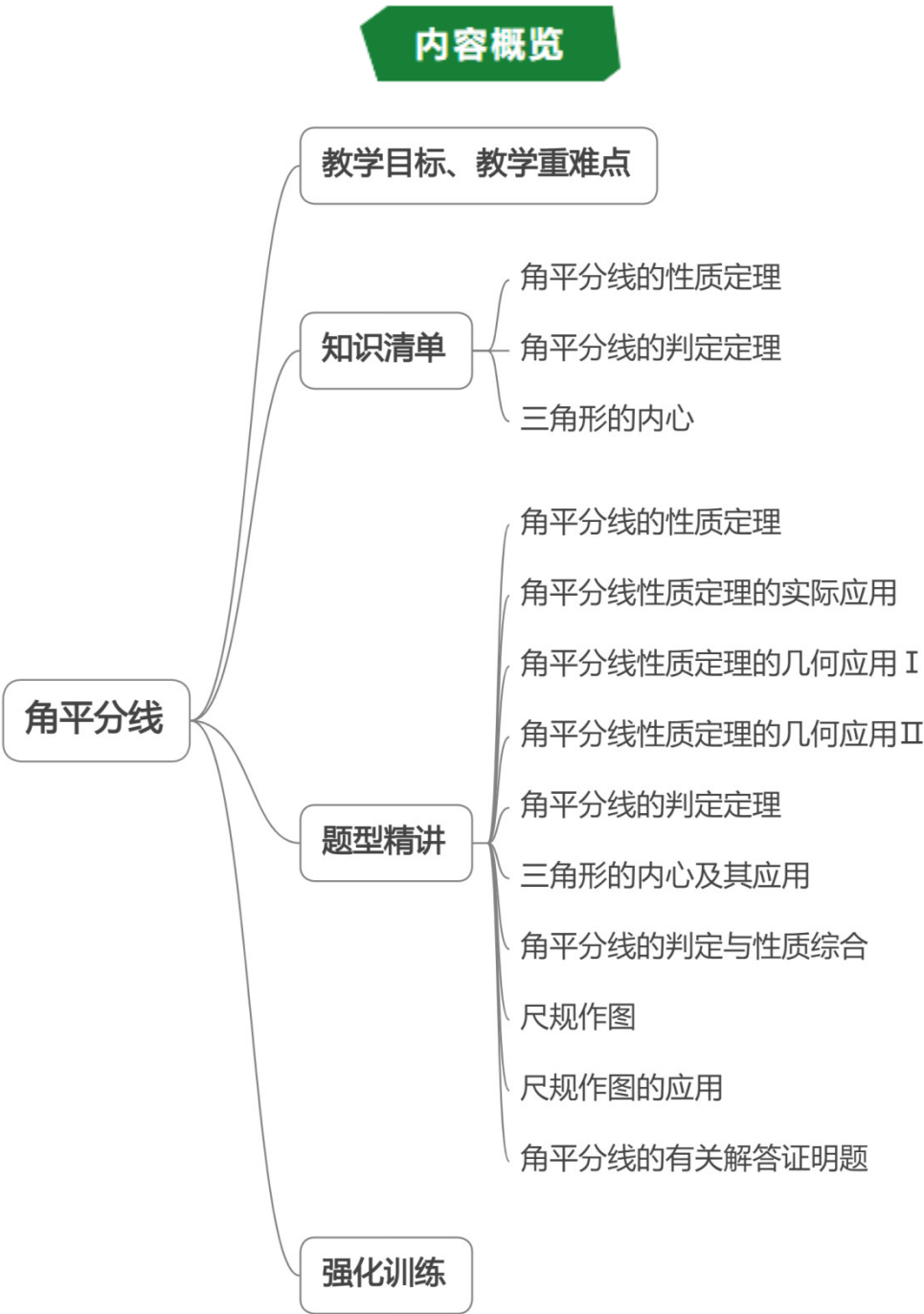


专题 22.3 角平分线



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 知道角平分线的性质定理； 2. 学会角平分线的判定定理； 3. 掌握角平分线的性质与判定综合；
------	--

	4. 三角形的内心及其应用。
教学重难点	1.重点 (1) 角平分线的性质定理及其应用； (2) 角平分线的判定定理，及其与性质定理综合； (3) 角平分线有关是尺规作图； (4) 三角形的内心及其应用。 2.难点 (1) 角平分线的性质、判定定理与其他几何图形性质结合； (2) 角平分线的综合应用。

知识清单

知识点 1 角平分线的性质定理

操作

我们知道，角是轴对称图形，它的对称轴是角平分线所在的直线.

已知一个角，你能用直尺和圆规作出它的平分线吗？

如图 22-2-1,已知 $\angle AOB$,求作 $\angle AOB$ 的平分线.

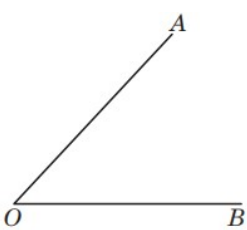


图 22-2-1

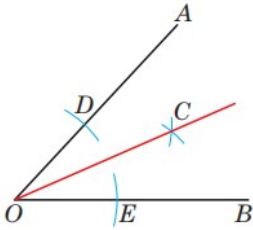


图 22-2-2

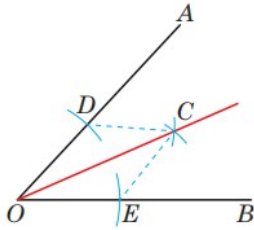


图 22-2-3

作法

- (1)以点 O 为圆心、以任意长度 a 为半径作弧，分别交 OA、OB 于点 D、E;
- (2)分别以点 D、E 为圆心，以 DE 的长为半径作弧，两弧相交于 $\angle AOB$ 内的一点 C;
- (3)作射线 OC.射线 OC 就是 $\angle AOB$ 的平分线(图 22-2-2).

证明 如图 22-2-3,连接 CD、CE.在 $\triangle OCD$ 和 $\triangle OCE$ 中，

$$\begin{cases} OD=OE, \\ OC=OC, \\ CD=CE, \end{cases}$$

∴

∴ $\triangle OCD \cong \triangle OCE$.

