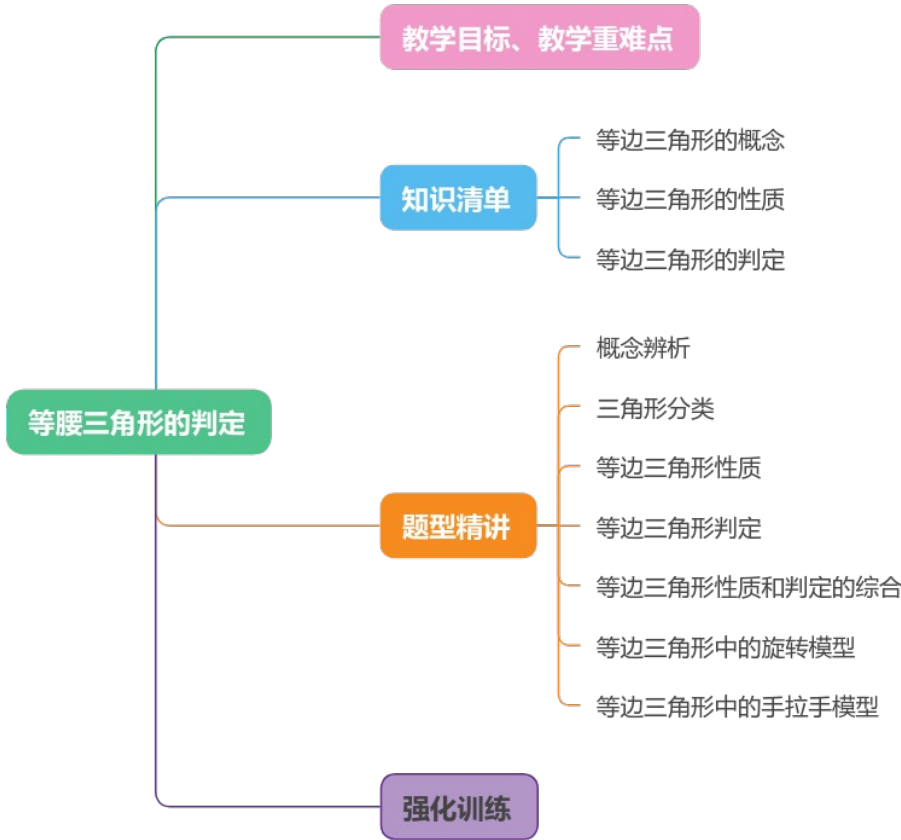


专题 18.2 等边三角形

内容概览



教学目标、教学重难点

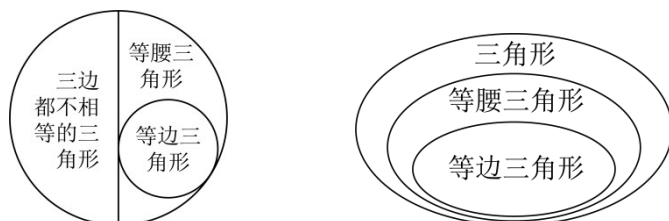
教学目标	1.理解等边三角形的定义（三条边都相等的三角形），明确它是特殊的等腰三角形； 2.掌握等边三角形的性质：三边相等；三个内角都等于 60° ；每条边上的中线、高、角平分线“三线合一”；是轴对称图形(3条对称轴)； 3.掌握等边三角形的判定,能运用性质与判定进行简单的计算、推理、证明.
教学重难点	1.重点 等边三角形的性质定理与判定定理的理解和应用； 2.难点 性质与判定的灵活应用.

知识清单

知识点 01 等边三角形的定义

1. 定义：_____的三角形叫**等边三角形**。

2. 说明：等边三角形是一种**特殊**的等腰三角形



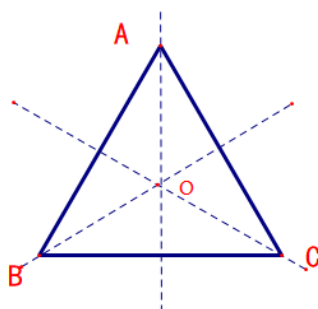
【即学即练】

例 1 已知等边 $\triangle ABC$ 的一边长为 4，则它的周长是_____。

例 2 关于等边三角形，下列说法正确的是 ()

