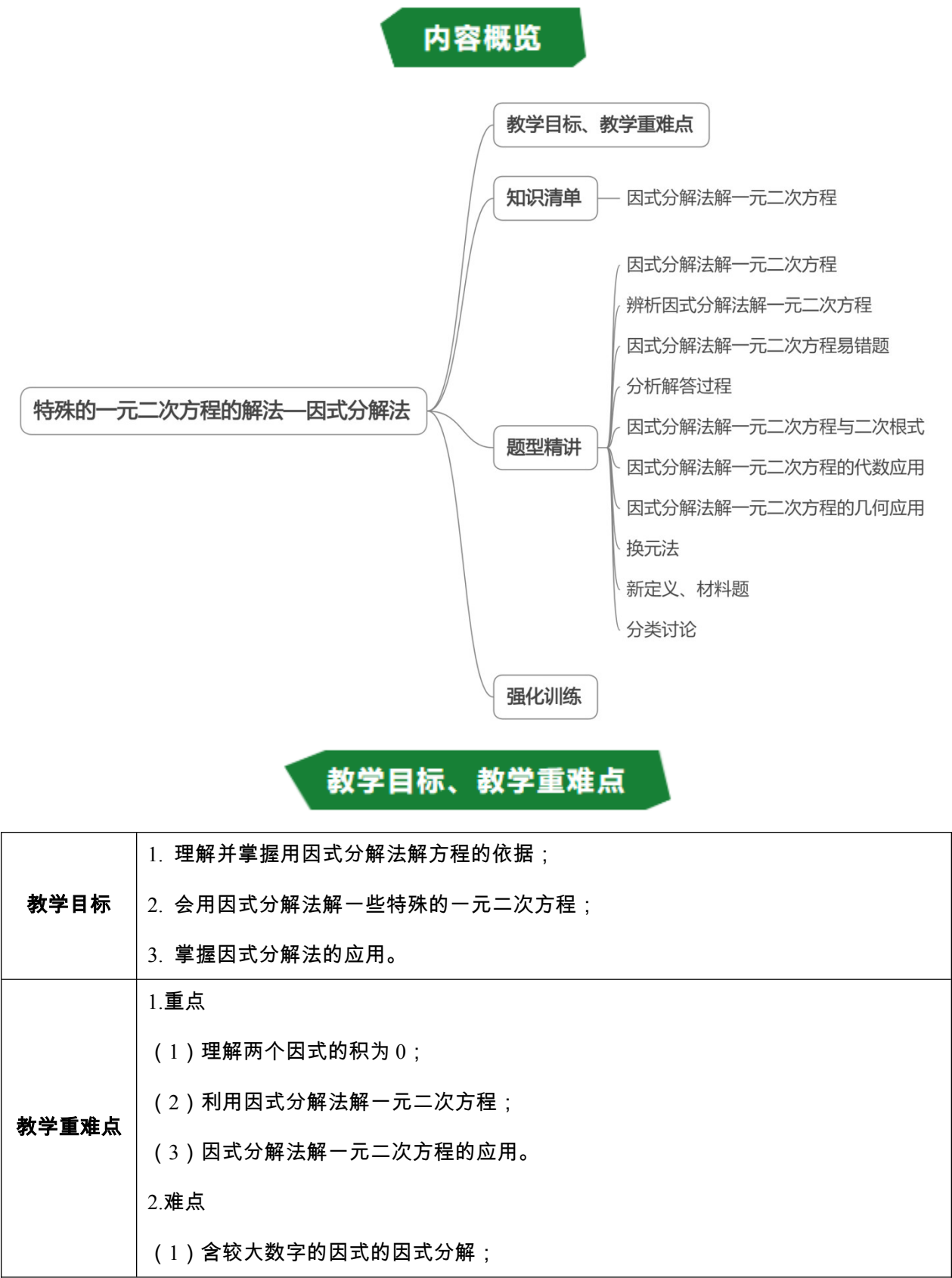


专题 21.3 特殊的一元二次方程的解法—因式分解法



(2) 分类讨论；

知识清单

知识点 1 因式分解法解一元二次方程

1. 两个因式的积为 0

我们知道，如果两个因式的积等于 0，那么这两个因式中至少有一个等于 0；

反之，如果两个因式中至少有一个等于 0，那么这两个因式的积也等于 0。

数学语言：当 $A \cdot B = 0$ 时，必有 $A = 0$ 或 $B = 0$ ；

反之，当 $A = 0$ 或 $B = 0$ 时，必有 $A \cdot B = 0$ 。

2. 解方程 $x^2 - 3x = 0$

方程左边提取公因式 x ，得 $x(x-3) = 0$

由此得 $x = 0$ 或 $x - 3 = 0$

解得 $x = 0$ 或 $x = 3$

所以原方程的根是 $x_1 = 0$ ， $x_2 = 3$

3. 因式分解法：可以发现，上述解法中，通过因式分解，把一元二次方程化成两个一次因式的积等于 0 的形式，从而把解一元二次方程的问题转化为解一元一次方程的问题。

像上面这样解一元二次方程的方法叫作**因式分解法**。

因式分解法适用于解某些特殊的一元二次方程。

要点：把方程化成一边为 0，另一边是两个一次因式的乘积的形式，然后使每一个一次因式等于 0，分别解两个一元一次方程，得到的两个解就是原一元二次方程的解。

4. 常用的因式分解法

提取公因式法，公式法（平方差公式、完全平方公式），十字相乘法等。

要点：

(1) 能用分解因式法来解一元二次方程的结构特点：方程的一边是 0，另一边可以分解成两个一次因式的积；

(2) 用分解因式法解一元二次方程的理论依据：两个因式的积为 0，那么这两个因式中至少有一个等于 0；

(3) 用分解因式法解一元二次方程的注意点：① 必须将方程的右边化为 0；② 方程两边不能同时除以

含有未知数的代数式.

***5.写出满足条件的一元二次方程**

若一元二次方程的根是 $x_1=m$, $x_2=n$, 则该一元二次方程为 $a(x-m)(x-n)=0$ ($a \neq 0$) ;

我们可以理解它为“两根式”一元二次方程。

【即学即练】

1 . 用适当的方法求解下列方程 :

(1) $x^2 - 6x + 5 = 0$;