∴ $\angle COD = \angle COE$,

即 OC 平分 $\angle AOB$.

如图 22-2-4, 设 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线, 在 OC 上任取一个不与点 O 重合的点 P, 过点 P 分别向 OA、OB 作垂线段, 那么这两条垂线段的长相等.

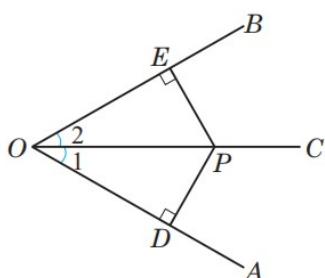


图 22-2-4

归纳上述事实, 得到角平分线的性质定理:

定理 角平分线上的点到这个角的两边所在直线的距离相等.

显然, 角平分线的端点到这个角的两边所在直线的距离相等, 都为 0.

注意: 研究角平分线有关问题时, 约定所涉及的角小于平角.

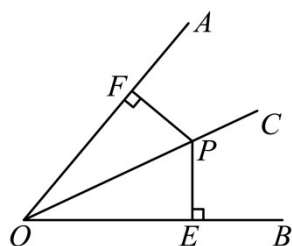
角平分线的性质定理证明

如图 22-2-4, 已知: OC 是 $\angle AOB$ 的平分线, P 是 OC 上一点(点 P 不与点 O 重合), $PD \perp OA$, $PE \perp OB$, 垂足分别为 D、E. 求证: $PD = PE$.

证明 因为 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线, 所以 $\angle 1 = \angle 2$. 因为 $PD \perp OA$, $PE \perp OB$, 所以 $\angle PDO = \angle PEO = 90^\circ$. 又因为 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle PDO = \angle PEO$, OP 为公共边, 所以 $\triangle PDO \cong \triangle PEO$. 由此推出 $PD = PE$.

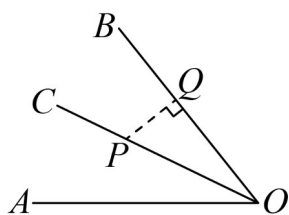
【即学即练】

1. 如图, 已知点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线 OC 上, $PF \perp OA$ 于点 F, $PE \perp OB$ 于点 E, 若 $PE = 8$, 则 PF 长 ()



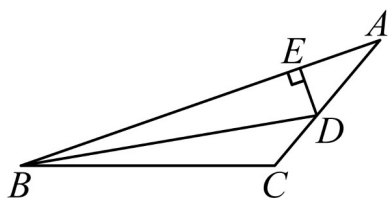
- A . 4 B . 6 C . 8 D . 10

2. 如图, OC 平分 $\angle AOB$, 在 OC 上取一点 P , 过 P 做 $PQ \perp OB$, 若 $PQ = 7\text{cm}$, 则 P 点到 OA 的距离为 ()



- A . 4cm B . 5cm C . 6cm D . 7cm

3. 如图, BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, $DE \perp AB$ 于 E , $S_{\triangle ABC} = 36\text{cm}^2$, $AB = 18\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, 则 DE 的长是 ()



- A . 2cm B . 4cm C . 1.2cm D . 2.4cm

知识点 2 角平分线的判定定理

定理 在角的内部, 到角的两边所在直线距离相等的点, 均在这个角的平分线上.

角平分线的判定定理证明

如图 22-2-5, 已知: Q 为 $\angle AOB$ 内部一点, $QD \perp OA$, $QE \perp OB$, 垂足分别为 D 、 E , $QD = QE$.

求证: 点 Q 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

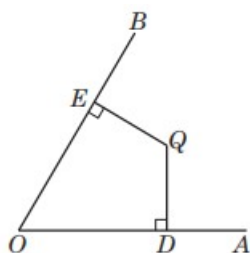


图 22-2-5

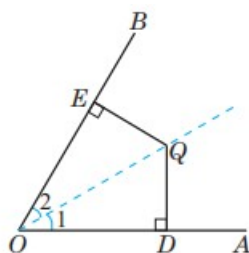
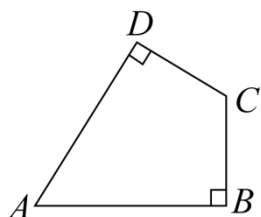


图 22-2-6

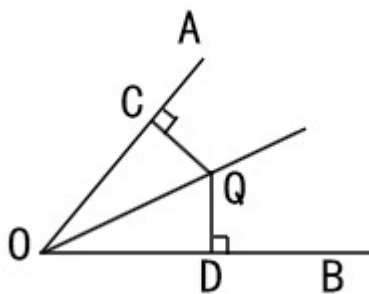
证明 如图 22-2-6, 作射线 OQ . 因为 $QD \perp OA, QE \perp OB$, 所以 $\angle QDO = \angle QEO = 90^\circ$. 又因为 $QD = QE, OQ$ 为公共边, 根据直角三角形全等的判定定理, 得 $\text{Rt}\triangle QDO \cong \text{Rt}\triangle QEO$. 由此推出 $\angle 1 = \angle 2$, 即 OQ 是 $\angle AOB$ 的平分线, 由此可见点 Q 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

【即学即练】

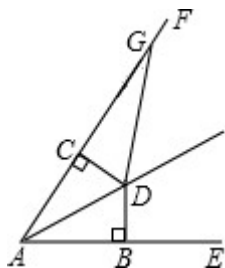
1. 如图, 已知 $\angle CDA = \angle CBA = 90^\circ$, 且 $CD = CB$, 则点 C 在_____的平分线上, 点 A 在_____的平分线上.



2. 如图, $\angle AOB = 50^\circ$, $QC \perp OA$ 于 C , $QD \perp OB$ 于 D , 若 $QC = QD$, 则 $\angle AOQ =$ _____ $^\circ$.



3. 如图, $BD \perp AE$ 于点 B , $DC \perp AF$ 于点 C , 且 $DB = DC$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ADG = 120^\circ$, 则 $\angle DGF =$ _____



知识点 3 三角形的内心

1.三角形的内心

例 如图 22-2-7,已知：在 $\triangle ABC$ 中， AO 、 BO 分别是 $\angle BAC$ 、 $\angle ABC$ 的平分线， $OD \perp BC$, $OE \perp AB$,垂足分别为 D 、 E .求证：点 O 在 $\angle C$ 的平分线上.