- A. 三边都相等； B. 属于等腰三角形；
C. 三角形可以分为等边三角形和三边都不等的三角形； D. 属于轴对称图形

知识点 02 等边三角形的性质



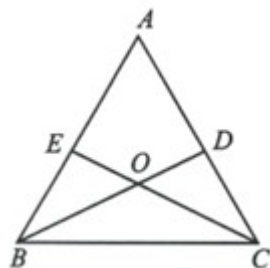
1. 定理：等边三角形的每一个角都等于_____。

2. 对称性：等边三角形是轴对称图形，它有_____对称轴；

3. 三线合一：等边三角形是特殊的等腰三角形，它具有等腰三角形的一切性质包括“三线合一”。

【即学即练】

例 3 如图，等边三角形 ABC 的两条角平分线 BD 和 CE 相交于点 O ，则 $\angle BOC$ 的度数为_____。



【解析】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形

$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ$ ()

$\therefore BD, CE$ 是角平分线

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$

$\therefore \angle BOC = 120^\circ$ ()

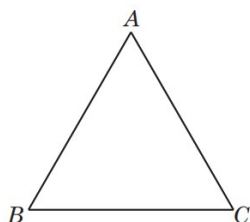
知识点 03 等边三角形的判定

1. 定义：_____ 都相等的三角形是等边三角形.
2. 定理：_____ 都相等的三角形是等边三角形.
3. 有一个角是 60° 的 _____ 三角形是等边三角形.

【即学即练】

例 4 求证：有一个内角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形.

分析 如图，设 $AB=AC$ ，对于有一个内角等于 60° 的各种情况进行讨论，其中 $\angle B=60^\circ$ 和 $\angle C=60^\circ$ 是类似的，故只要分两种情况讨论（底角等于 60° 和顶角等于 60° ）.



如图已，知：在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$.

- (1) 当 $\angle B=60^\circ$ 时，求证： $\triangle ABC$ 是等边三角形；
- (2) 当 $\angle A=60^\circ$ 时，求证： $\triangle ABC$ 是等边三角形.

证明(1): $AB=AC, \angle B=60^\circ$,

$\therefore \angle B = \angle \underline{\hspace{1cm}} = 60^\circ$ ().

又: $\angle A = 180^\circ - \angle C - \angle B = 60^\circ$ (),

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形 ().

(2): $AB=AC$,

$\therefore \angle C = \angle B$ (等边对等角).

又: $\angle A + \angle C + \angle B = 180^\circ$ (三角形的内角和等于 180), $\angle A = 60^\circ$

$\therefore \angle B = \angle C = \angle A = 60^\circ$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形 (三个内角都相等的三角形是等边三角形).

【点睛】证明等边三角形的步骤可以分两步: **先证** 三角形是 三角形, 再证 **有一个角** .

例 5 下列推理中, 错误的是 ()

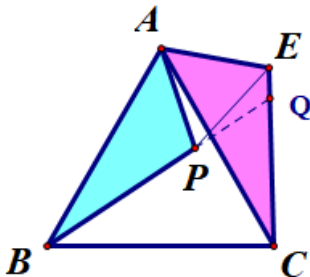
A. $\because \angle A = \angle B = \angle C, \therefore \triangle ABC$ 是等边三角形

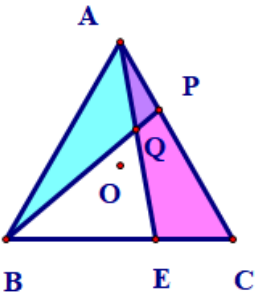
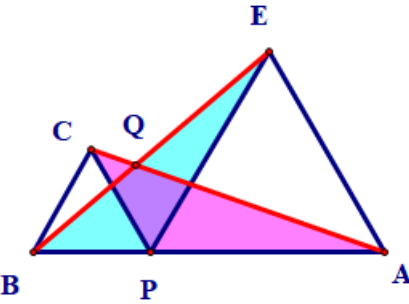
B. $\because AB = AC$, 且 $\angle B = \angle C, \therefore \triangle ABC$ 是等边三角形

C. $\because \angle A = 60^\circ, \angle B = 60^\circ, \therefore \triangle ABC$ 是等边三角形

D. $\because AB = AC, \angle B = 60^\circ, \therefore \triangle ABC$ 是等边三角形

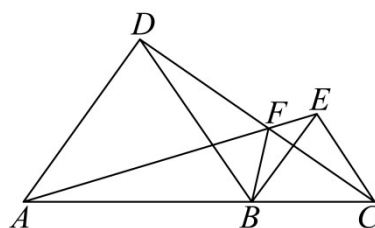
知识点 04 常见的几何模型

类型	图例	结论
旋转模型		条件: 等边 $\triangle ABC$ 中 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 结论: $\triangle ABP \cong \triangle ACE$ $\triangle APE$ 是等边三角形 $\angle BQC = 60^\circ$

