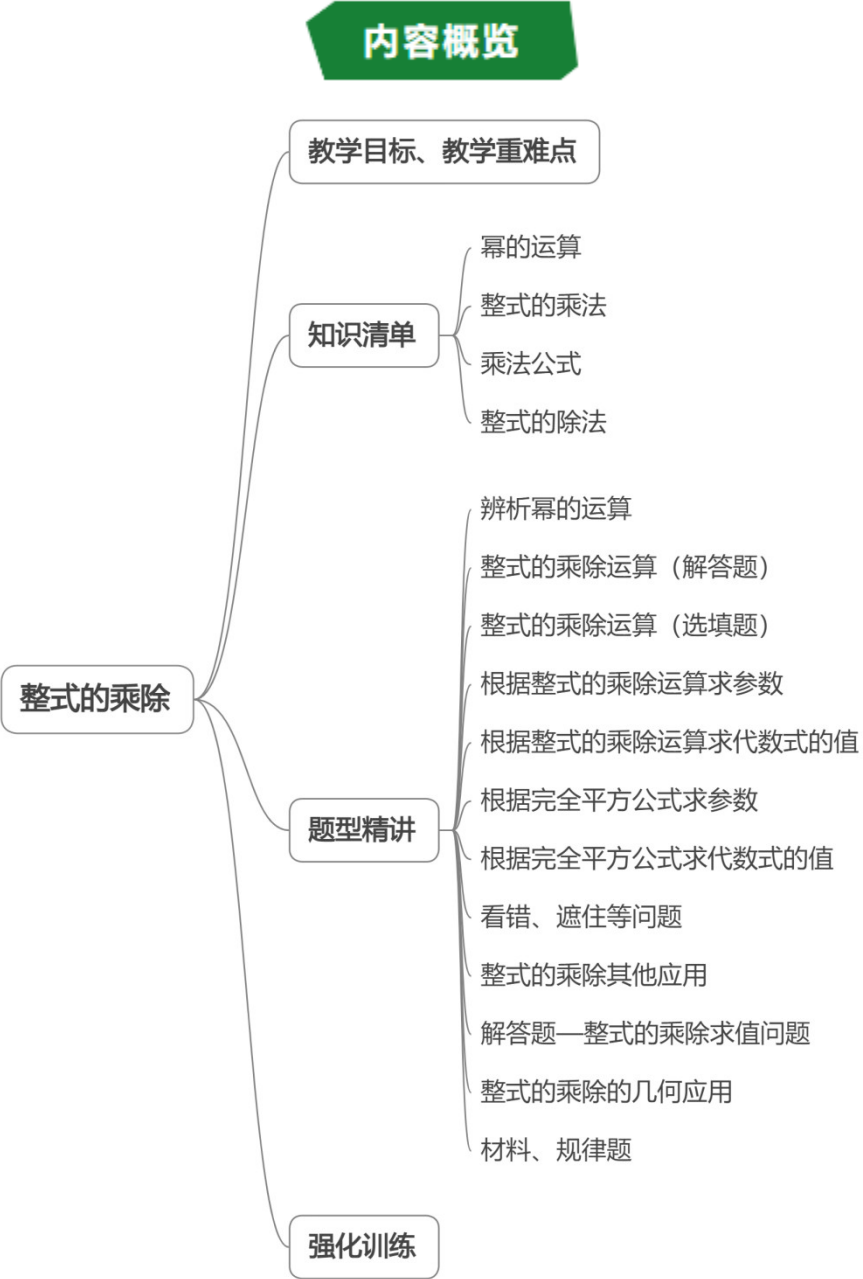


第 11 章 整式的乘除



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 掌握幂的运算及其应用； 2. 会进行整式的乘法； 3. 知道乘法公式，根据乘法公式求参数或代数式的值； 4. 学会整式的除法运算； 5. 会解整式的乘除的应用题。
教学重难点	1.重点

	(1) 幂的运算、整式的乘法运算； (2) 乘法公式、整式的除法运算； (3) 整式的乘除求值、求参数，其他代数、几何应用等。 2. 难点 (1) 整式的乘除有关化简、变形、求值等； (2) 整式的乘除的几何应用； (3) 新定义、材料阅读题等。
--	--