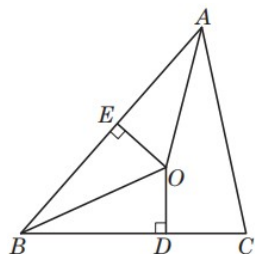


图 22-2-7

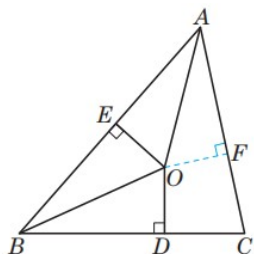


图 22-2-8

证明 如图 22-2-8,过点 O 作 $OF \perp AC$,垂足为 F .

$\because AO$ 是 $\angle BAC$ 的平分线， $OE \perp AB$, $OF \perp AC$,

$\therefore OE = OF$ (角平分线的性质定理).同理，可得 $OE = OD$.

$\therefore OD = OF$.

又 $\because OD \perp BC$, $OF \perp AC$,

$\therefore$ 点 O 在 $\angle C$ 的平分线上(在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上).

本题结论表明：三角形的三个内角的平分线相交于一点，这个交点叫作三角形的内心.

2.作垂直平分线与角平分线的交点

例 如图 22-2-11,已知 $\angle AOB$ 及其内部一点 C .

求作 $\angle AOB$ 内部一点 P ,使 $PC = PO$,且点 P 到直线 OA 、 OB 的距离相等.

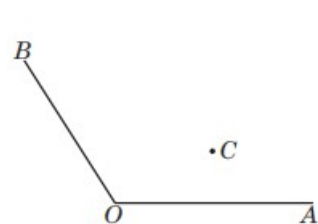


图 22-2-11

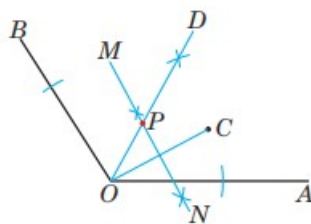


图 22-2-12

分析 假定点 P 已经作出，由 $PC = PO$,可知点 P 一定在线段 OC 的垂直平分线上.又由点 P 在 $\angle AOB$ 内部且到直线 OA 、 OB 的距离相等，可知点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上.因此， P 应是线段 OC 的垂直平分线与 $\angle AOB$ 的平分线的交点.

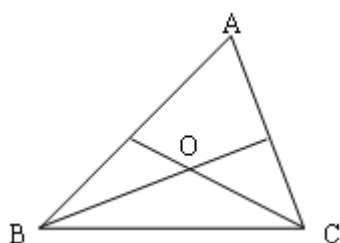
作法

- (1)连接 OC ,作线段 OC 的垂直平分线 MN ;
- (2)作 $\angle AOB$ 的平分线 OD , OD 与 MN 相交于点 P .

P 就是所求的点(图 22-2-12).

【即学即练】

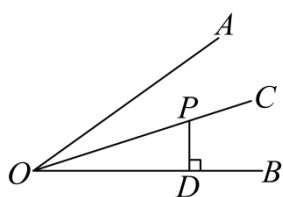
1. 已知 $\triangle ABC$ 的内心为 P , 则下列说法错误的是 ()
 - A. $PA = PB = PC$
 - B. P 在 $\triangle ABC$ 的内部
 - C. P 为 $\triangle ABC$ 三个内角平分线的交点
 - D. P 到三边距离相等
2. 三角形的三条角平分线的交点叫做三角形的内心. 如图, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, 若 $\angle A = 80^\circ$, 则 $\angle BOC =$ ____.



题型精讲

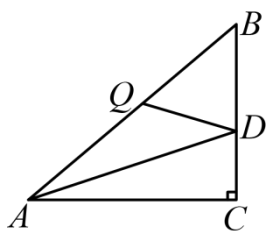
题型 01 角平分线的性质定理

【典例 1】 如图, OC 平分 $\angle AOB$, 点 P 在 OC 上, $PD \perp OB$, $PD = 4$, 则点 P 到 OA 的距离是 ()



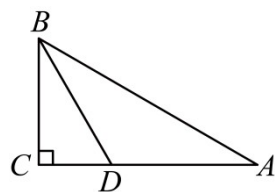
- A. 3
- B. 4
- C. 2
- D. 1

【变式 1】 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D , $CD = 2$, Q 为 AB 上一动点, 则 DQ 的最小值为 ()



- A . 2 B . $\sqrt{2}$ C . $\sqrt{3}$ D . 2.5

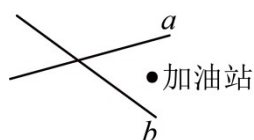
【变式2】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AD = 4$ ， $AD = 2CD$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，则点 D 到 AB 的距离为（ ）



- A . 2 B . 3 C . 4 D . 1.5

题型 02 角平分线性质的实际应用

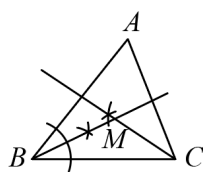
【典例1】 . 如图，一个加油站恰好位于两条公路 a ， b 所夹角的平分线上，若加油站到公路 a 的距离是80m，则它到公路 b 的距离是（ ）



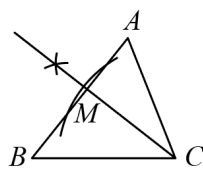
- A . 60m B . 70m C . 80m D . 90m

【变式1】 . 甲、乙、丙、丁四位同学解决以下问题，其中作图正确的是（ ）

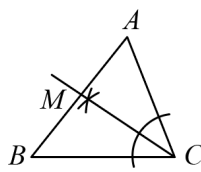
	问题：某旅游景区内有一块三角形绿地 ABC ，如图所示，先要在道路 AB 边上建一个休息点 M ，使它到 AC 和 BC 两边的距离相等，在图中确定休息点 M 的位置.
--	--