(2) $(x-2)^2 = 3(x-2)$.

2 . 解方程 :

(1) $x^2 + 2x = 0$;

(2) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$.

3 . 解方程 :

(1) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

(2) $2(x-1)^2 = 4x - 4$.

4 . 用因式分解法解下列方程 :

(1) $9t^2 - (t-1)^2 = 0$.

(2) $(x+2)^2 - 10(x+2) + 25 = 0$.

5 . 用因式分解法解下列方程 :

(1) $(2x+1)^2 = 3(2x+1)$.

(2) $(2x+1)^2 = -6x - 3$.

(3) $(x-5)(x-3) = 24$.

6 . 一元二次方程 $x(x-5) = 5-x$ 的根是 ()

- A . $x_1 = x_2 = -1$ B . $x_1 = 1, x_2 = -5$ C . $x_1 = -1, x_2 = 5$ D . $x_1 = x_2 = 5$

7 . 方程 $x^2 + x - 2 = 0$ 的两个根为 ()

- A . $x_1 = -2, x_2 = -1$ B . $x_1 = -2, x_2 = 1$ C . $x_1 = -1, x_2 = 2$ D . $x_1 = 1, x_2 = 2$

8 . 方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的两个根是等腰三角形的底和腰, 则这个三角形的周长为_____ .

9. 如果一元二次方程 $x(x-8)=4(x-8)$ 的两个根恰好是一个等腰三角形的两条边长，那么这个等腰三角形的周长为_____.

题型精讲

题型 01 因式分解法解一元二次方程

【典例 1】 . 用适当的方法解方程：

(1) $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

(2) $(x+2)(x-1) = 2 - 2x$.

【变式 1】 . 用因式分解法解下列方程：

(1) $(2x+1)^2 = 3(2x+1)$.

(2) $(2x+1)^2 = -6x - 3$.

(3) $(x-5)(x-3) = 24$.