旋转模型		条件:等边$\triangle ABC$ 中 $\triangle ABP$ 绕点 O 顺时针旋转 120° 结论: $\triangle ABP \cong \triangle CAQ$ $\angle BQE = 60^\circ$
手拉手模型		条件:等边$\triangle PBC$ 和 $\triangle PAE$ 手拉手 AC, BE 叫作手拉线 结论: $\triangle BPE \cong \triangle CPA$ $BE = AC$ $\angle AQE = 60^\circ$

【即学即练】

例5 如图，已知 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCE$ 是等边三角形，且 A, B, C 三点共线，连接 AE, CD ，交于点 F 。



求证： $\triangle ABE \cong \triangle DBC$ ；

证明： $\because \triangle ABD$ 与 $\triangle BCE$ 是正三角形，

$\therefore AB = DB, EB = CB, \angle ABD = \angle ECB = 60^\circ$ (_____)

$\therefore \angle ABE = \angle DBC = 120^\circ$ ，

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle DBC$ 中

$$\begin{cases} AB = DB \\ \angle ABE = \angle DBC \\ BE = BC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DBC (\text{SAS})$$

题型精讲

题型 01 概念辨析(含三角形的分类)

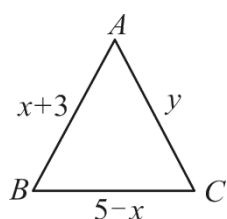
【典例 1】关于等边三角形,下列说法不正确的是 () .

- A . 等边三角形是等腰三角形 B . 等边三角形锐角三角形
- C . 等边三角形的对称轴是它的三条高 D . 三角形可以分为等腰三角形和三边都不等的三角形

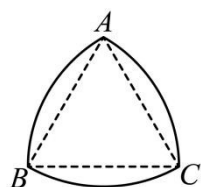
【变式 1】等边三角形有_____条对称轴,它的对称轴是_____.

【变式 2】已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AD \perp BC$ 于点 D , 若 AB 长为 $(3x+1)$ 厘米, BD 长为 $(x+2)$ 厘米, 则 $\triangle ABC$ 的周长为_____厘米.

【变式 3】已知等边三角形 ABC 的边长如图所示, 那么 $y =$ _____.

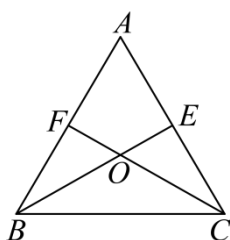


【变式 4】“莱洛三角形”也称为圆弧三角形, 它是工业生产中广泛使用的一种图形. 如图, 分别以等边 $\triangle ABC$ 的三个顶点为圆心, 以边长为半径画弧, 三段圆弧围成的封闭图形是“莱洛三角形”. 若等边 $\triangle ABC$ 的边长为 6, 则该“莱洛三角形”的周长等于_____.

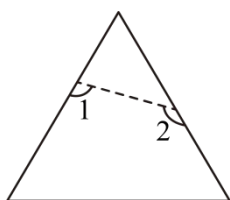


题型 02 等边三角形的性质

【典例 1】如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， BE ， CF 是 $\triangle ABC$ 的中线， BE ， CF 交于点 O ，则 $\angle EOF$ 的度数为_____。



【变式 1】如图，将一个等边三角形剪去一个角后， $\angle 1 + \angle 2$ 等于（ ）



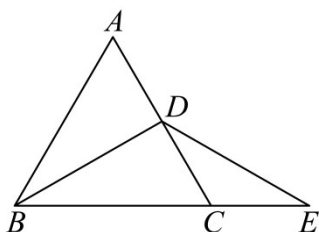
A . 240°

B . 120°

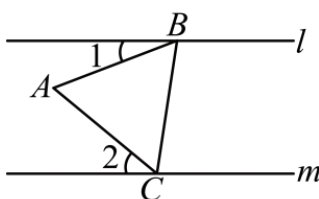
C . 170°

D . 360°

【变式 2】如图，在边长为 6cm 的等边 $\triangle ABC$ 中， D 是 AC 的中点， E 为 BC 延长线上一点，若 $\angle DEC = 30^\circ$ ，则 BE 的长为_____。



【变式 3】如图，直线 $l \parallel m$ ，等边 $\triangle ABC$ 的顶点 B, C 分别在 l, m 上。若 $\angle 1 = 20^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为（ ）