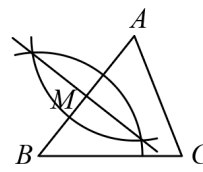
甲的作图



乙的作图



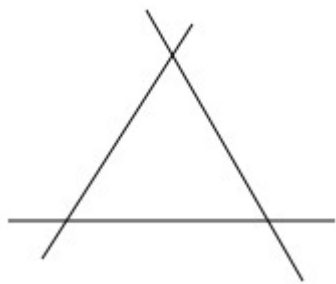
丙的作图



丁的作图

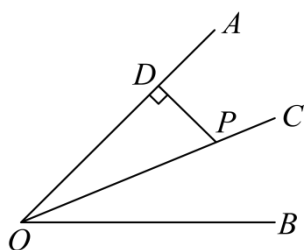
- A . 甲 B . 乙 C . 丙 D . 丁

【变式2】 . 如图，为了促进当地旅游发展、某地要在三条公路围成的一块平地上修建一个度假村。要使这个度假村到三条公路的距离相等，应在何处修建？



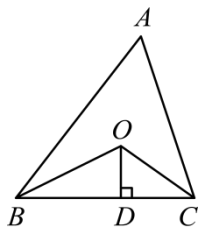
题型 03 角平分线性质定理的几何应用 I

【典例 1】 . 如图， OC 是 $\angle AOB$ 的平分线， $PD \perp OA$ 于点 D ，点 P 到 OB 的距离为 5， $OD = 12$ ， $\triangle OPD$ 的面积为 ()



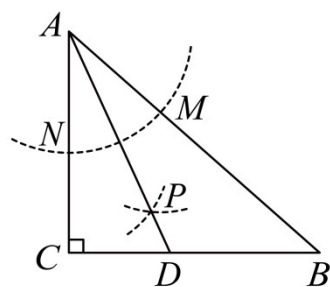
- A . 30 B . 60 C . 78 D . 39

【变式 1】 . 如图，已知 $\triangle ABC$ 的周长是 21， BO, CO 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ ， $OD \perp BC$ 于点 D ，且 $OD = 4$ ， $\triangle ABC$ 的面积是 ()



- A . 42 B . 21 C . 84 D . 28

【变式 2】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，以 A 为圆心，任意长为半径画弧分别交 AB 、 AC 于点 M 和 N ，再分别以 M 、 N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P ，连接 AP 并延长交 BC 于点 D 。若 $CD = 4$ ， $AB = 12$ ，则 $S_{\triangle ABD}$ 的值为 ()



A . 24

B . 36

C . 48

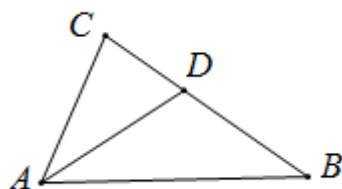
D . 60

题型 04 角平分线性质的几何应用II

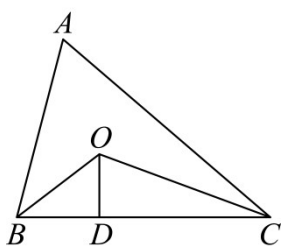
【典例 1】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ， $AB = 10\text{cm}$ ， $\triangle ABD$ 的面积为 20cm^2 ，则 CD 的长为_____cm .



【变式 1】 . 如图所示， $\triangle ABC$ 中， AD 是 $\angle CAB$ 的角平分线且 AD 把 $\triangle ABC$ 分成面积为 $3:7$ 的两部分 ($AC < AB$)， $AC = 5$ ，则 $AB =$ _____.



【变式 2】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BO ， CO 分别平分 $\angle ABC$ ， $\angle ACB$ ， $OD \perp BC$ 于点 D . 若 $OD = 3$ ， $\triangle ABC$ 的面积是 50 ，则 $\triangle ABC$ 的周长为 ()

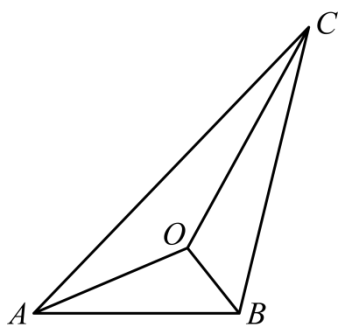

 A . $\frac{50}{3}$

B . 25

 C . $\frac{100}{3}$

D . 50

【变式3】 . 如图， $\triangle ABC$ 的三边 AB 、 BC 、 AC 的长分别为 10cm、15cm 和 20cm，三条角平分线的交点为 O ，则 $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COA} = (\quad)$



A . 2:3:4

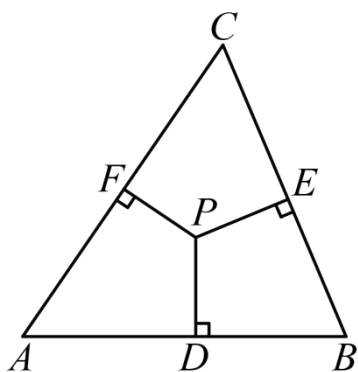
B . 3:4:5

C . 1:2:3

D . 5:12:13

题型 05 角平分线的判定定理

【典例1】 . 如图，点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点， $PD \perp AB$ 于点 D ， $PE \perp BC$ 于点 E ， $PF \perp AC$ 于点 F ， $PD = PE$ ，则 $(\quad)$



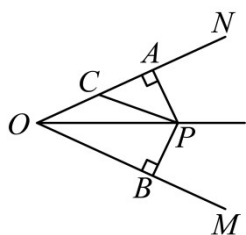
A . 点 P 在 $\angle A$ 的平分线上

B . 点 P 在 $\angle B$ 的平分线上

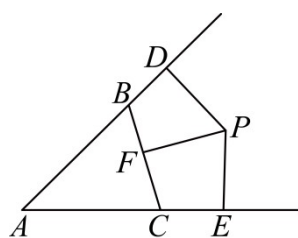
C . 点 P 在 $\angle C$ 的平分线上

D . 点 P 是 $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 平分线的交点

【变式1】 . 如图，已知 $PA \perp ON$ 于点 A ， $PB \perp OM$ 于点 B ，且 $PA = PB$ ， $\angle MON = 50^\circ$ ， $\angle OPC = 20^\circ$ ，则 $\angle PCA = \underline{\hspace{2cm}}$.



