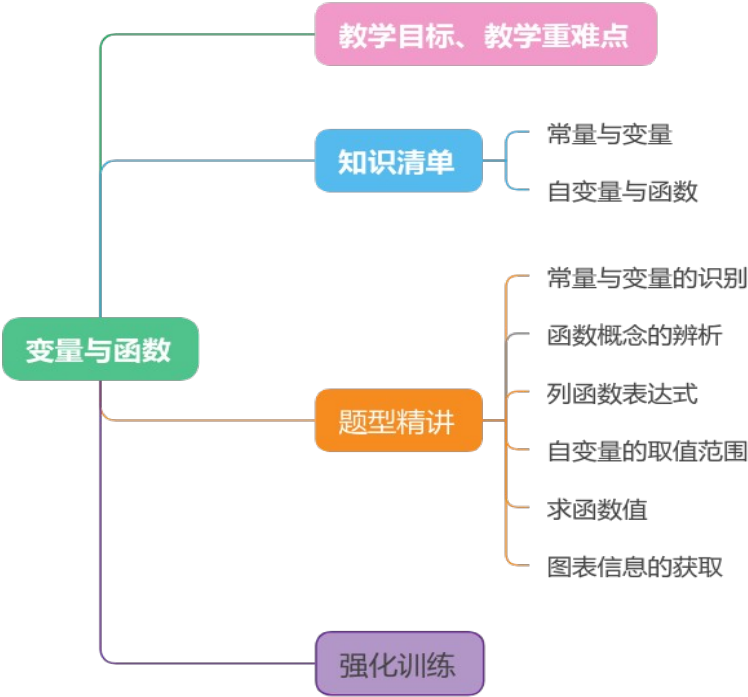


专题 25.1 变量与函数

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 理解常量、变量的意义，能在实例中区分常量与变量； 2. 掌握函数的核心概念：变化过程中两变量 x 与 y ，对 x 的每一个确定值， y 都有唯一确定值与其对应，明确自变量、函数、函数值的概念； 3. 能写出简单函数的表达式，确定自变量的取值范围（兼顾解析式与实际意义），会求函数值； 4. 能用表达式、表格、图象三种形式描述简单函数关系，建立初步的函数模型。
教学重难点	1.重点 函数概念的理解；能在实例中写出函数表达式，准确确定自变量取值范围；掌握函数的三种表示法，能实现简单的形式转换。 2.难点 函数概念的理解与应用。

知识清单

知识点 01 常量与变量

1.概念：在考察某个问题的过程中，保持数值不变的量称为_____；可以取不同数值的量称为_____.

2.说明：

(1)在很多问题中，一个变量往往依赖于另外一个变量而存在.

(2)变量一般都用字母表示，常量一般用具体的数表示，但有时也用字母表示，不能认为式子中出现的字母就是变量.如：圆周率 π ,它是常量，而不是变量.

【即学即练】

例 1 写出下列问题中的关系式，并指出其中的常量和变量.

(1)打字收费标准是每千字 4 元，试用字数 x (千字)表示打字费 y (元);

(2)一个容积 40 升的油箱，汽车匀速行驶时每小时耗油 8 升，试用行驶时间 t (小时)表示油箱里的剩余油量 Q (升);

(3)圆的周长公式；

(4)已知三角形的底边为 x ,高为 h ,求面积为 y .

(5) y 是 x 的平方根的 3 倍.

解：(1) $y=_____$,其中_____是常量，_____ y 是变量.

(2) $Q=_____$,其中_____是常量，_____是变量.

(3) $C=_____$,其中_____是常量，_____都是变量.

(4) $y=_____$ ，其中_____是常量，_____是变量.

(5) $y=_____$ ，其中_____是常量，_____是变量.

知识点 02 自变量与函数

1. 定义

一般地，若在某个变化过程中有_____变量，设为 x 和 y . 当 x 在取值范围内变化时， y 随着 x 的变化而变化；当 x 的值确定时， y 的值也随之_____，变量 y 关于变量 x 的这种_____关系叫作_____，或者说变量 y 是变量 x 的_____， x 称为_____.