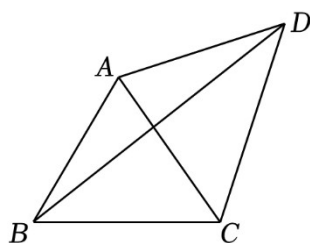
A . 70°

B . 40°

C . 30°

D . 20°

【变式4】 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $AC = AD$ ，连接 BD ， $\angle BCD = 110^\circ$ ，则 $\angle ADB$ 的度数为 ____



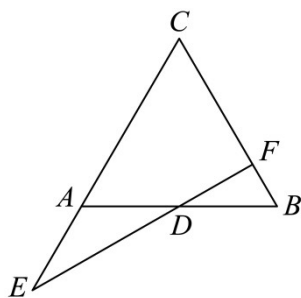
题型 03 等边三角形的判定

【典例1】 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ，添加下列一个条件后，仍不能判定 $\triangle ABC$ 为等边三角形的是 ()

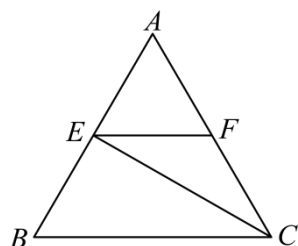
A . $AB = AC$; B . $\angle A = \angle B$; C . $AD \perp BC$, 垂足为 D ; D . $\angle B = \angle C$

【变式1】 下列三角形：①有两个角等于 60° ；②有一个角等于 60° 的等腰三角形；③三个外角（每个顶点处各取一个外角）都相等的三角形；④一腰上的中线也是这条腰上的高的等腰三角形，其中是等边三角形的有_____（填序号）。

【变式2】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 为 AB 边上一点， $DF \perp BC$ 于点 F ，延长 FD 、 CA 交于点 E 。若 $\angle E = 30^\circ$ ， $AD = AE$ 。求证： $\triangle ABC$ 为等边三角形。



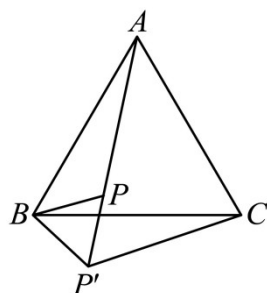
【变式3】 如图， CE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $EF \parallel BC$ ，交 AC 于点 F 。已知 $\angle AFE = 60^\circ$ 。



(1) 求证: $\triangle EFC$ 是等腰三角形

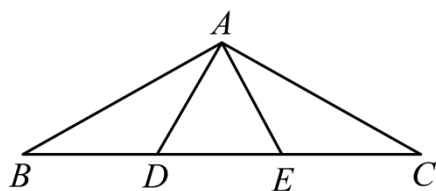
(2) 求证: $AF = FC$

【变式4】 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $\triangle ABP$ 绕点 B 旋转后能与 $\triangle CBP'$ 重合。连接 PP' ， $\triangle BPP'$ 是什么三角形？请说明理由。

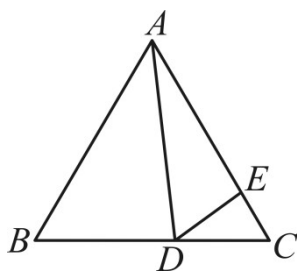


题型 04 等边三角形性质和判定的综合应用

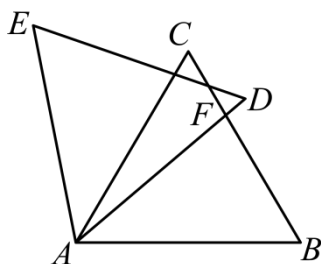
【典例1】 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，点 D 、 E 在 BC 上，且 $BD = AD$ ， $CE = AE$ 。判断 $\triangle ADE$ 的形状，并说明理由。



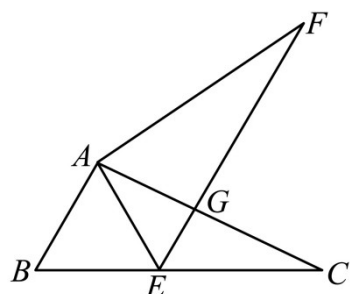
【变式1】 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 边上一点， E 为 AC 边上一点，且 $\angle ADE = 60^\circ$ 。求证：
 $\angle BAD = \angle EDC$ 。



【变式2】 如图，等边 $\triangle ADE$ 由 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 40° 得到，其中 AD 与 BC 相交于点 F ，求 $\angle AFB$ 的度数。