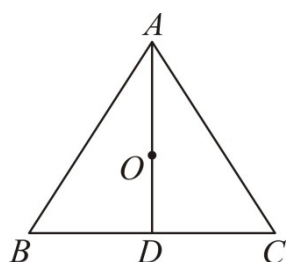
【变式2】 . 如图，已知点 P 在 $\triangle ABC$ 的外部、 $\angle DAE$ 的内部．若点 P 到 BC ， BD ， CE 的距离相等，则下列关于点 P 位置的说法最准确的是 $(\quad)$



- A. 点 P 在 $\angle DBC$ 的平分线上
 B. 点 P 在 $\angle BCE$ 的平分线上
 C. 点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线上
 D. P 是 $\angle DBC, \angle BCE, \angle BAC$ 的平分线的交点

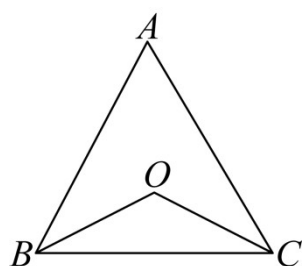
题型 06 三角形的内心及其应用

【典例 1】 . 已知：如图，点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，连接 AO 并延长交 BC 于点 D ，则下列命题中正确的 ()



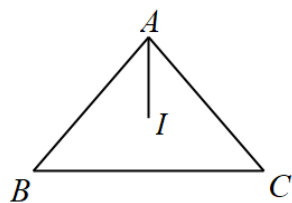
- A. AD 是 $\angle BAC$ 的平分线
 B. AD 是 BC 边上的高
 C. AD 是 BC 边上的中线
 D. AD 是 BC 边上的中垂线

【变式 1】 . 如图，点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，若 $\angle A = 40^\circ$ ，则 $\angle BOC$ 等于 ()

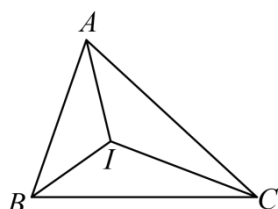


- A. 110°
 B. 115°
 C. 125°
 D. 130°

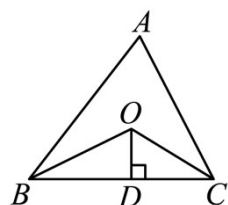
【变式 2】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 10, BC = 12, I$ 为三角形三条角平分线的交点，则 AI 的长为__



【变式3】. 如图，点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心. 若 $\angle IAB = 34^\circ$ ， $\angle IBC = 36^\circ$ ，则 $\angle ICA$ 的度数是_____°.



【变式4】. 如图，已知 $\triangle ABC$ 的周长是 20，点 O 为三角形内心，连接 OB 、 OC ， $OD \perp BC$ 于点 D ，且 $OD = 3$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积是 ()



A . 20

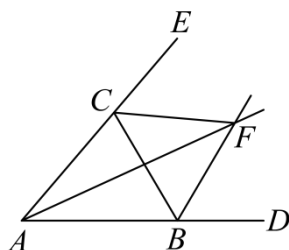
B . 25

C . 30

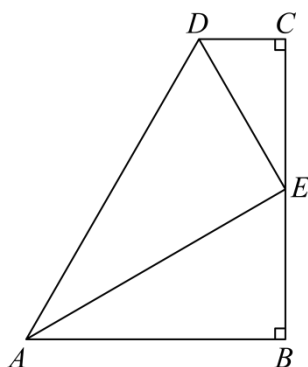
D . 35

题型 07 角平分线的判定与性质综合

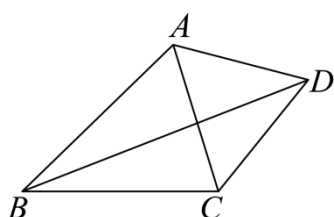
【变式1】. 如图， $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CBD$ 和 $\angle BCE$ 的平分线相交于点 F ，连接 AF . 若 $\angle BAC = 50^\circ$ ，则 $\angle BAF =$ _____.



【变式1】. 如图， $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ，点 E 是 BC 的中点， DE 平分 $\angle ADC$ ，若 $\angle ADC = 120^\circ$ ，连接 AE ，则 $\angle BAE =$ _____°.

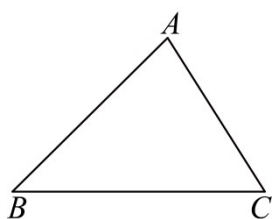


【变式 1】 . 如图，已知：四边形 $ABCD$ 中，对角线 BD 平分 $\angle ABC$ ， $\angle ACB = 70^\circ$ ， $\angle ABC = 48^\circ$ ，并且 $\angle BAD + \angle CAD = 180^\circ$ ，那么 $\angle BDC$ 的度数为_____.

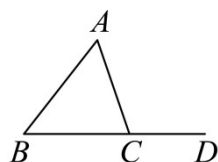


题型 08 尺规作图

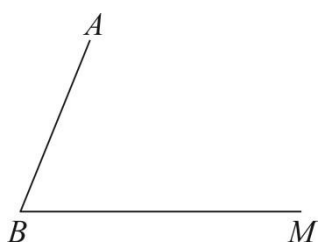
【典例 1】 . 如图，已知 $\triangle ABC$ ，利用尺规作图法在 AB 边上求作一点 D ，使得 $\angle ACB = 2\angle ACD$. (不写作法，保留作图痕迹)



【变式 1】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A + \angle B = \alpha$ ，延长 BC 到点 D . 请利用尺规作图法在 $\angle ACD$ 内部作射线 CM ，使得 $\angle ACM = \frac{\alpha}{2}$. (保留作图痕迹，不写作法)



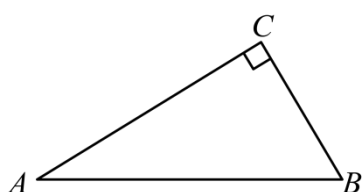
【变式 2】 . 已知：如图，线段 AB 和射线 BM 交于点 B . 利用尺规完成以下作图，并保留作图痕迹 (不写作法) .



- (1) 作出线段 AB 的垂直平分线 HN ;
 (2) 作 $\angle ABM$ 的角平分线 BC 交 HN 于点 D .

