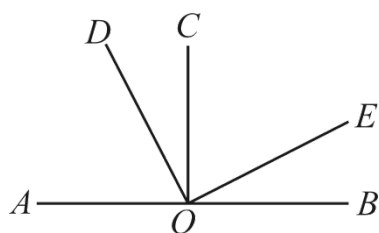
- A. 40° , 130° B. 42° , 138° C. 30° , 150° D. 40° , 138°

题型 08 余角、补角的综合应用

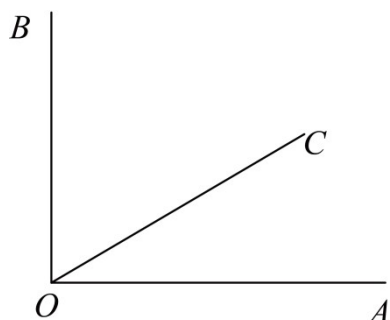
【典例 1】. 如果 $\angle \alpha$ 和 $\angle \beta$ 互补, 且 $\angle \alpha < \angle \beta$, 则下列表示 $\angle \alpha$ 的余角的式子正确的有_____个.

- ① $90^{\circ} - \angle \alpha$; ② $\angle \beta - 90^{\circ}$; ③ $\frac{1}{2}(\angle \alpha + \angle \beta)$; ④ $\frac{1}{2}(\angle \beta - \angle \alpha)$

【变式 1】. 如图, $\angle AOC \angle BOC \angle DOE = 90^{\circ}$, 则图中互余的角有_____对.

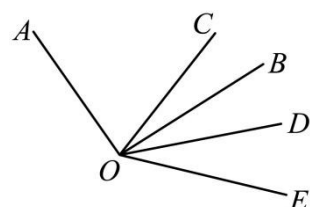


【变式 2】 . 如图，已知 $\angle AOB = 90^\circ$ ， OC 在 $\angle AOB$ 的内部，



- (1) 用直尺和圆规作出 $\angle BOC$ 的平分线 OD （不写作法，保留作图痕迹）；
- (2) 如果 $\angle AOC = 30^\circ$ ，在完成画图后所得的图形中，与 $\angle AOC$ 互余的角有_____；
- (3) 如果 $\angle BOD$ 的补角与 $\angle AOC$ 的 2 倍互补，那么 $\angle AOC =$ _____，

【变式 3】 . 如图，已知 $OA \perp OB$ ，点 O 为垂足， OC 是 $\angle AOB$ 内任意一条射线， OB ， OD 分别平分 $\angle COD$, $\angle BOE$ ，下列结论：



- ① $\angle COD = \angle BOE$ ；
- ② $\angle AOE$ 与 $\angle BOE$ 互补；
- ③ $\angle BOE = \angle AOC$ ；
- ④ $\angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 互余，

其中正确的有_____。（只填写正确结论的序号）

强化训练

一、单选题

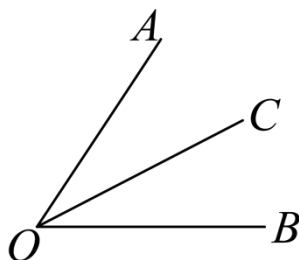
1. 已知 $\angle \alpha = 76^\circ 22'$ ，则 $\angle \alpha$ 的补角是（ ）。

- A . $103^{\circ}38'$ B . $103^{\circ}78'$ C . $13^{\circ}38'$ D . $13^{\circ}78'$

2 . 如果一个角的补角为 140° , 那么这个角的余角是 ()

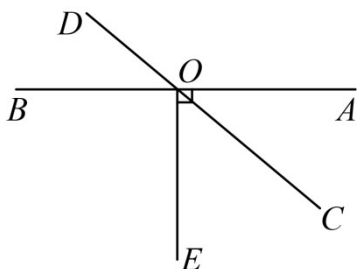
- A . 40° B . 50° C . 100° D . 140°

3 . 如图, 射线 OC 平分 $\angle AOB$. 若 $\angle AOB = 58^{\circ}$, 则 $\angle COB$ 的度数为 ()



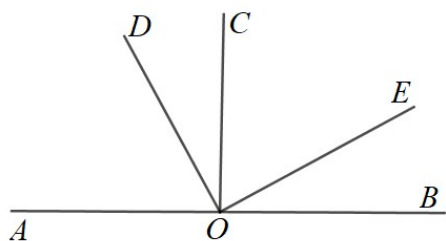
- A . 90° B . 58° C . 29° D . 24°

4 . 如图, 直线 AB , CD 交于点 O , $\angle AOE = 90^{\circ}$, 若 $\angle AOC : \angle COE = 4 : 5$, 则 $\angle AOD$ 为 ()



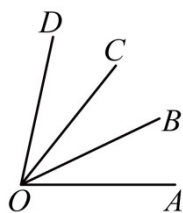
- A . 120° B . 130° C . 140° D . 150°

5 . 如图所示, 点 O 为直线 AB 上一点, $\angle AOC = \angle DOE = 90^{\circ}$, 那么下列互为余角的是 ()