说明，确定是否存在函数关系的方法：

(1) 某一变化过程中有**两个变量**.

(2) 两个变量之间有确定的**依赖**关系，其中一个变量 x 的变化引起另一个变量 y 的变化.

(3) 自变量 x 在取值范围内的每一个确定的值， **y 都有唯一确定的值**与它对应

【即学即练】

例2 在例题1中，各小题的几个变量之间是否是函数关系？

解：(1) 在 $y=4x$ 中，当 x 每取一个值时， y 都有_____的值与之对应，所以 y **是**关于 x 的函数；

(2) 在 $Q=40-8t$ 中当 $0 \leq t \leq 5$ 时，当 t 每取一个值时， Q 都有_____的值与之对应，所以 Q _____关于 t 的函数；

(3) 在 $C=2\pi r$ 中, 当 $r \geq 0$ 时，当 r 每取一个值时， C 都有_____的值与之对应，所以 C _____关于 r 的函数；

(4) 在 $y=\frac{1}{2}xh$ 中存在_____个变量，所以他们之间_____函数关系；

(5) 在 $y=\pm 3\sqrt{x}$ 中，当 x 时， x 每取一个值时， y 都有_____个值与之对应，所以 y _____关于 x 的函数；

2. 自变量的取值范围

一个函数中，自变量都有它的取值范围。

说明：

(1) 对于用表达式表示的函数，如果不加说明，那么这个函数自变量的取值范围是能使这个函数的表达式**有意义的实数**.

(2) 当用函数表达式表示实际问题时，自变量的取值不但要使函数表达式本身有意义，而且还必须使**实际问题有意义**.

【即学即练】

例3 指出例1几个函数关系中自变量的取值范围.

解：(1) 在 $y=4x$ 中， x 为_____；

(2) 在 $Q=40-8t$ 中, 自变量的取值范围自变量的取值范围_____;

(3) 在 $C=2\pi r$ 中, 自变量的取值范围_____;

例 4 在例 1 中第(5)小题, 若把题目改成“ y 是 x 的**算术平方根**的**倒数**”呢? 此时 y 是不是关于 x 的函数, 如果是, 自变量的取值范围是多少?

解: 因为 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 或 $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$, 所以 y _____关于 x 的函数, x 的取值范围是_____.

3. 函数关系的三种表示形式

(1) 用函数表达式来表示;

(2) 用表格来表示;

(3) 用图像表示

4. 函数值

对于自变量 x 在取值范围内的某个确定的值 a , 函数 y 所对应的值为 b , 即如果当 $x=a$ 时 $y=b$, 那么称 b 为函数在 $x=a$ 时相应的函数值.

【易错辨析】

1. 求函数自变量的取值范围时易因考虑不周而出错

例 5 现将 500 本笔记本赠送给学生, 每人 5 本, 写出余下的笔记本数 y 和学生数 x 之间的函数表达式, 并求出自变量 x 的取值范围.

解: 所求的函数表达式为 $y=500-5x$.

$\therefore x$ 表示学生数, $\therefore x \geq 0$

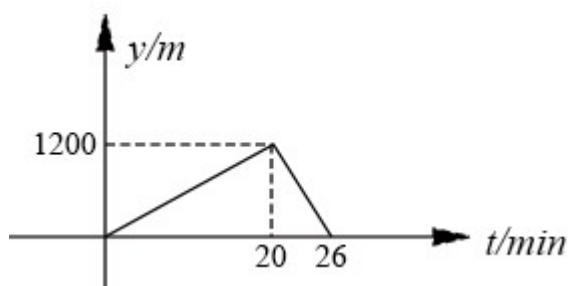
【评析】 解答有误. $\therefore x$ 表示学生数, $\therefore x$ 应为_____数. 又 $\therefore y$ 表示笔记本数, $\therefore y=500-5x \geq 0$,

$\therefore x$ 的取值范围_____

【点睛】 在实际问题的函数表达式中, 不要因忽视自变量和函数的**实际意义**或**隐含条件**而出错. 本题易漏掉 x 为整数和 $y \geq 0$ 这两个隐含条件.