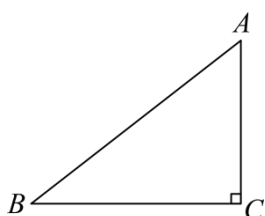
题型 09 尺规作图的应用

【典例 1】 . 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$.



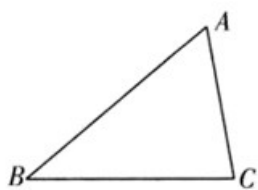
- (1) 用尺规作 $\angle ABC$ 的平分线 BD , 交 AC 于点 D . (保留作图痕迹, 不写作法)
 (2) 若 $\angle ABC = 60^\circ$, 求证: $AD = BD$.

【变式 1】 . 如图, 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$,



- (1) 请用尺规作图法在 AC 边上求作一点 P , 使得点 P 到边 AB , BC 的距离相等, (保留作图痕迹, 不写作法)
 (2) 若 $CP = 1$, $AB = 3$, 求 $\triangle ABP$ 的面积 .

【变式 2】 . 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 2\angle B$.

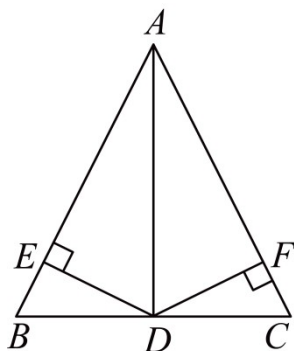


- (1) 利用尺规作 $\angle BAC$ 的平分线 AD , 交 BC 于点 D , 并在图中标明相应字母. (保留作图痕迹, 不写作法)

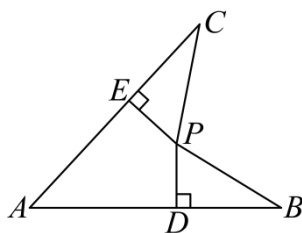
(2) 延长 AC 到点 E (不要求尺规作图), 使 $CE = CD$, 猜想线段 AB 与 AE 的关系, 并说明理由.

题型 10 角平分线的有关解答证明题

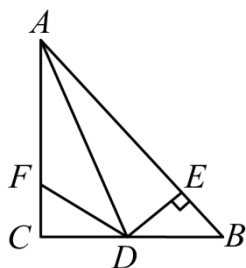
【典例 1】 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于点 F , 且 $\angle BDE = \angle CDF$, 求证: AD 平分 $\angle BAC$.



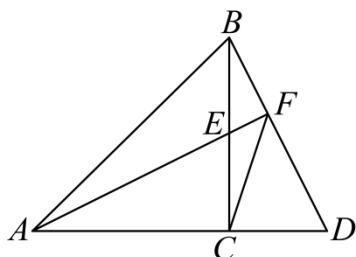
【变式 1】 如图, $AB = AC$, $PB = PC$, $PD \perp AB$, $PE \perp AC$, 垂足分别是 D, E , 求证: $PD = PE$.



【变式 2】 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, D, F 分别为 BC, AC 上的点, 连接 AD, DF , 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , $\angle B + \angle AFD = 180^\circ$, $BD = DF$. 求证: AD 平分 $\angle BAC$.



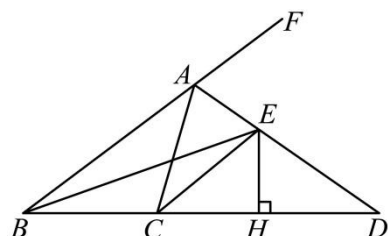
【变式 3】 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $CA = CB$, 点 E 在边 BC 上, 且 $CE = CD$, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, AE 的延长线交 BD 于点 F , 连接 CF .



(1) 求证： $AE = BD$ ；

(2) 求证： CF 平分 $\angle AFD$ 。

【变式 4】 如图，点 D 在边 BC 的延长线上， $\angle ACE = 28^\circ$ ， $\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 E ，过点 E 作 $EH \perp BD$ 于点 H ，且 $\angle CEH = 62^\circ$ 。



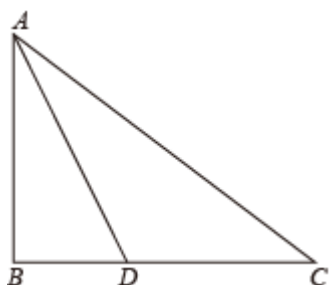
(1) 证明： AE 平分 $\angle CAF$ ；

(2) 若 $AB = 8$ ， $CD = 10$ ， $AC = 6$ ，且 $S_{\triangle ABE} = 16$ ，求 $\triangle ACD$ 的面积。

强化训练

一、单选题

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线。若 $BD = 4$ ，则点 D 到 AC 的距离为 ()



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

2. 点 P 在 $\angle AOB$ 的角平分线上，点 P 到 OA 边的距离等于 5，点 Q 是 OB 边上的任意一点，则下列选项正确的是 ()

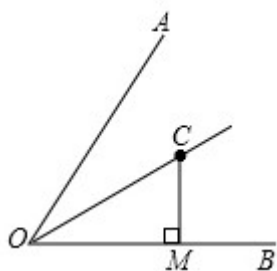
A. $PQ > 5$

B. $PO = 5$

C. $PQ < 5$

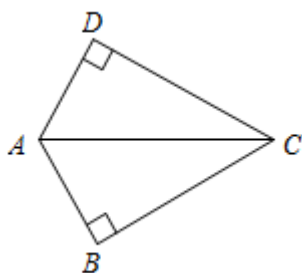
D. $PO \leq 5$

3. 如图， OC 为 $\angle AOB$ 的平分线， $CM \perp OB$ ， $\triangle COM$ 的面积为 9， $OM = 6$ ，则点 C 到射线 OA 的距离为 ()



- A . 9 B . 6 C . 3 D . 4.5

4 . 如图 , $AD \perp DC, AB \perp BC$, 若 $AB = AD, \angle DAB = 120^\circ$, 则 $\angle ACB$ 的度数为 ()