知识清单

知识点 1 幂的运算

1. 乘方

我们知道， $a \cdot a \cdot a$ 表示三个 a 相乘，记作 a^3 ，叫作“ a 的立方”或“ a 的三次方”。

一般地，将 n 个 a 相乘的运算叫作**乘方**，

2. 幂

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \cdot a}_{n \text{ 个 } a} \quad \text{记作“} a^n \text{”，乘方的结果叫作幂。}$$

3. 乘方有关的概念

在 a^n 中， a 叫作**底数**，正整数 n 叫作**指数**。“ a^n ”读作“ a 的 n 次方”，当“ a^n ”被看作是 a 的 n 次方的结果时，也读作“ a 的 n 次幂”。当 $n=1$ 时，我们规定： $a^1=a$ 。

4. 同底数幂的乘法

同底数幂的乘法性质：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \text{ 是正整数}).$$

同底数幂相乘，底数不变，指数相加。

同底数幂的乘法运算，可以转化为指数的加法运算。

5. 幂的乘方

幂的乘方性质：

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (m, n \text{ 是正整数}).$$

幂的乘方，底数不变，指数相乘。

幂的乘方运算，可以转化为指数的乘法运算.

要点：

(1) 公式的推广： $((a^m)^n)^p = a^{mnp}$ ($a \neq 0$, m, n, p 均为正整数)

(2) 逆用公式： $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$ ，根据题目的需要常常逆用幂的乘方运算能将某些幂变形，从而解决问题.

6.积的乘方性质：

$(ab)^n = a^n b^n$ (n 是正整数).

积的乘方，等于乘方的积.

要点：

(1) 公式的推广： $(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ (n 为正整数).

(2) 逆用公式： $a^n b^n = (ab)^n$ 逆用公式适当的变形可简化运算过程，尤其是遇到底数互为倒数时，计算

更简便.如： $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times 2^{10} = \left(\frac{1}{2} \times 2\right)^{10} = 1$.

【即学即练】

1. 下列计算正确的是 ()

A. $a^3 \cdot a^2 = a^6$ B. $2a \cdot 3a = 6a$ C. $(a^3)^2 = a^5$ D. $(ab)^2 = a^2 b^2$

2. 计算： $a \cdot (-a)^2 \cdot a^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 计算： $2^{2025} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{2024} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知 $3^m = 2, 9^n = 4$ ，则 $3^{m+2n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 若 $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 6^{2x+4}$ ，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

知识点 2 整式的乘法

1.单项式与单项式相乘的法则

单项式与单项式相乘，把它们的系数、同底数幂分别相乘.

要点：

(1) 单项式的乘法法则的实质是乘法的交换律和同底数幂的乘法法则的综合应用.

(2) 单项式的乘法方法步骤：积的系数等于各系数的积，是把各单项式的系数交换到一起进行有理数的乘法计算，先确定符号，再计算绝对值；相同字母相乘，是同底数幂的乘法，按照“底数不变，指数相加”进行计算；只在一个单项式里含有的字母，要连同它的指数写在积里作为积的一个因式.

(3) 运算的结果仍为单项式，也是由系数、字母、字母的指数这三部分组成.

(4) 三个或三个以上的单项式相乘同样适用以上法则.

2. 单项式与整式相乘的运算法则

单项式与整式相乘，就是用单项式去乘整式的每一项，再把所得的积相加. 即

$$m \cdot (a + b + c) = ma + mb + mc$$

要点：

- (1) 单项式与整式相乘的计算方法，实质是利用乘法的分配律将其转化为多个单项式乘单项式的问题.
- (2) 单项式与整式的乘积仍是一个整式，项数与原整式的项数相同.
- (3) 计算的过程中要注意符号问题，整式中的每一项包括它前面的符号，同时还要注意单项式的符号.
- (4) 对混合运算，应注意运算顺序，最后有同类项时，必须合并，从而得到最简的结果.