2. 在读取函数图像信息时易因未理解自变量和函数代表的实际意义而出错

例 6 有一个巡检机器人从巡检起点出发，到达本次巡检最远点后，未发现任何异常情况便原路返回．机器人离出发地点的距离 $y(\text{m})$ 与 $t(\text{min})$ 的关系如图所示，根据图象回答下列问题：



- (1) 这个函数图象反映了哪两个变量之间的关系？
- (2) 巡检机器人耗时多少到达最远点？最远点距起点多远？
- (3) 求 $t=26$ 时的函数值，并说明它的实际意义．

解：（1）这个函数图像反映了巡检机器人行驶路程 $y(\text{m})$ 与行驶时间 $t(\text{min})$ 两个变量之间的关系；

（2）由图可知，巡检机器人耗时 26 分钟时到达最远点，相距 1200m；

（3）由图可知，当 $t=26$ 时，函数值 $y=1200$ ，

它的实际意义为：机器人 26 分钟到达最远点．

【评析】 解答有误．

y 代表的不是“机器人行驶路程”而是“_____”，所以函数图象反映的是

“_____”与_____两个变量之间的关系；

由图可知，巡检耗时 20 分钟距离起点最远点_____处；

由图可知，当 $t=26$ 时，函数值 $y=_____$ (m)，它的实际意义为：机器人巡检 26 分钟时距离起点_____m, 即 26 分钟时机器人返回到_____．

【点睛】 理解函数的图像关键是要辨析清楚是哪两个变量之间的依赖关系，函数图像有别于我们之前的线段示意图．

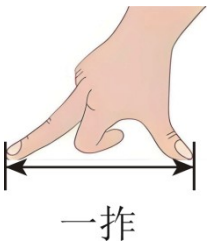
题型精讲

题型 01 常量和变量的识别

【典例 1】要画一个面积为 $\frac{15}{2}\text{cm}^2$ 的长方形，其长为 $x\text{cm}$ ，宽为 $y\text{cm}$ ，在这一变化过程中，常量与变量分别是（ ）

- A. 常量为 $\frac{15}{2}$ ；变量为 x, y
- B. 常量为 $\frac{15}{2}$ ， y ；变量为 x
- C. 常量为 $\frac{15}{2}$ ， x ；变量为 y
- D. 常量为 x, y ；变量为 $\frac{15}{2}$

【变式 1】如图，张开大拇指和中指，两手指指尖间的距离为“一拃”。据统计，通常情况下，人的一拃长 z （单位：cm）与本人的身高 s （单位：cm）之间的关系式为 $z = 0.3s - 31.3$ ，则下列关于变量和常量的说法正确的是（ ）



- A. z 是变量， s 是常量
- B. s 是变量， z 是常量
- C. 0.3 与 -31.3 是变量， s 与 z 是常量
- D. s 与 z 是变量， 0.3 与 -31.3 是常量

【变式 2】已知圆的周长 C 与半径 r 的计算公式为 $C = 2\pi r$ ，则下列判断正确的是（ ）

- A. 2 是变量
- B. π 是变量
- C. r 是变量
- D. C 是常量

【变式 3】李师傅到小区附近的“爱心”加油站加油，如下所示是所用的加油机上的数据显示情况，则其中的常量是（ ）

333.56	金额（元）
44.24	数量（L）
7.54	单价（元/L）

--	--

A. 金额

B. 数量

C. 单价

D. 金额和数量

【变式 4】 在行进路程 s 、速度 v 和时间 t 的相关计算中，若保持行驶的速度不变，则下列说法正确的是 ()