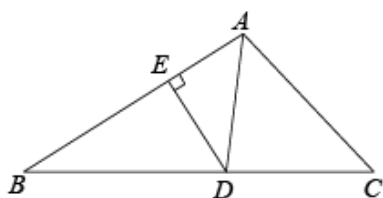
- A . 60° B . 45° C . 30° D . 75°

5 . 下列说法正确的有 ()

- ①角平分线上任意一点到角两边的距离相等
- ②到一个角两边的距离相等的点在这个角的平分线上
- ③三角形三个角平分线的交点到三个顶点的距离相等
- ④三角形三条角平分线的交点到三边的距离相等

- A . 1 个 B . 2 个 C . 3 个 D . 4 个

6 . 如图 , 在 $\triangle ABC$ 中 , AD 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$ 于 E , $S_{\triangle ABC} = 15$, $DE = 3$, $AB = 6$, 则 AC 长是 ()



- A . 4 B . 5 C . 6 D . 7

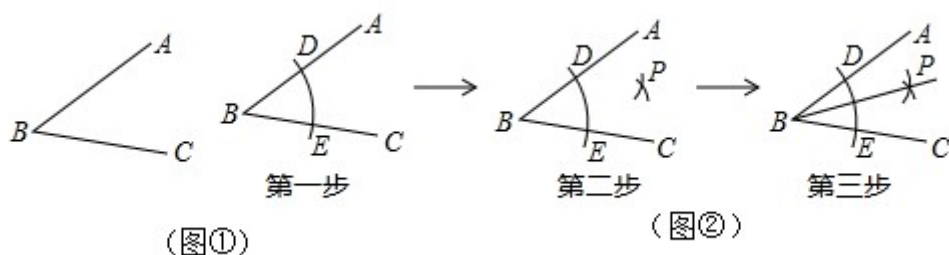
7 . 如图① , 已知 $\angle ABC$, 用尺规作它的角平分线 .

如图② , 步骤如下 :

第一步：以 B 为圆心，以 a 为半径画弧，分别交射线 BA ， BC 于点 D ， E ；

第二步：分别以 D ， E 为圆心，以 b 为半径画弧，两弧在 $\angle ABC$ 内部交于点 P ；

第三步：画射线 BP ，射线 BP 即为所求。



下列叙述不正确的是 ()

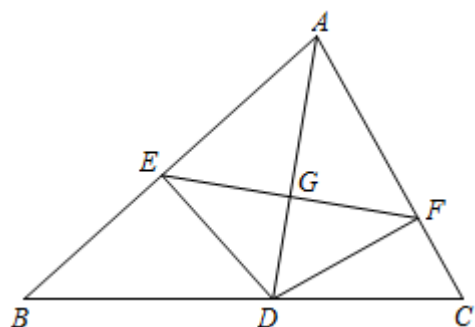
A. $a > 0$

B. 作图的原理是构造 SSS 三角形全等

C. 由第二步可知， $DP = EP$

D. $b < \frac{1}{2}DE$ 的长

8. 如图， AD 平分 $\angle BAC$ ， $DE \perp AB$ 于点 E ， $DF \perp AC$ 于点 F ，则下列结论不正确的是 ()



A. $\triangle AEG \cong \triangle AFG$

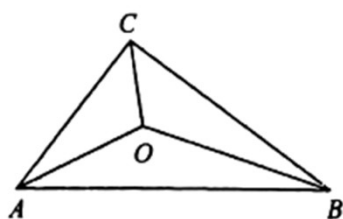
B. $\triangle AED \cong \triangle AFD$

C. $\triangle DEG \cong \triangle DFG$

D. $\triangle BDE \cong \triangle CDF$

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 4$ ， $AC = 3$ ，点 O 是三条角平分线的交点，若 $\triangle ACO$ 的面积是 $\frac{3}{2}$ ，

则 $\triangle BOC$ 的 BC 边上的高是 ()



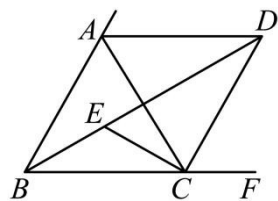
A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BE ， CE ， CD 分别平分 $\angle ABC$ ， $\angle ACB$ ， $\angle ACF$ ， $AB \parallel CD$ ，下列结论：① $\angle BDC = \angle BAC$ ；② $\angle BEC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABD$ ；③ $\angle CAB = \angle CBA$ ；④ $\angle ADB + \angle ABC = 90^\circ$ ，其中正确的有 ()



A. 1个

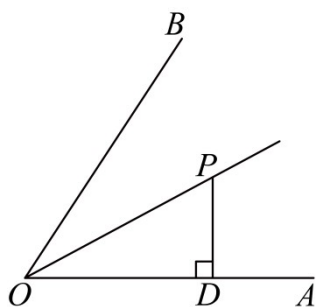
B. 2个

C. 3个

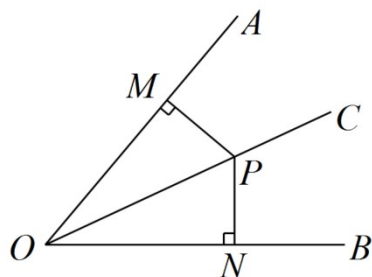
D. 4个

二、填空题

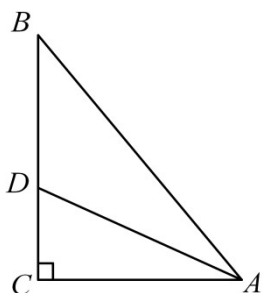
11. 如图， OP 平分 $\angle AOB$ ， $PD \perp OA$ 于点 D ，点 E 是射线 OB 上的一个动点，若 $PD = 3$ ，则 PE 的最小值是_____。



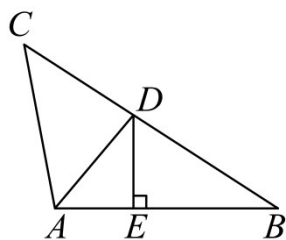
12. 如图， $PM \perp OA$ ， $PN \perp OB$ ， $\angle BOC = 30^\circ$ ， $PM = PN$ ，则 $\angle AOB =$ _____。



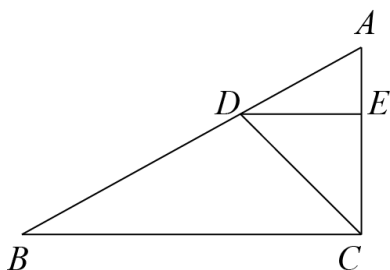
13. 如图， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ，已知 $BC = 10$ ， $BD = 6$ ，则点 D 到 AB 的距离为_____。



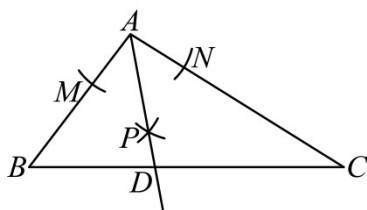
14. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \perp AB$ 于点 E ， $\triangle ADC$ 的面积是 12， $DE = 4$ ，则 AC 的长是_____.