3. 整式与整式相乘的运算法则

整式与整式相乘，先用一个整式的每一项乘另一个整式的每一项，再把所得的积相加. 即

$$(a + b) \cdot (m + n) = am + an + bm + bn$$

要点：

整式与整式相乘，仍得整式. 在合并同类项之前，积的项数应该等于两个整式的项数之积.

整式与整式相乘的最后结果需化简，有同类项的要合并. 特殊的二项式相乘：

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

【即学即练】

1. 计算： $(-4x^3y) \cdot \frac{1}{2}xy^2 = (\quad)$

- A. $-2x^4y^3$ B. $2x^3y^4$ C. $-x^4y^3$ D. x^3y^3

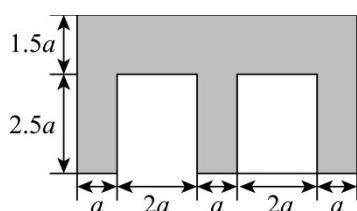
2. 计算：

(1) $\left(-\frac{1}{2}a^3b^2\right) \cdot (4b + 8ab^3)$

(2) $(-3m + 1)(m - 2)$

3. 若 $(x - 2)(x + m) = x^2 + ax - 14$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 如图是学校劳动基地的平面示意图，则图中阴影部分的面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$. (用含 a 的代数式表示)



5. 如果多项式 $(3x^2 - 2x + 1)(ax - 3)$ 乘积中不含关于 x 的一次项，那么常数 $a =$ _____.

知识点3 乘法公式

1.平方差公式： $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

要点：

在这里， a, b 既可以是具体数字，也可以是整式.

抓住公式的几个变形形式利于理解公式.但是关键仍然是把握平方差公式的典型特征：既有相同项，又有“相反项”，而结果是“相同项”的平方减去“相反项”的平方.常见的变式有以下类型：

(1) 位置变化：如 $(a+b)(-b+a)$ 利用加法交换律可以转化为公式的标准型

(2) 系数变化：如 $(3x+5y)(3x-5y)$

(3) 指数变化：如 $(m^3+n^2)(m^3-n^2)$

(4) 符号变化：如 $(-a-b)(a-b)$

(5) 增项变化：如 $(m+n+p)(m-n+p)$

2.完全平方公式： $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ； $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

要点：

公式特点：左边是两数的和（或差）的平方，右边是二次三项式，是这两数的平方和加（或减）这两数之积的2倍.以下是常见的变形：

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$$

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

【即学即练】

1. 下列多项式相乘，不能用平方差公式计算的是 ()

A. $(4x-3y)(3y-4x)$

B. $(-4x+3y)(-4x-3y)$

C. $\left(-\frac{1}{4}x+2y\right)\left(-\frac{1}{4}x-2y\right)$

D. $(3y+2x)(2x-3y)$

2. 下列计算正确的是 ()

A. $(x+2y)(x-2y)=x^2-2y^2$

B. $(x-y)(-x-y)=-x^2-y^2$

C. $(x-2y)^2=x^2-4xy+4y^2$

D. $(x+y)^2=x^2+y^2$

3. 已知 $m^2+km+81$ 是完全平方式，则 k 的值为 ()

A. 9

B. ± 9

C. ± 18

D. 18

4. 用乘法公式计算：

(1) 99^2 ；

(2) $2025^2 - 2024 \times 2026$.

5. 已知 $a+b=5, ab=6$.

(1) 求 $a^2 + b^2$ 的值；

(2) 求 $(a-b)^2$ 的值 .

知识点 4 整式的除法

1. 同底数幂的除法性质：

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (m, n \text{ 是正整数且 } m > n, a \neq 0).$$

同底数幂相除，底数不变，指数相减.

同底数幂的除法运算，可以转化为指数的减法运算.

当 $a \neq 0$ 时， $a^m \div a^m = 1$. 要使得同底数幂的除法性质在 $m=n$ 时仍成立，即 $a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$,

规定 $a^0 = 1 (a \neq 0)$, 即任何不等于零的数的零次幂都等于 1.