【变式 2】 . 用因式分解法解方程：

(1) $(3x-4)^2 = 9x - 12$

(2) $3(x+2)^2 = x^2 - 4$

【变式 3】 . 用因式分解法解下列方程：

(1) $3(x-2)^2 = x(x-2)$;

(2) $(x-3)^2 - 4x^2 = 0$;

(3) $x^2 - 6x - 7 = 0$;

(4) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$.

题型 02 辨析因式分解法解一元二次方程

【典例 1】 . 一元二次方程 $x^2 + 4x + 3 = 0$ 的两个根为 ()

A . $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

B . $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

C . $x_1 = 1$, $x_2 = -3$

D . $x_1 = -1$, $x_2 = -3$

【变式1】. 方程 $x(x-2)=x$ 的解是 ()

- A. $x=0$ B. $x=3$ 或 $x=0$ C. $x=3$ D. $x=2$ 或 $x=0$

【变式2】. 方程 $x^2=2024x$ 的根为 ()

- A. $x=0$ B. $x=2024$ C. $x_1=0, x_2=2024$ D. 无实数根

【变式3】. 方程 $x(x+1)=x+1$ 的解是 ()

- A. $x=0$ B. $x=-1$
C. $x_1=1, x_2=0$ D. $x_1=1, x_2=-1$

题型 03 因式分解法解一元二次方程易错题

【典例1】. 方程 $(x+1)(x-3)=5$ 的解是 ()

- A. $x_1=1, x_2=3$ B. $x_1=4, x_2=-2$
C. $x_1=-1, x_2=3$ D. $x_1=-4, x_2=2$

【变式1】. 用因式分解法解方程，下列方法中正确的是 ()

- A. $(2x-2)(3x-4)=0$, $\therefore 2x-2=0$ 或 $3x-4=0$
B. $(x+3)(x-1)=1$, $\therefore x+3=0$ 或 $x-1=1$
C. $(x-2)(x-3)=2\times 3$, $\therefore x-2=2$ 或 $x-3=3$
D. $x(x+2)=0$, $\therefore x+2=0$

题型 04 分析解答过程

【典例1】. 解方程： $x(x-5)=5-x$ ，小滨的解答如下：

解：原方程可化简为： $x(x-5)=-(x-5)$...第一步

方程两边同时除以 $(x-5)$ ，得： $x=-1$...第二步

你认为小滨的解答是否正确？如不正确，第_____步出错，请你写出正确的解答过程。

【变式1】. 小李与小王两位同学解方程 $2(x-2)=(x-2)^2$ 的过程如下框：你认为他们的解法是否正确？若正确请在框内打“√”；若错误请在框内打“×”，并写出正确的解答过程。

小李：	小王：
-----	-----

解：两边同除以 $(x-2)$ ，得 $2 = x - 2$ ， 则 $x = 4$ 。	解：移项，得 $2(x-2) - (x-2)^2 = 0$ ， 提取公因式，得 $(x-2)(2-x-2) = 0$ 。 则 $x-2=0$ 或 $2-x-2=0$ ， 解得 $x_1=2$ ， $x_2=0$ 。
--	--

13. 下面是小明用因式分解法解一元二次方程的过程，请仔细阅读，并完成相应的问题。

解一元二次方程： $6x^2 - 2x = 1 - 3x$

解：原方程可以化为： $2x(3x-1) = -(3x-1)$ 第一步

两边同时除以 $(3x-1)$ 得： $2x = -1$ 第二步

系数化为1，得： $x = -\frac{1}{2}$ 第三步

任务：

(1) 小明的解法是不正确的，他从第——步开始出现了错误；

(2) 请你继续用因式分解法完成这个方程的正确解题过程。

题型 05 因式分解法解一元二次方程与二次根式

【典例 1】. 若 $\sqrt{(k-2)^2} = -2k-4$ ，则 k 的值可以是（ ）

- A. 0 B. $-\frac{2}{3}$ C. -2 D. -6

【变式 1】. 已知 m, n 是一元二次方程 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 的两根，则 $m\sqrt{\frac{n}{m}}$ 的值是（ ）

- A. 2 B. -2 C. $\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2}$

题型 06 因式分解法解一元二次方程的代数应用

【典例 1】. 如果代数式 $x^2 + x + 2$ 与 $5x - 2$ 的值相等，那么 $x =$ _____。

【变式 1】. 若 $(m+1)x^{m(m+2)-1} + 2mx - 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 m 的值是_____。