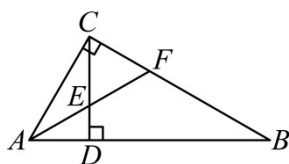
【变式3】 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AEF$ ，点 E 落在 BC 边上， EF 与 AC 交于点 G 。



(1) 求证： $\triangle ABE$ 是等边三角形；

(2) 若 $\angle ACB = 26^\circ$ ，求 $\angle FGC$ 的度数。

【变式4】 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于 D ， AF 平分 $\angle CAB$ ，交 CD 于 E ，交 BC 于

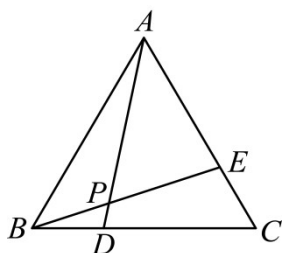


(1) 求证： $\triangle CEF$ 是等腰三角形。

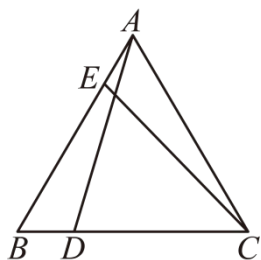
(2) 若 $AF = BF$ ，求证： $\triangle CEF$ 是等边三角形。

题型 05 旋转模型

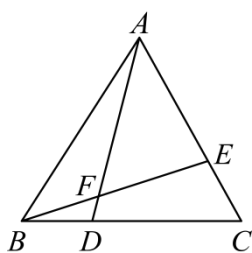
【典例 1】 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别为边 BC 、 AC 上的点， AD 与 BE 相交于点 P ，若 $BD = CE$ ，则 $\angle APE =$ _____。



【变式 1】 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AB 上，且 $BD = AE$ 。求证： $AD = CE$ 。



【变式 2】 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 在边 BC 、 AC 上，且 $BD = CE$ ，连接 AD 、 BE 交于点 F 。

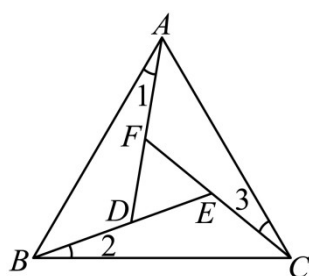


(1) 求证： $\triangle ABD \cong \triangle BCE$ ；

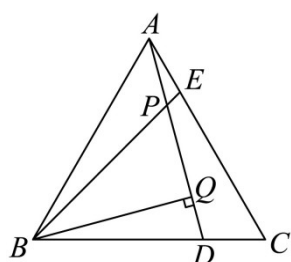
(2) 若 $\angle BAD = 20^\circ$ ，求 $\angle ABE$ 的度数。

【变式 3】 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，且 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ 。试问： $\triangle DEF$ 是等边三角形吗？请说明理

由 .



【变式 4】 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别在边 BC, AC 上，且 $AE = CD$, BE 与 AD 相交于点 P , $BQ \perp AD$ 于点 Q .

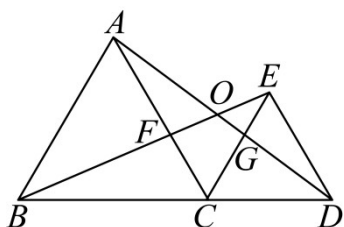


(1) 求证： $AD = BE$ ；

(2) 分别求出 $\angle BPQ$ 、 $\angle PBQ$ 的度数 .

题型 06 手拉手模型

【典例 1】 如图，已知点 B, C, D 在同一条直线上， $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形， BE 交 AC 于 F ， AD 交 CE 于 G ， BE 交 AD 于 O .

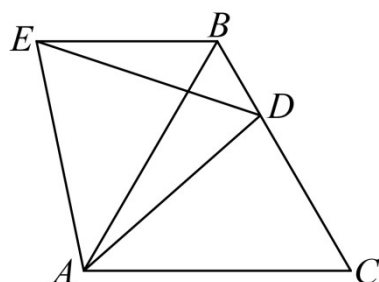


(1) 求证： $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ ；

(2) 求 $\angle AOB$ 的度数；

(3) 求证： $\triangle CFG$ 为等边三角形 .