要点：

- (1) 同底数幂乘法与同底数幂的除法是互逆运算.
- (2) 被除式、除式的底数相同，被除式的指数大于除式指数，0 不能作除式.
- (3) 当三个或三个以上同底数幂相除时，也具有这一性质.
- (4) 底数可以是一个数，也可以是单项式或整式.

2. 两个单项式相除，把系数和同底数幂分别相除.

要点： 单项式除法的实质即有理数的除法（系数部分）和同底数幂的除法的组合，单项式除以单项式的结果仍为单项式.

3. 整式除以单项式：先把整式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加.

$$\text{即 } (am + bm + cm) \div m = am \div m + bm \div m + cm \div m = a + b + c$$

要点：

- (1) 整式除以单项式转化为单项式除以单项式来解决，其实质是将它分解成多个单项式除以单项式.
- (2) 利用法则计算时，整式的各项要包括它前面的符号，要注意符号的变化.

【即学即练】

1. 计算： $(6a^3 - 10a^2 + 2a) \div 2a =$ _____ .

2. 计算： $(10a^2b) \div (2b) =$ _____ .

3. 下列四个算式：① $4x^2y \div \frac{1}{4}xy = xy^3$ ；② $16a^6b^4c \div 8a^3b^2 = 2a^2b^2c$ ；③ $9x^8y^2 \div 3x^3y = 3x^5y$ ；④

$(12m^3 + 8m^2 - 4m) \div (-2m) = -6m^2 + 4m + 2$ ，其中正确的有 ()

A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 3个

4. 若 $2a^5b^2 \div a = 2a^mb^n$ ，则 m, n 的取值分别为 ()

A. $m=4, n=0$ B. $m=4, n=2$ C. $m=5, n=2$ D. $m=5, n=0$

5. 若一个长方形的面积为 $2ab + b^2$ ，一边长为 b ，则另一边的长为_____.

6. 先化简再求值： $(a-b)^2 + (8a^2b^2 - 4ab^3) \div 4ab$ ，其中 $a=2$ ， $b=-\frac{1}{2}$.

题型精讲

题型 01 幂的运算

【典例 1】. 下列计算结果正确的是 ()

A. $a^4 \cdot a^2 = a^8$ B. $(-3a^3)^2 = 6a^6$ C. $a^{10} \div a^2 = a^5$ D. $(-ab^2)^2 = a^2b^4$

【变式 1】. 下列计算正确的是 ()

A. $x^4 \cdot x^4 = x^{14}$ B. $(a^5)^2 = a^7$ C. $(ab^2)^3 = a^3b^6$ D. $x^{10} \div x^5 = x^2$

【变式 2】. 若 k 为正整数，则 $\underbrace{k+k+\cdots+k}_{k\uparrow k}$ ()

A. k^2k+1 B. k^{2k} C. $2k$ D. k^2+k

题型 02 整式的乘除运算 (解答题)

【典例 1】. 计算：

(1) $-6a \cdot (a - 3b)$ ；

(2) $-\frac{1}{2}ab \cdot \left(-\frac{2}{3}ab^2 - 4ab\right)$ ；

(3) $x \cdot (3x^2 - 5x + 1) - 3x^2 \cdot (x - 2)$ ；

(4) $\left[ab \cdot (1-a) - 2a \cdot \left(b - \frac{1}{2}\right)\right] \cdot 2ab^2$.

【变式 1】 . 计算：

$$(1) \left(-\frac{1}{2}a^5b^2\right)^3 ;$$

$$(2) (-x)^3 \div x \cdot (-x)^2 ;$$

$$(3) -10^{2n} \times 100 \div (-10)^{2n-1} ;$$

$$(4) (-9)^3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 .$$

【变式 2】 . 计算：

$$(1) (x+y)^2 - (x-y)^2$$

$$(2) (3m+4n)(3m-4n)(9m^2+16n^2)$$

$$(3) (a-b+1)(a+b-1)$$

$$(4) (3x-z)^2 (-3x-z)^2$$

题型 03 整式的乘除运算 (选填题)

【典例 1】 . 计算： $-2x^3 \cdot 3xy =$ _____ .