【变式 2】. 若分式 $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ 的值为 0，则 x 的值为_____。

【变式3】 . 在解一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 时，小红看错了常数项 q ，得到方程的两个根是 $-3, 1$. 小明看错了一次项系数 P ，得到方程的两个根是 $5, -4$ ，则原来的方程是 ()

- A . $x^2+2x-3=0$ B . $x^2+2x-20=0$ C . $x^2-2x-20=0$ D . $x^2-2x-3=0$

【变式4】 . 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2+x+k^2+2k-3=0$ 有一个根为 0 ，则 k 的值为 ()

- A . $k=1$ 或 $k=-3$ B . $k=-3$ C . $k=-1$ 或 $k=3$ D . $k=1$

【变式5】 . 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c 为常数，且 $a \neq 0$)，此方程的解为 $x_1=2, x_2=3$. 则关于 x 的一元二次方程 $9ax^2-3bx+c=0$ 的解为_____ .

题型 07 因式分解法解一元二次方程的几何应用

【典例1】 . 一个等腰三角形的两条边长分别是方程 $x^2-13x+42=0$ 的两根，则该等腰三角形的周长是 ()

- A . 19 B . 20 C . 18 D . 19 或 20

【变式1】 . 已知等腰三角形的底边长为 8 ，腰长是一元二次方程 $x^2-11x+28=0$ 的一根，则这个等腰三角形的周长是 ()

- A . 16 B . 19 C . 22 D . 16 或 22

【变式2】 . 等腰三角形的两边长分别是方程 $x^2-11x+24=0$ 的两个根，则这个三角形的周长为 ()

- A . 19 或 14 B . 14 或 16 C . 19 D . 14

题型 08 换元法

【典例1】 . 解方程： $(x-1)^2-5(x-1)+4=0$.

解：设 $x-1=m$ ，则原方程可化为 $m^2-5m+4=0$ ，得 $m_1=1, m_2=4$.

当 $m=1$ 时，即 $x-1=1$ ，解得： $x=2$ ；

当 $m=4$ 时，即 $x-1=4$ ，解得： $x=5$.

故原方程的解为 $x_1=2, x_2=5$.

上述解法称为“整体换元法”. 请用“整体换元法”解方程： $(2x-5)^2-4(2x-5)+3=0$.

【变式1】 . 换元法解方程： $(x^2-2x+1)(x^2-2x-3)=0$.

【变式2】 . 阅读下列材料：

解方程 $(x^2 - 1)^2 - 5(x^2 - 1) + 6 = 0$,

解：设 $x^2 - 1 = y$, 则原方程化为 $y^2 - 5y + 6 = 0$,

解得 $y_1 = 2$, $y_2 = 3$.

当 $y = 2$ 时 , $x^2 - 1 = 2$, 解得 : $x = \pm\sqrt{3}$;

当 $y = 3$ 时 , $x^2 - 1 = 3$, 解得 $x = \pm 2$.

$\therefore$ 原方程的解为 : $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$.

以上解一元二次方程的方法叫做换元法 , 通过换元法达到了降次或者简化方程的目的 , 这体现了数学中的转化思想 .

(1) 请用上述方法解下列方程 : $(2x - 5)^2 - 4(2x - 5) + 3 = 0$;

(2) 已知实数 x , y 满足 $(x^2 + y^2 + 3)^2 - 7x^2 - 7y^2 - 21 = 8$, 求 $x^2 + y^2$ 的值 .

题型 09 新定义、材料题

【典例1】 . 定义 $\max\{a, b\} = \begin{cases} a & (a \geq b) \\ b & (a < b) \end{cases}$, 若 $\max\{x, x^2 - 4x + 4\} = 4$, 则 x 的值为_____ .

【变式1】 . 阅读材料：若 $x + 2$ 是 $x^2 - mx - 8$ 的一个因式 , 我们不难得到 $x^2 - mx - 8 = (x + 2)(x - 4)$, 易知 $m = 2$. 现在我们用另一种方法来求 m 的值：观察上面的等式 , 可以发现当 $x = -2$ 时 ,

$x^2 - mx - 8 = (x + 2)(x - 4) = (-2 + 2)(-2 - 4) = 0$, 也就是说 $x = -2$ 是方程 $x^2 - mx - 8 = 0$ 的一个根 , 由此可以得到 $(-2)^2 - m(-2) - 8 = 0$, 解得 $m = 2$.