A. 速度 v 是变量

B. 速度 v 是常量，路程 s 和时间 t 都是变量

C. 时间 t ，速度 v 是变量

D. 速度 v 、时间 t 、路程 s 都是常量

题型 02 函数关系的辨析

【典例 1】 有下列式子：① $y = 3x - 5$ ；② $y^2 = \sqrt{x}$ ；③ $y + 0.1x = 50$ ；④ $y = \sqrt{x-1}$ 。其中 y 是 x 的函数的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【变式 1】 有以下关于 x, y 的等式：① $x + 2y = 0$ ；② $x^2 + y^2 = 2$ ；③ $x = |y|$ ；④ $xy = 1$ ，其中 y 是 x 的函数的有 ()

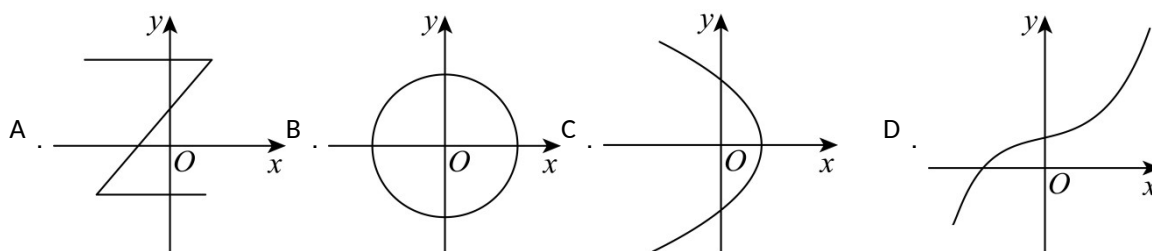
A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【变式 2】 下列图象中，表示 y 是 x 的函数的是 ()



【变式 3】 下列不一定是函数关系的是 ()

A. 正方形周长和边长的关系

B. 在弹性限度内，某弹簧的长度与所挂物体的质量之间的关系

C. 匀速行驶的汽车，其行驶的路程与时间之间的关系

D. 某班学生的数学成绩和物理成绩的关系

【变式4】 乌鸦在井旁找到了一个装有小半瓶水的玻璃瓶，由于瓶口狭窄，它想到了办法，将旁边的石子投入圆柱形玻璃瓶中使水面上升（假设石子的大小相同，瓶颈口的高度忽略不计）。下列关于乌鸦喝水的描述正确的有（ ）

①瓶子的高度是常量；②自变量是瓶中水面高度；③投入石子的数量是变量；④乌鸦投入的石子数量与水面高度满足函数关系。

- A . 1 个 B . 2 个 C . 3 个 D . 4 个

题型 03 列函数表达式

【典例1】 一个矩形的面积为 10 ，两条邻边长分别为 x 和 y ，那么 y 与 x 之间的函数关系式是_____，其中常量是_____，变量是_____， x 的取值范围是_____。

【变式1】 油箱中有油 30kg ，油从管道中匀速流出， 1h 流完，则油箱中剩余油量 Q (kg) 与流出时间 t (min) 之间的函数关系式是_____；自变量 t 的取值范围是_____。

【点睛】 本题考查的是根据实际问题列函数关系式，解答本题的关键是读懂题意，先求出每分钟的流油量，再正确表示出函数关系式。

【变式2】 如果弹簧原长为 10cm ，每挂 1kg 重物弹簧伸长 0.5cm ，假设重物质量为 $m\text{kg}$ ，受力后的弹簧长度为 $l\text{cm}$ ，则 l 与 m 的函数关系式是 $l = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【变式3】 小明爸爸开车带小明去福州游玩，一路上匀速前行，小明记下了如下数据，从 9 点开始，记汽车行驶的时间为 t (小时)，汽车离福州的距离为 s (km)，则 s 关于 t 的关系式为_____。