【变式 1】 . 计算 $a(5a-2b) =$ _____ .

【变式 2】 . 计算： $3m^3 \cdot 4mn \div (2m^2) =$ _____ .

【变式 3】 . 计算 $(8x^3y^2 - 6xy^2) \div (2xy^2) =$ _____ .

【变式 4】 . $(-3)^{2024} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{2025} =$ _____ .

【变式 5】 . 给出下列式子：

$$\textcircled{1} (3a+4)(3a-4) = 9a^2 - 4 ; \quad \textcircled{2} (a-2b)^2 = a^2 - 4b^2$$

$$\textcircled{3} (3x-y)(x+y) = 3x^2 - 2xy + y^2 ; \quad \textcircled{4} (-3a+2)(-3a-2) = 9a^2 - 4$$

其中正确的是 ()

A . $\textcircled{4}$

B . $\textcircled{3}$

C . $\textcircled{2}$

D . $\textcircled{1}$

题型 04 根据整式的乘除运算求参数

【典例 1】. 如果 $(x-4)(x-3) = x^2 + mx + n$, 那么 m 、 n 的值分别是 ()

- A . $-7, 12$ B . $7, 12$ C . $-7, -12$ D . $7, -12$

【变式 1】. 若 $2a^5b^2 \div a = 2a^mb^n$, 则 m, n 的取值分别为 ()

- A . $m = 4, n = 0$ B . $m = 4, n = 2$ C . $m = 5, n = 2$ D . $m = 5, n = 0$

【变式 2】. 若 $(x+ny)(x-3y) = x^2 - 2xy + my^2$, 则 $m =$ _____ .

【变式 3】. 若 $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 6^{2x+4}$, 则 $x =$ _____ .

题型 05 根据整式的乘除运算求代数式的值

【典例 1】. 若 $x^2y^3 = -2$, 则 $6xy^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^3y^4\right)$ 的值为 _____ .

【变式 1】. 已知 $a^n = 2$, $b^n = 3$, 则 $a^{3n} \cdot b^{2n}$ 的值为 _____ .

【变式 2】. 若 $3^a = 6$, $9^b = 2$, 则 3^{2a+4b} 的值为 _____ .

【变式 3】. 若 $2x+3y-3=0$, 则 $9^x \cdot 27^y$ 的值是 _____ .

【变式 4】. 已知 $a^m = 3$, $a^n = 5$, 则 $a^{3m+2n} =$ _____

【变式 5】. 若 $x^m = 5$, $x^n = 4$, 则 $x^{2n-3m} =$ _____ .

题型 06 根据完全平方公式求参数

【典例 1】. 若 $x^2 - 3(a+1)x + 16$ 是一个完全平方式, 则 a 的值为 ()

- A . $\frac{11}{3}$ 或 $-\frac{5}{3}$ B . $-\frac{11}{3}$ C . $\frac{5}{3}$ D . $-\frac{11}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$

【变式 1】. 若 $4x^2 - kxy + 9y^2$ 是一个完全平方式, 则 k 的值为 ()

- A . 6 B . ± 6 C . 12 D . ± 12

【变式 2】. 若代数式 $x^2 - 2kx + 25$ 是一个完全平方式, 则 $k =$ _____ .

【变式 3】. 若 $4x^2 - (m+2)x + 9$ 是完全平方式, 则 m 的值是 ()

- A . -8 B . 10 C . 10 或 -14 D . 10 或 -8

题型 07 根据完全平方公式求代数式的值

【典例 1】. 若 $x + y = 3$, $x^2 + y^2 = 13$, 则 xy 的值为 ()

- A . 4 B . -4 C . -2 D . 2

【变式 1】. 已知 $a + b = 15$, $a^2 - b^2 = 5$, 则 $a - b =$ _____ .