问题：若 $x + 1$ 是 $2x^3 + x^2 + mx - 6$ 的一个因式 , 请运用上述方法求出 m 的值 .

题型 10 分类讨论

【典例1】 . 解方程 $x^2 - |x| - 2 = 0$ 的解是 ()

A . $x_1 = -1, x_2 = 2$ B . $x_1 = 1, x_2 = -2$ C . $x_1 = 1, x_2 = -1$ D . $x_1 = 2, x_2 = -2$

【变式1】 . 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 5x + p = 0$ 的两实根都是整数 , 则整数 p 的取值可以有

()

- A . 2 个
- B . 4 个
- C . 6 个
- D . 无数个

强化训练

一、单选题

- 1 . 方程 $(x-1)^2 = 4$ 的解是 ()
 - A . $x_1 = -4, x_2 = 5$
 - B . $x = 3$
 - C . $x_1 = -1, x_2 = 3$
 - D . $x = 1$
- 2 . 用配方法解一元二次方程 $x^2 - 2x - 2023 = 0$, 则方程可变形为 ()
 - A . $(x-2)^2 = 2025$
 - B . $(x+2)^2 = 2025$
 - C . $(x-1)^2 = 2024$
 - D . $(x+1)^2 = 2024$
- 3 . 用配方法解方程 $x^2 - 6x = 4$ 时 , 应该把方程两边同时 ()
 - A . 减 36
 - B . 加 36
 - C . 减 9
 - D . 加 9
- 4 . 若关于 x 的方程 $(x-2)^2 = -b$ 是由 $x^2 + ax - b = 0$ 配方后得到的 , 则 a, b 的值分别为 ()
 - A . 4, 2
 - B . -4, -4
 - C . -4, -2
 - D . -4, 2
- 5 . 关于 x 的方程 $(x+m)^2 = n$, 下列说法正确的是 ()
 - A . 当 $n > 0$ 时 , 有两个解 $x = \pm\sqrt{n} - m$
 - B . 有两个解 $x = \pm\sqrt{n} - m$
 - C . 当 $n \leq 0$ 时 , 有两个解 $x = \pm\sqrt{n-m}$
 - D . 当 $n \leq 0$ 时 , 方程无实根
- 6 . 已知 $P = x^2 - 2x, Q = 2x - 4$, 则比较 P, Q 的大小关系为 ()
 - A . $P < Q$
 - B . $P > Q$
 - C . $P = Q$
 - D . $P \leq Q$

二、填空题

- 7 . 用配方法解方程 $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 5$, 方程的解为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 王老师在批改作业时发现，一位同学在用配方法解一元二次方程时，配方后等号右边的数字不小心被墨水污染了如下： $(x-1)^2 = \blacksquare$. 若该方程的一个根为 $x_1 = 3$ ，则另一个根为 $x_2 =$ _____ .

9. 若方程 $x^2 - 4096576 = 0$ 的两根为 $x_1 = 2024$, $x_2 = -2024$ ，则方程 $x^2 - 2x - 4096575 = 0$ 的两根为 _____ .

10. 已知实数 a 满足 $3a^2 + \frac{3}{a^2} - 12a - \frac{12}{a} + 19 = 1$ ，则 $a + \frac{1}{a} =$ _____ .

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $\frac{1}{2025}x^2 + 3 = 2x^2 + b$ 的根为 ± 3 ，那么关于 y 的一元二次方程

$\frac{1}{2025}(y^2 + 1) + 3 = 2(y^2 + 1) + b$ 的解为_____ .

12. 我国南宋时期数学家秦九韶曾提出利用三角形的三边求面积的公式，此公式与古希腊几何学家海伦提出的公式如出一辙，即三角形的三边长分别为 a ， b ， c ，记 $P = \frac{a+b+c}{2}$ ，则其面积

$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$. 这个公式也被称为海伦—秦九韶公式 . 若 $p = 3$ ， $c = 2$ ，则此三角形面积的最大值是_____ .