观察时刻	9 : 00	9 : 30	10 : 00
路牌内容	福州 120km	福州 80 km	福州 40 km

(注：“福州 120 km ”表示该路牌所在位置离福州的距离为 120 km)

【变式4】 某风景区集体门票的收费标准是 25 人以内 (含 25 人)，每人 10 元，超过 25 人的，超过的部

分每人 5 元．当人数超过 25 人时，请写出此时应收门票费用 y （元）与人数 x （人）之间的函数关系式——

题型 04 自变量的取值范围

【典例 1】 求下列函数的自变量 x 的取值范围：

(1) $y = -4x$ ；

(2) $y = \frac{3x+1}{2}$ ；

(3) $y = \frac{8}{x+5}$ ；

(4) $y = \sqrt{2x-5}$ ；

(5) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$ ．

【变式 1】 函数 $y = \frac{\sqrt{2-x}}{3}$ 中，自变量 x 的取值范围是_____．

【变式 2】 在函数 $y = \frac{x}{x-1}$ 中，自变量 x 的取值范围是_____．

【变式 3】 函数 $y = \frac{\sqrt{2-x}}{x}$ 中自变量 x 的取值范围是_____．

【变式 4】 一个小球由静止开始在一个斜坡上向下滚动，其速度每秒增加 2 m/s ，到达坡底时小球的速度达到 40 m/s ．

(1) 求小球的速度 $v(\text{m/s})$ 与时间 $t(\text{s})$ 之间的函数关系式；

(2) 求 t 的取值范围；

(3) 求 3.5 s 时小球的速度；

(4) 求 $t(\text{s})$ 时小球的速度为 16 m/s ．

题型 05 求函数值

【典例 1】在函数 $y = x^2$ 中，当 $x = 3$ 时，函数值为_____；当函数值为 4 时，自变量 x 的值为_____。

【变式 1】已知二次函数 $y = -x^2 - 2024x + 2025$ ，当 $x = 1$ 时，函数值 $y =$ _____。

【变式 2】同一温度的华氏度数 y ($^{\circ}\text{F}$) 与摄氏度数 x ($^{\circ}\text{C}$) 之间的函数关系是 $y = \frac{9}{5}x + 32$ ，如果某一温度的摄氏温度是 5°C ，那么它的华氏温度是_____ $^{\circ}\text{F}$ 。

【变式 3】在弹簧限度内，弹簧挂上物体后弹簧的长度与所挂物体的质量之间的关系如表：

所挂物体的质量 /kg	0	1	2	3	4	5	6	...
弹簧的长度 /cm	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	...

则不挂物体时，弹簧的长度是_____ cm。

【变式 4】为了提高学生劳动能力，学校举行了“躬身劳动，悦享春光”活动。初一某班栽种红薯幼苗，栽种的幼苗总数量 y (棵) 与参与活动人数 x (人) 的变化关系如下表所示：

x / (人)	1	2	3	4	5	...
y / (棵)	4	8	12	16	20	...

观察表中数据可知，该班有_____人栽种幼苗时，栽种幼苗总数量为 32 棵。

题型 06 表格、图像信息的获取

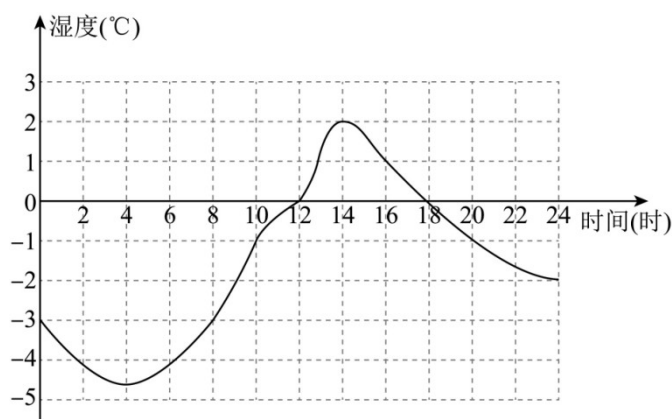
【典例 1】一根弹簧的长度为 10 厘米，当弹簧受到 x 千克的拉力时 (x 不超过 10)，弹簧的长度是 y (厘米)，测得有关数据如下表所示：

拉力 x (千克)	1	2	3	4	...
弹簧的长度 y (厘米)	$10 + 0.5$	$10 + 1$	$10 + 1.5$	$10 + 2.0$	...