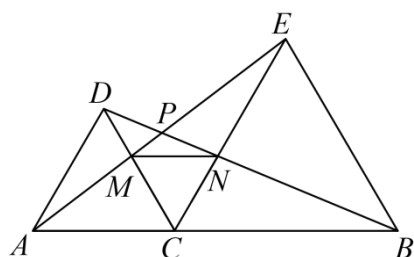
【变式1】 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是等边三角形，且 $\triangle ADC \cong \triangle AEB$ 。



(1) 填空： $\triangle AEB$ 可以看成 $\triangle$ _____ 以点 _____ 为旋转中心，_____ 时针旋转 _____ 度得到；

(2) 若 $\angle DAC = 42^\circ$ ，求 $\angle AEB$ 的度数。

【变式2】 如图， A, C, B 三点在同一条直线上， $\triangle DAC$ 和 $\triangle EBC$ 都是等边三角形， AE ， BD 分别与 CD, CE 交于点 M, N ，如下结论：① $\triangle ACE \cong \triangle DCB$ ；② $\angle DAE = \angle ABD$ ；③ $AC = DN$ ；④ $EM = BN$ ；⑤ $\triangle CMN$ 是等边三角形，其中正确结论的是 ()



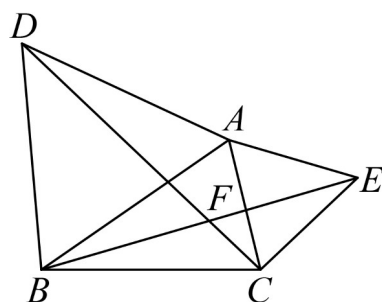
A. ①②④

B. ②③④⑤

C. ①③⑤

D. ①②④⑤

【变式3】 如图，已知 $\triangle ABC$ ，以 AB 为边作等边 $\triangle ABD$ ，连接 CD ，将 $\triangle ADC$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle ABE$ ， BE, DC 相交于点 F 。



(1) 求证： $\triangle ACE$ 是等边三角形。

(2) 求 $\angle DFE$ 的度数。

【变式 4】已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 都为等边三角形，

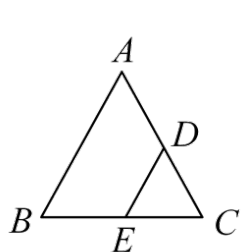


图1

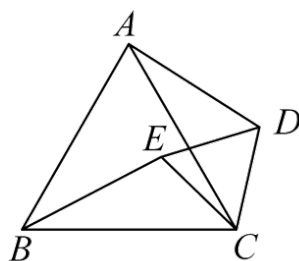


图2

①如图 1，当点 D 在 AC 上时， E 在 BC 上， BE 与 AD 的数量关系是——；

②如图 2，当点 D 不在 AC 上时，且 $\angle BEC = 120^\circ$ ，求证： $AD \parallel EC$ 。

强化训练

一、单选题

1. 等边三角形是轴对称图形，它的对称轴有 ()

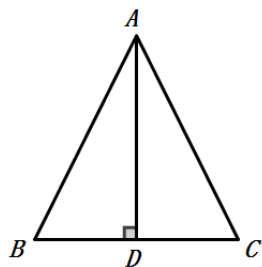
A. 1 条

B. 2 条

C. 3 条

D. 6 条

2. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ 交 BC 于点 D ，若 $BD = 2$ ，则 $AC = ()$



A. 2

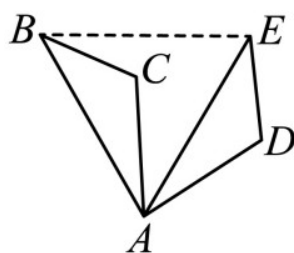
B. 3

C. $2\sqrt{3}$

D. 4

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 6, AC = 4, BC = 3$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle AED$ ，则 BE 的长为

()



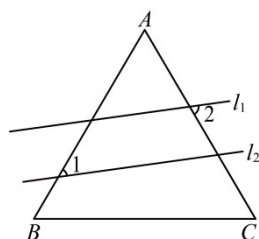
A . 3

B . 4

C . 5

D . 6

4. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$ ， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $\angle 2 = 68^\circ$ ，则 $\angle 1$ 的大小为 ()



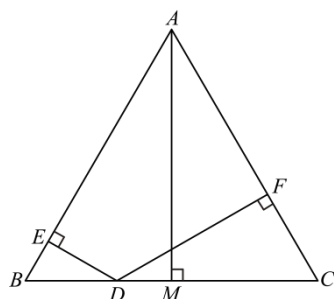
A . 68°

B . 62°

C . 52°

D . 42°

5. 如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 D 是 BC 边上异于 B, C 的任意一点， $DE \perp AB$ 于点 E ， $DF \perp AC$ 于点 F 。若 BC 边上的高线 $AM = 10$ ，则 $DE + DF =$ ()