三、解答题

13. 用直接开平方法解下列方程：

(1) $(4x+1)^2 - \frac{16}{9} = 0$.

(2) $(2x+1)^2 - 9(x-3)^2 = 0$.

14. 用配方法解下列方程：

(1) $2x^2 - 5x - 7 = 0$;

(2) $\sqrt{3}y^2 - y - \sqrt{3} = 0$;

(3) $(x+1)(x-1) = 2x^2 - 4x - 6$.

15. 用配方法解下列方程：

(1) $3x^2 - 5x = 2$;

(2) $x^2 + 8x = 9$;

(3) $x^2 + 12x - 15 = 0$;

$$(4) \frac{1}{4}x^2 - x - 4 = 0 ;$$

$$(5) 2x^2 + 12x + 10 = 0 ;$$

$$(6) x^2 + px + q = 0 (p^2 - 4q \geq 0) .$$

16. 下面是小明同学解一元二次方程 $2x^2 - 2 = 3x$ 的过程，请认真阅读并完成相应的任务 .

$$2x^2 - 2 = 3x .$$

解：二次项系数化为 1，得 $x^2 - 1 = \frac{3}{2}x$ ，第一步

移项，得 $x^2 - \frac{3}{2}x = 1$ ，第二步

配方，得 $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} = 1$ ，第三步

变形，得 $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 1$ ，第四步

开方，得 $x - \frac{3}{2} = \pm 1$ ，第五步

解得 $x_1 = \frac{1}{2}$ ， $x_2 = \frac{5}{2}$ ，第六步

(1) 上面小明同学的解法中运用“配方法”将一元二次方程“降次”为两个一元一次方程，体现的数学思想是_____，其中“配方法”依据的一个数学公式是_____；

(2) 上述解题过程，从第_____步开始出现错误，请写出正确的解答过程 .

17. 用配方法证明：二次三项式 $-8x^2 + 12x - 5$ 的值一定小于 0 .

18. (1) 已知 $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ， $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ，求 $a^2b + ab^2$ 的值 .

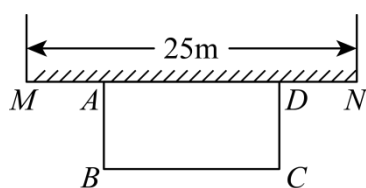
(2) 已知 $x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$ ，求 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的值；

(3) 用配方法求代数式 $y^2 - 6y + 11$ 的最小值 .

19. 形如 $x^2 \pm 2xy + y^2$ 的代数式叫做完全平方式，有些代数式可以通过配方得到完全平方式，我们把这种组成完全平方式的变形过程叫做配方 . 配方在某些求代数式最值问题、解方程等都有广泛的应用 .

例如： $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x+1)^2 + 2$ ，可得：当 $x = -1$ 时，代数式 $x^2 + 2x + 3$ 有最小值，最小值为

2. 请回答下列问题：



(1) 当 x 取何值时，代数式 $x^2 - 8x + 10$ 有最小值，最小值为多少。

(2) 某中学准备在校园里靠墙围一个长方形花园篱笆，如图，围墙 MN 的长为 25m，篱笆的长为 40m，当 AB 为多少米时，围成的长方形花园 $ABCD$ 面积最大，求出最大面积。

20. 先阅读，再解答：由阅读材料：利用公式法，可以将一些形如 $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的多项式变形为 $a(x+m)^2 + n$ 的形式，我们把这样的变形方法叫做多项式 $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的配方法，运用多项式的配方法可以解决一些数学问题。比如运用多项式的配方法及平方差公式能对一些多项式进行因式分解。

例： $x^2 + 4x - 5$

$$= x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 5$$

$$= x^2 + 4x + 4 - 9$$

$$= (x+2)^2 - 9$$

$$= (x+2-3)(x+2+3)$$

$$= (x-1)(x+5)$$

根据以上材料，利用多项式的配方解答下列问题：

(1) 分解因式： $x^2 + 2x - 3$ ；

(2) 求多项式 $2x^2 + 6x - 7$ 的最小值；

(3) 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且满足 $a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 8b - 10c + 50 = 0$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。