- (1) 写出弹簧长度 y (厘米) 关于拉力 x (千克) 的函数解析式；
- (2) 如果拉力是 10 千克，那么弹簧长度是多少厘米？

(3)当拉力是多少时，弹簧长度是12厘米？

【变式1】如图，下面的图象记录了某地一月份某天的温度随时间变化的情况，请你仔细观察图象回答下面的问题：



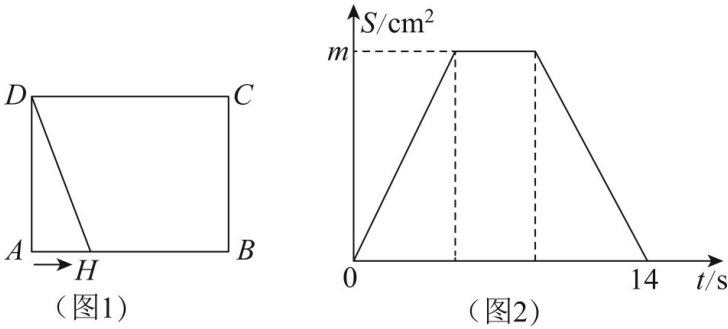
(1) 在这个问题中，变量分别是_____，时间的取值范围是_____；

(2) 20时的温度是_____°C，温度是0°C的时刻是_____时，最暖和的时刻是_____时，温度在-3°C以下的持续时间为_____小时；

(3) 你从图象中还能获得哪些信息？(写出1~2条即可)

答：_____。

【变式2】动点 H 以每秒1cm的速度沿图1中的长方形 $ABCD$ 的边按从 $A-B-C-D$ 的路径匀速运动， $\triangle ADH$ 的面积 $S(\text{cm}^2)$ 与时间 $t(\text{s})$ 的关系如图2，已知 $AD=4\text{cm}$ ，则 $m=$ _____ cm^2 。



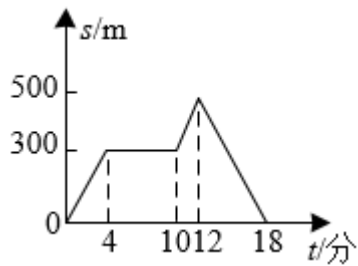
【变式3】 父亲告诉小明：“距离地面越高，温度越低，”并给小明出示了表格．

距离地面高度（千米）	0	1	2	3	4	5
温度（℃）	20	14	8	2	-4	-10

根据上表，父亲还给小明出了下面几个问题，你和小明一起回答：

- (1)如果用 h 表示距离地面的高度，用 t 表示温度，写出 t 与 h 的关系式；
- (2)你能计算出距离地面 8 千米的高空温度是多少吗？

【变式4】 饭后，老王从家里外出散步，如图描述了他散步过程中离家的距离 s （单位：m）与散步所用的时间 t （单位：分）之间的关系．依据变量之间的关系图，下面描述：①从家里出发，路上遇到熟人交谈一会，就回家了，②从家出发，到了一个公共阅报亭看了一会儿报后，继续向前走了一段，然后回家了，③从家出发，一直散步（没有停留），然后回来了，④从家出发，散了一会儿步，就找同事去了，18 分钟后才开始返回，其中不符合老王散步情景的是_____．（填序号）