- A . $\angle AOD$ 与 $\angle DOC$ B . $\angle AOD$ 与 $\angle DOE$ C . $\angle DOC$ 与 $\angle BOE$ D . $\angle AOD$ 与 $\angle COE$

6 . 如图, 已知 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$, 下列结论中错误的是 ()



A. OB 、 OC 分别平分 $\angle AOC$ 、 $\angle BOD$

B. $\angle AOD = \angle AOB + \angle AOC$

C. $\angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOD - \angle AOB$

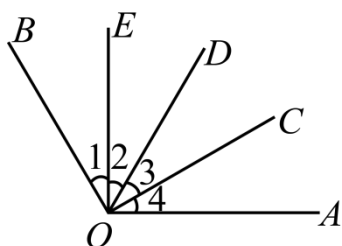
D. $\angle COD = \frac{1}{2} (\angle AOD - \angle BOC)$

二、填空题

7. 若 $\angle AOB = 20.28^\circ$ ，且 OC 平分 $\angle AOB$ ，则 $\angle AOC =$ _____ $^\circ$ _____ $'$ _____ $''$.

8. 若 $\angle 1 = 31^\circ 25' 43''$ ，则 $\angle 1$ 的余角为 _____ .

9. 如图， $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.



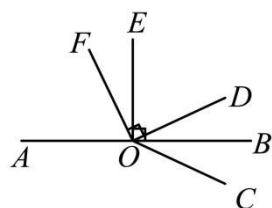
(1) OD 是 _____ 的平分线， OE 是 _____ 的平分线， OC 是 _____ 的平分线；

(2) _____ $= 4\angle 1$ ，_____ $=$ _____ $= 3\angle 1$ ；

(3) $\angle BOD =$ _____ $\angle BOC =$ _____ $\angle AOB$ ；_____，

(4) 若 $\angle BOE = 30^\circ$ ，则 $\angle AOE =$ _____ .

10. 如图所示，已知 O 是直线 AB 上一点， $\angle BOE = \angle FOD = 90^\circ$ ， OB 平分 $\angle COD$.

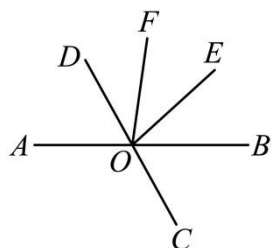


(1) 图中与 $\angle DOE$ 相等的角有_____；

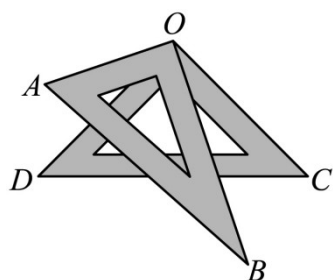
(2) 图中与 $\angle DOE$ 互余的角有_____；

(3) 图中与 $\angle DOE$ 互补的角有_____。

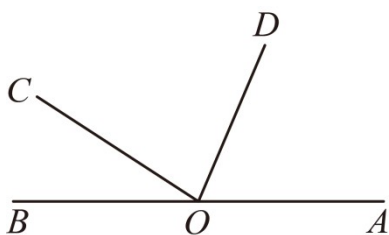
11. 如图，直线 AB 与 CD 相交于点 O ， $\angle DOE = \angle BOF = 80^\circ$ ，射线 OE 平分 $\angle BOF$ ，则 $\angle BOC$ 的度数为_____。



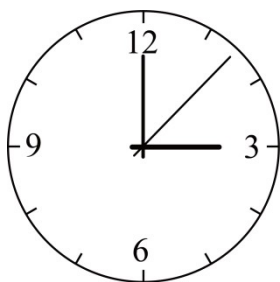
12. 如图，将一副三角板叠放在一起，使直角顶点重合于点 O ，则 $\angle AOC + \angle DOB =$ _____。



13. 如图所示， O 为直线 AB 上的一点，在直线 AB 的同侧做射线 OC, OD ，使得 $\angle COD = 80^\circ$ ，过点 O 做射线 OE ，使得 $\angle BOE = 2\angle COE$ ，另做射线 OF ，使得 OF 平分角 $\angle COD$ ，当 $\angle AOD = 2\angle EOF$ 时，则 $\angle BOC =$ _____。



14. 如图，钟表的秒针因故障停滞不动，时针与分针正常运行。小晶发现 3 点整时，秒针正好是时针与分针夹角的角平分线，经过 m 分钟后，秒针又一次成为时针与分针夹角的角平分线，则 m 的最小值是_____。



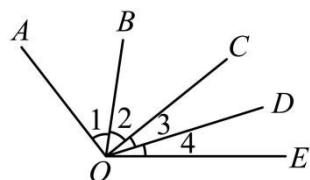
三、解答题

15. 利用一副三角尺能画出下列度数的角吗？如何画？试试看。（不要写出做法，要保留作图痕迹）

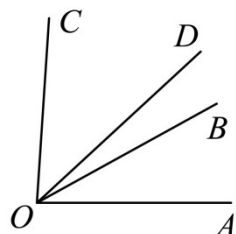
(1) 150° .