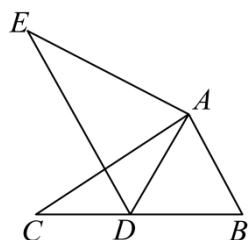
A . 5

B . 10

C . 8

D . 6

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 8$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转得到 $\triangle ADE$ ，当点 B 的对应点 D 恰好落在 BC 边上时， CD 的长为 ()



A . 3

B . 4

C . 5

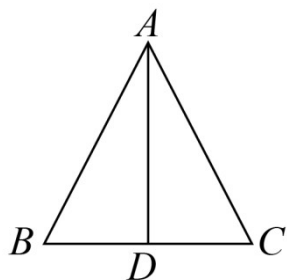
D . 6

二、填空题

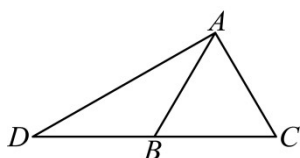
7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 6\text{cm}$, $\angle B = 60^\circ$, 则 $BC =$ _____ cm .

8. 一个等腰三角形的腰长是 5cm , 一个外角是 120° , 则它的底边长是 _____ cm .

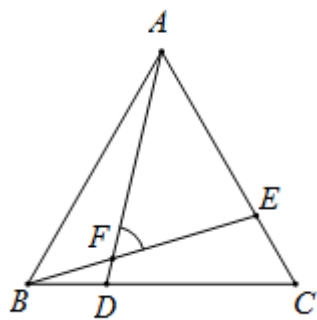
13. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AD \perp BC$ 于 D , 若 $BC = 4$, 则 $BD =$ _____.



9. 如图, 在 $\triangle ACD$ 中, B 为 CD 边上一点, 连接 AB , $\triangle ABC$ 恰为等边三角形, $\angle D = \angle DAB$, $AB = 7$, 则 CD 的长度为 _____.

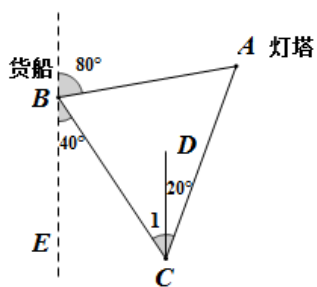


10. 如图, 在等边三角形 ABC 中, $BD = CE$, AD 、 BE 交于点 F , 则 $\angle AFE =$ _____.

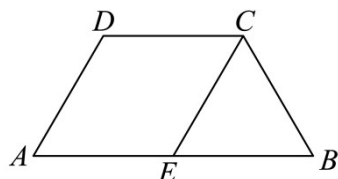


三、解答题

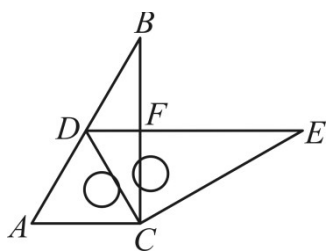
11. 货船在海上以每小时 6 海里的速度沿南偏东 40° 的方向航行, 已知货船在 B 处时, 测得灯塔 A 在其北偏东 80° 的方向上, 航行半小时后货船到达 C 处, 此时测得灯塔 A 在其北偏东 20° 的方向上, 求货船到达 C 处时与灯塔 A 的距离.



12. 如图， $\angle A = \angle B$ ， $CE \parallel DA$ ， CE 交 AB 于点 E ， $\angle BCE = 60^\circ$ 。求证： $\triangle CEB$ 是等边三角形。



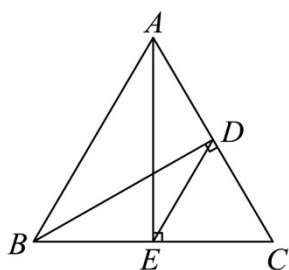
13. 如图，用两个含 30° 角且大小相同的三角板 ($\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DCE$) 摆放在一起，两直角顶点重合，点 D 恰好落在 AB 边上。求证：



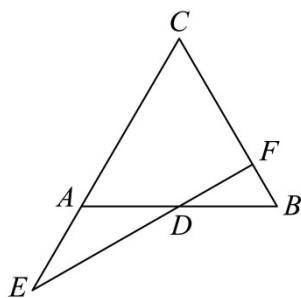
- (1) $\triangle ADC$ 为等边三角形；

- (2) $DE \parallel AC$ 。

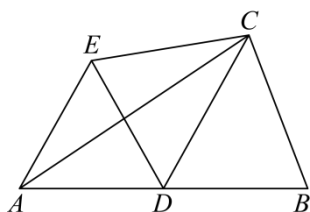
14. 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $BD \perp AC$ ， $AE \perp BC$ ，垂足分别为 D, E ，连接 DE 。求证： $\triangle CDE$ 是等边三角形。