强化训练

1. 关于球的体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ，下列说法正确的是（ ）

A. V, π, r 是变量, $\frac{4}{3}$ 是常量 B. V, r 是变量, $\frac{4}{3}, \pi$ 是常量

C. V, π 是变量, $\frac{4}{3}, r$ 是常量 D. 以上都不对

2. 河北省的特产丰富多样, 其中赞皇大枣被誉为“枣中之王”, 皮薄肉厚、甜度高、营养丰富. 一份赞皇大枣的价格是 50 元, 买 m 份赞皇大枣共支付 n 元, 则 50 和 m 分别是 ()



A. 常量, 常量 B. 变量, 变量 C. 常量, 变量 D. 变量, 常量

3. 下列各式中, y 不是 x 的函数的是 ()

A. $y = \sqrt{x-2}$ B. $y = -\sqrt{x-2}$ C. $y = \sqrt{2-x}$ D. $y^2 = 2-x$

4. 下列表达式中, y 不是 x 的函数的是 ()

A. $y = x$ B. $y = x^2$ C. $y^2 = x$ D. $y = \frac{1}{x}$

5. 中国是茶的故乡, 也是茶文化的发源地. 某网店内一种茶叶的售价为 10 元/克, 购买 x ($x > 0$) 克的总价钱为 y 元, 下列正确的是 ()

A. 自变量是茶叶的单价 B. 自变量是总价钱 y C. $y = 10x$ D. $y = 10 + x$

6. 下列两个变量间不存在函数关系的是 ()

A. 长方形的面积一定, 它的长和宽的关系 B. $x+2$ 与 x 的关系
C. 匀速运动的火车, 时间与路程的关系 D. 某人的身高和体重的关系

7. 函数 $y = \sqrt{3x-1}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

8. 在函数 $y = \frac{2}{x-2}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

9. 若在一定条件下, 物体运动所经过的路程 s (单位: m) 与时间 t (单位: s) 之间的关系式为 $s = 5t^2 + 2t$ ($t \geq 0$), 则当 $t = 4$ s 时, 该物体运动所经过的路程 s 为_____.

10. 在函数 $y = 4x+1$ 中, 当函数值为 -3 时, 自变量 x 的值为_____.

11. 弹簧挂上物体后会伸长，测得一弹簧的长度 $y(\text{cm})$ 与所挂物体的质量 $x(\text{kg})$ 有下面关系：

$x(\text{kg})$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y(\text{cm})$	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	16

那么弹簧总长 $y(\text{cm})$ 与所挂物体质量 $x(\text{kg})$ 之间的关系式为_____。

12. 一个等腰三角形的周长是 10，腰长是 x ，底边长是 y ，则 y 关于 x 的函数解析式为_____。

13. 一蜡烛高 20 厘米，点燃后平均每小时燃掉 4 厘米，则蜡烛点燃后剩余的高度 h (厘米) 与燃烧时间 t (时) 之间的关系式是 $h =$ _____。