【变式 2】. 已知关于 x 的式子 $x - \frac{1}{x} = 3$, 则 $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ ()

- A . 9 B . 10 C . 11 D . 7

题型 08 看错、遮住等问题

【典例 1】. 数学课上，老师讲了单项式乘以多项式，放学回到家，小明拿出课堂笔记复习，发现一道题：
 $-3xy(4y - 2x - 1) = -12xy^2 + \square + 3xy$, “ $\square$ ”的地方被墨水弄污了，则“ $\square$ ”内应填写的式子是 ()

- A . $6x^2y$ B . $-6x^2y$ C . $-3xy$ D . $3xy$

【变式 1】. 在计算 $(x - m)(x + n)$ 时，嘉嘉把 n 错看成了 8，得到的结果是： $x^2 + 6x - 8m$ ；琪琪错把 $-m$ 看成了 $+m$ ，得到结果： $x^2 + 5x + mn$.

(1) 求出 m, n 的值；

(2) 求 $(2m + n)(2m - n) - m(4m - n)$ 的值 .

题型 09 不含某项问题

【典例 1】. 若 $(x + 1)(x^2 - 2ax + a)$ 的乘积中不含 x^2 项，则常数 a 的值为 ()

- A . 2 B . -2 C . $-\frac{1}{2}$ D . $\frac{1}{2}$

【变式 1】. 若 $(x + m)(x^2 - 3x + n)$ 的积中不含 x^2 、 x 项，则 $m + n =$ _____

题型 10 整式的乘除其他应用

【典例 1】. 若 $8a^3b^2 \div M = 2ab^2$, 则 $M =$ _____ .

【变式 1】. 已知 $a = 2^{55}$, $b = 3^{44}$, $c = 4^{33}$, 则 a, b, c 的大小关系为 _____ (用“ $>$ ”连接) .

题型 11 解答题—整式的乘除求值问题

【典例 1】. 先化简，再求值： $(2a - b)^2 - (b - a)(b + a) + a(2b - 5a)$ ，其中 $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$.

【变式1】 . 先化简，再求值： $\left[(2x^2)^3 - 6x^3(x^3 + 2x^2) + 2x^4\right] \div 2x^4$. 其中 $x = 3$.

【变式2】 . 先化简，再求值： $(m-1)^2 - m(m+1) - (m+2)(m-2)$ ，其中 $m = -2$

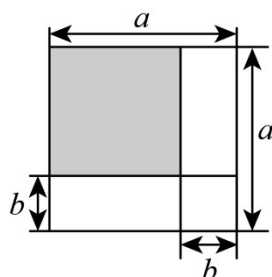
【变式3】 . 已知： $5^a = 3$ ， $5^b = 8$ ， $5^c = 72$.

(1)求 5^{a-b+c} 的值；

(2)试说明 $2a+b=c$.

题型12 整式的乘除的几何应用

【典例1】 . 如图，利用图中的面积关系可以验证的等式关系为（ ）



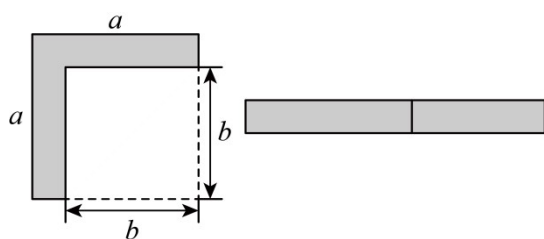
A . $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

B . $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

C . $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

D . $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

【变式1】 . 如图，从边长为 a 的大正方形中剪掉一个边长为 b 的小正方形，将阴影部分沿虚线剪开，拼成右边的矩形，根据图形的变化过程写出的一个正确的等式是⁽¹⁾ .



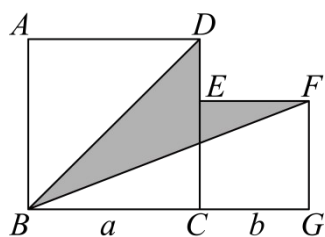
A . $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

B . $a(a-b) = a^2 - ab$

C . $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

D . $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

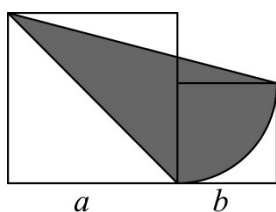
【变式2】 . 如图，两个正方形的边长分别为 a 、 b ，如果 $a+b=18$ ， $ab=70$.