15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 为 AB 边上一点， $DF \perp BC$ 于点 F ，延长 FD 、 CA 交于点 E 。若 $\angle E = 30^\circ$ ， $AD = AE$ 。求证： $\triangle ABC$ 为等边三角形。



16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， CD 是 AB 边的中线， $\angle BDC = 60^\circ$ ，将 $\triangle BCD$ 沿 CD 折叠，使点 B 落在点 E 的位置．判断 $\triangle AED$ 的形状并加以证明．



17. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ，点 D 是 AB 边上的动点，过点 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于点 E ，将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折叠，点 A 对应点为 F 点．

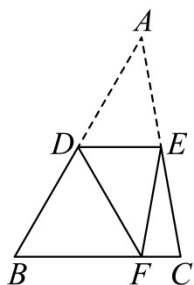


图1

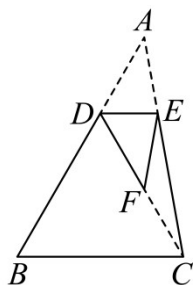


图2

- (1) 如图1，当点 F 恰好落在 BC 边上，求证： $\angle EDF = 60^\circ$ ．
 (2) 在(1)的情况下， $\triangle BDF$ 是不是等边三角形？请说明理由．
 (3) 如图2，当点 F 恰好落在 $\triangle ABC$ 内，且 DF 的延长线恰好经过点 C ， $CF = EF$ ，求 $\angle A$ 的大小．

18. 阅读下列材料：

阳阳同学遇到这样一个问题：如图1，在 $\triangle ABC$ 中 $AB = AC$ ， BD 是 $\triangle ABC$ 的高， P 是 BC 边上一点， PM 、 PN 分别与直线 AB ， AC 垂直，垂足分别为点 M 、 N ．

求证： $BD = PM + PN$ ．

阳阳发现，连接 AP ，有 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle ACP}$ ，即 $\frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}AB \cdot PM + \frac{1}{2}AC \cdot PN$ 。由 $AB = AC$ ，可得 $BD = PM + PN$ 。

他又画出了当点 P 在 CB 的延长线上，且上面问题中其他条件不变时的图形，如图 2 所示，他猜想此时 BD 、 PM 、 PN 之间的数量关系是： $BD = PN - PM$ 。

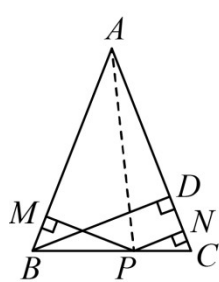


图 1

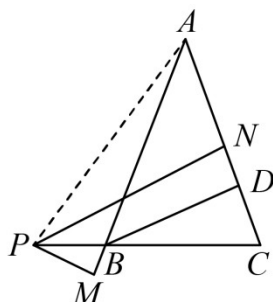


图 2

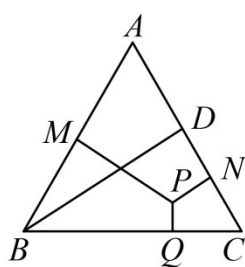


图 3

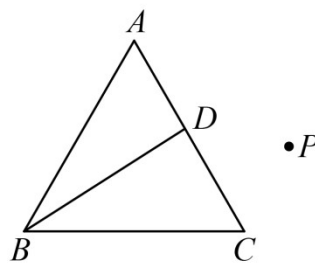


图 4

请回答：

(1) 请补全阳阳同学证明猜想的过程：

证明：连接 AP ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APC} - \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\therefore \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}AC \cdot \underline{\hspace{2cm}} - \frac{1}{2}AB \cdot \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\therefore AB = AC, \therefore BD = PN - PM.$$

(2) 参考阳阳同学思考问题的方法，解决下列问题：

在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = BC$ ， BD 是 $\triangle ABC$ 的高。P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点， PM 、 PN 、 PQ 分别与直线 AB 、 AC 、 BC 垂直，垂足分别为点 M 、 N 、 Q 。

① 如图 3，若点 P 在 $\triangle ABC$ 的内部，猜想 BD 、 PM 、 PN 、 PQ 之间的数量关系并写出推理过程。

② 若点 P 在如图 4 所示的位置，利用图 4 探究得此时 BD 、 PM 、 PN 、 PQ 之间的数量关系并写出推理过程。