(2) 15°

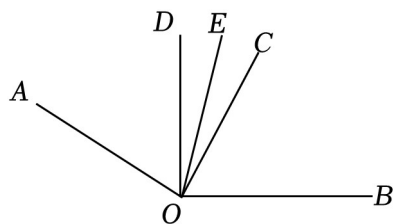
16. 如图，已知 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，若 $\angle AOE = 128^\circ$ ，求 $\angle BOD$ 的度数 .



17. 如图，已知 $\angle BOC = 2\angle AOB$ ，OD 平分 $\angle AOC$ ， $\angle BOD = 14^\circ$ ，求 $\angle AOB$ 的度数 .



18. 如图， $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 都是直角 .



(1) 判断 $\angle COB$ 与图中哪个角相等，并简单写出理由；

(2) 若 $\angle DOC = 30^\circ$ ，过点 O 作 $\angle AOB$ 的平分线 OE，求 $\angle AOE$ 的度数 .

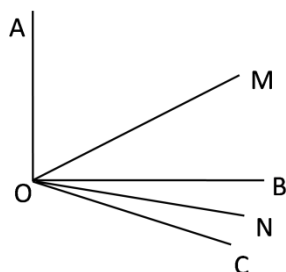
19. 如图，已知 $\angle AOB = 90^\circ$ ， $\angle BOC = 30^\circ$ ，OM 平分 $\angle AOC$ ，ON 平分 $\angle BOC$.

(1) 求 $\angle MON$ 的度数；

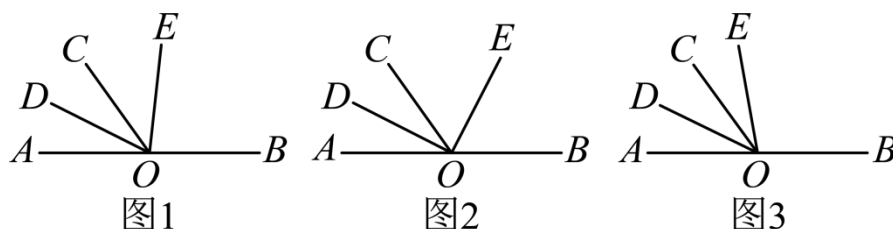
(2) 若题干中的 $\angle AOB = \alpha$ ，其他条件不变，求 $\angle MON$ 的度数；

(3) 若题干中的 $\angle BOC = \beta$ (β 为锐角)，其他条件不变，求 $\angle MON$ 的度数；

(4) 综合 (1) (2) (3) 的结果，你能得出什么结论？



20. 如图，点 O 在直线 AB 上，从 O 点引一条射线 OC ， OD 平分 $\angle AOC$ ， $\angle BOC = n\angle EOC$ 。

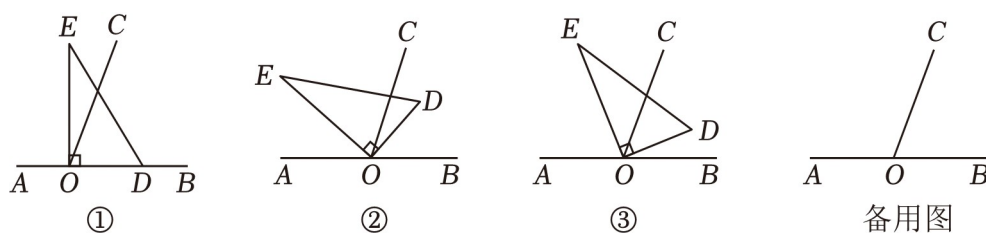


(1) 如图 1，若 $\angle AOD = 27^\circ$ ， $n = 3$ ，求 $\angle DOE$ ；

(2) 如图 2，若 $\angle DOE$ 为直角，求 n 的值；

(3) 如图 3，若 $n = 5$ ，设 $\angle AOD = m$ （用含 m 的代数式表示 $\angle DOE$ 的度数）。

21. 如图，以直线 AB 上一点 O 为端点作射线 OC ，使 $\angle BOC = 70^\circ$ ，将一个直角三角形的直角顶点放在点 O 处。（ $\angle DOE = 90^\circ$ ）



(1) 如图①，若直角三角板 DOE 的一边 OD 放在射线 OB 上，则 $\angle COE = \underline{\quad}^\circ$ ；

(2) 如图②，将直角三角板 DOE 绕点 O 逆时针方向转动到某个位置，若 OC 恰好平分 $\angle BOE$ ，求 $\angle COD$ 的度数；

(3) 如图③，将直角三角板 DOE 绕点 O 转动，如果 OD 始终在 $\angle BOC$ 的内部，试猜想 $\angle BOD$ 和 $\angle COE$ 有怎样的数量关系？并说明理由；

(4)将直角三角板 DOE 绕点 O 转动一周，如果 OD 在 $\angle BOC$ 的外部，且 $\angle BOD = 80^\circ$ ，请直接写出 $\angle COE$ 的度数．