(1) 求 $a^2 + b^2$ 的值；

(2) 求图中阴影部分的面积。

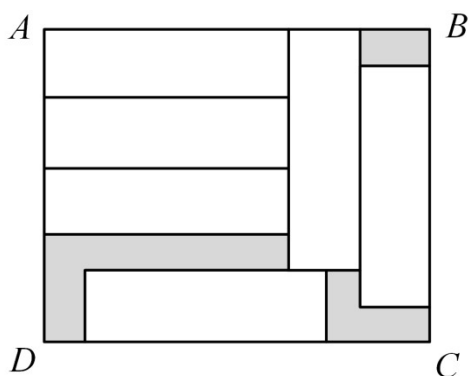
【变式3】 . 如图，两个相连的正方形的边长分别是 a 、 b 完成下面两题（如果含有 π ，请在结果中保留 π 的形式）。



(1) 用含 a 、 b 的式子表示阴影部分的面积；

(2) 当 $a = 5$ ， $b = 3$ 时，求阴影部分的面积。

【变式4】 . 如图，在长方形 $ABCD$ 中，放入 6 个形状和大小都相同的小长方形，已知小长方形的长为 a ，宽为 b 。



(1) 用含 a ， b 的代数式表示长方形 $ABCD$ 的长 AB 、宽 AD ；

(2) 用含 a ， b 的代数式表示阴影部分的面积。

题型 13 材料、规律题

【典例1】 . 小明同学在计算 $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$ 时发现一次项 $(a_1b_2 + a_2b_1)x$ 可以利用交叉相乘再相加的规

二、填空题

4. 计算 $(a \cdot a \cdot a)^2$ 的结果等于_____.

5. 计算： $(10a^2b) \div (2b) =$ _____.

6. 已知 $a+b=15$ ， $a^2-b^2=5$ ，则 $a-b=$ _____.

7. 若 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 表示一种新的运算，其运算法则为 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$ ，则 $\begin{bmatrix} 2n^3 & m^2n \\ n^2 & 4m^2 \end{bmatrix}$ 的结果为_____.

8. 若 $A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$ ，则 $A-2003$ 的末位数字是_____.

三、解答题

9. 计算：

(1) $x^2 \cdot (x^2)^4$ ；

(2) $(-3a^2b^3)^3$ ；

(3) $(-2x^2)^3 - (2x^3)^2$ ；

(4) $10^6 \div (10^4 \times 10^{-2})$ ；

(5) $0.2^2 \times 0.4^5 \times 12.5^5 \div 5^2$ ；

(6) $(a-b)^5 \div (b-a)^2$ 。

10. 先化简，再求值： $\left[(2a+1)^2 + (2a+1)(2a-1) \right] \div 2a$ ，其中 $a=3$ 。

11. 思考与探究

如图 1 的两个长方形可以按不同的形式拼成图 2 和图 3 两个图形。

(1) 在图 2 中的阴影部分的面积 S ，可表示为 _ (写成多项式乘法的形式)；在图 3 中的阴影部分的面积 S ：可表示为 _ (写成两数平方差的形式)；

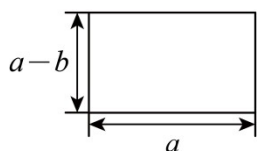


图1

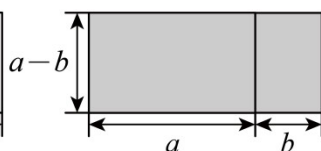
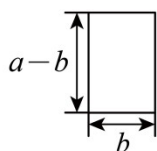


图2

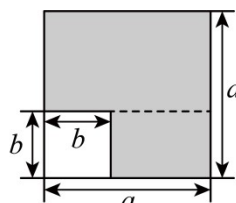


图3

(2)比较图 2 与图 3 的阴影部分面积，可以得到的等式是_；

A . $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

B . $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

C . $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3)请利用所得等式解决下面的问题：计算

$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)+1$ 的值 .