14. 某种货物的进价是每件 5 元，售出时的标价是每件 5.8 元，那么获得的利润 y (元) 与售出的数量 x (件) 之间的函数关系式是_____。

15. 求下列函数中自变量 x 的取值范围：

(1) $y = 2x + 1$ ；

(2) $y = \frac{1}{x}$ ；

(3) $y = \sqrt{x-1}$ 。

16. 求下列函数中自变量 x 的取值范围。

(1) $y = 3x - 1$ ；

(2) $y = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3}$ ；

(3) $y = \frac{(x-1)^0}{2}$ 。

17. 已知一根长为 20 米的铁丝围成一个长方形，若宽为 x 米，长为 y 米。

(1) 写出 y 关于 x 的函数表达式；

(2) 出自变量 x 的取值范围；

(3) 求当 $x = 4$ 时所对应的函数值；

18. 已知某个等腰三角形的周长为 12cm ，底边长为 $y\text{cm}$ ，腰长为 $x\text{cm}$ 。

(1) 写出 y 与 x 的函数解析式；

(2) 确定 x 的取值范围；

19. 拖拉机开始工作时，油箱中有油 40L ，每小时耗油 5L 。

(1) 写出油箱中的剩余油量 Q (L) 与工作时间 t (h) 之间的函数表达式，并求出自变量 t 的取值范围；

(2) 当拖拉机工作 3h 时，油箱内还剩余油多少升？

20. 心理学家研究发现，学生对一个新概念的接受能力 y 与提出概念所用时间 x (单位：min) 之间有下列所示的关系：

提出概念所用时间 x	7	10	12	13	14	17	20
对概念的接受能力 y	56.3	59	59.8	59.9	59.8	58.3	55

(1) 上表中，自变量是_____，因变量是_____。

(2) 根据表格中的数据，提出概念所用时间是_____min 时，学生的接受能力最强。

(3) 学生对一个新概念的接受能力从什么时间开始逐渐减弱？

21. 某校的复印任务由甲复印社承接，其费用 y (单位：元) 与复印页数 x 的关系如下表：

x	100	200	400	1000	...
y /元	40	80	160	400	...

(1) 表格中自变量是_____，因变量是_____。

(2) ① 随着复印页数的逐渐增加，费用的变化趋势是什么？

② 复印页数每增加 100 ，费用怎样变化？

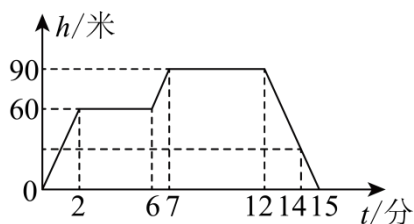
(3) 当复印页数为 2000 时，估计费用是多少元。

22. 学校图书馆购进一批图书，管理员在整理过程中发现，每天整理的图书数量与整理的天数之间的关系如下表：

每天整理的图书数量	1200	600	240	120	...
整理的天数	1	2	5	10	...

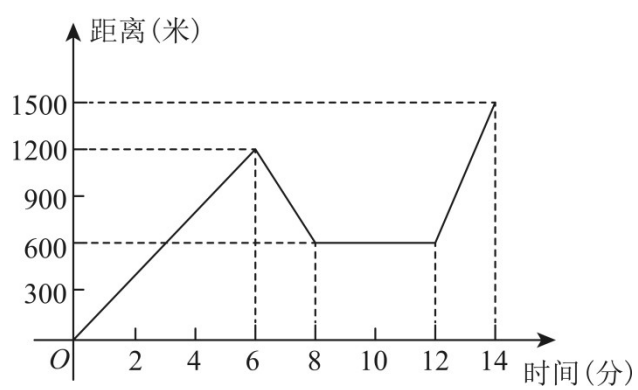
- (1)若学校计划用 4 天的时间完成整理，管理员每天需要整理多少本图书？
- (2)若用 a 表示每天整理的图书数量，用 t 表示整理的天数，用式子表示 t 与 a 的关系，并说明 t 与 a 成什么比例关系？

23. 某无人机爱好者操纵无人机进行航拍，已知无人机上升或下降的速度相同，无人机的高度 h (米) 与操控无人机的时间 t (分) 之间的关系如图所示，请根据图象回答下列问题：



- (1)在上升或下降过程中，无人机升降的速度为多少米/分钟？
- (2)无人机最高上升到多少米？在最高处停留了多少分钟？
- (3)请用简短的语句描述 0~7 分钟无人机的升降情况。

24. 小明从家出发骑自行车去上学，当他以往常的速度骑了一段路后，突然想起要买文具，于是又折回到刚经过的某文具店，买到文具后加快速度骑车去学校，已知小明家、文具店、学校在同一直线上，如图折线段是他本次上学所用的时间与离家的距离之间的图象，根据图中信息回答下列问题：



- (1) 小明家到学校的距离是_米，折线中有一条平行于 x 轴的线段，它的实际意义是_；
- (2) 本次上学途中，小明一共行驶了_米；
- (3) 如果小明不买文具，以往常的速度去学校，需要花费多长时间？