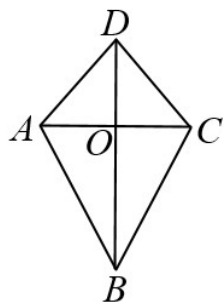
15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， CD 是它的角平分线， $DE \perp AC$ 于点 E 。若 $BC = 12\text{cm}$ ， $DE = 4\text{cm}$ ，则 $\triangle BCD$ 的面积为_____ cm^2 。



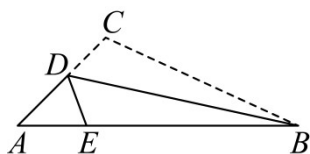
16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，按以下步骤作图：①以点 A 为圆心，适当长为半径作弧，分别交 AB ， AC 于点 M ， N ；②分别以点 M ， N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧，两弧交于点 P ；③作射线 AP 交 BC 于点 D 。若 $AB:AC = 2:3$ ， $\triangle ABD$ 的面积为 8，则 $\triangle ACD$ 的面积为_____。



17. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD = CD$ ， $AB = CB$ 。下列结论：① BD 垂直平分 AC ；② BD 平分 $\angle ADC$ ；③ $AB \parallel CD$ ；④ $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ 。其中所有正确结论的序号是_____。

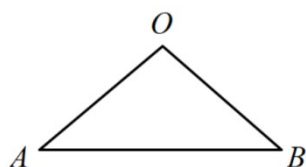


18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 15$ ， $BC = 12$ ，沿过点 B 的直线折叠这个三角形，使点 C 落在 AB 边上的点 E 处，折痕为 BD ，若 $\angle C = 2\angle BDE$ ，则 DE 的长为_____。



三、解答题

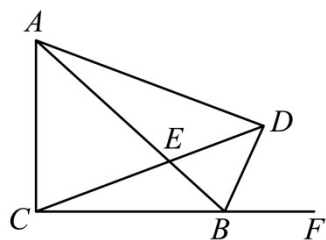
19. 如图， $\triangle AOB$ 中， $AO = BO$.



(1) 尺规作图：作 $\angle AOB$ 的平分线，交 AB 于点 C . (保留作图痕迹)

(2) 求证： $OC \perp AB$.

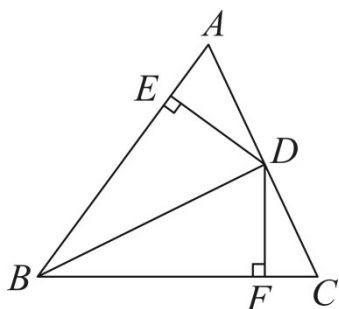
20. 如图，已知等腰 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 4$, D 为 $\triangle ABC$ 的一个外角 $\angle ABF$ 的平分线上一点，且 $\angle ADC = 45^\circ$, CD 交 AB 于 E ,



(1) 求证： $AD = CD$;

(2) 求 AE 的长 .

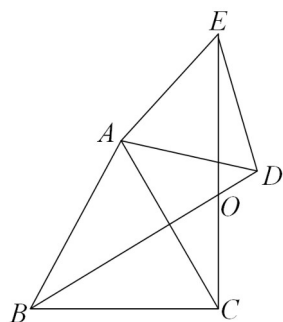
21. 如图， BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \perp AB$, $DF \perp BC$, 垂足分别为 E , F .



(1) 求证： $DE = DF$;

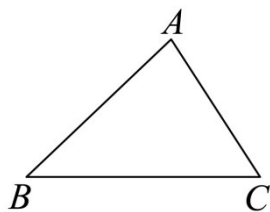
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 70 , $AB = 16$, $DE = 5$, 求 BC 的长 .

22. 已知：如图，等边 $\triangle ABC$ 和等边 $\triangle ADE$, 连接 BD 、 CE 交于点 O .



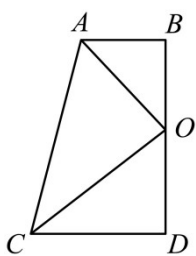
- (1) 求证： $BD = CE$ ；
- (2) 连接 AO ，猜想线段 AO 、 BO 、 CO 的数量关系，并证明。

23. 尺规作图是理论上接近完美的作图方式，乐乐很喜欢用尺规画出要求的图形。在下面的 $\triangle ABC$ 中，请你也按要求用尺规作出下列图形（不写作法，但要保留作图痕迹）并填空。



- (1) 作出 $\angle BAC$ 的角平分线交 BC 边于点 D ；
- (2) 作出 AC 边上的垂直平分线 l 交 AD 于点 G ；
- (3) 连接 GC ，若 $\angle B = 55^\circ$ ， $\angle BCA = 60^\circ$ ，则 $\angle AGC$ 的度数——。

24. 如图，已知 $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ，点 O 为 BD 的中点，且 OA 平分 $\angle BAC$ 。求证：



- (1) OC 平分 $\angle ACD$ ；
- (2) $OA \perp OC$ ；
- (3) $AB + CD = AC$

25. 如图， $\triangle ABC$ 的 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的外角平分线相交于点 G 。

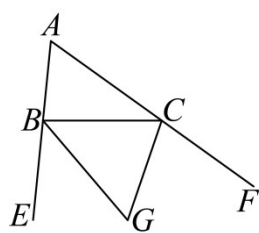


图1

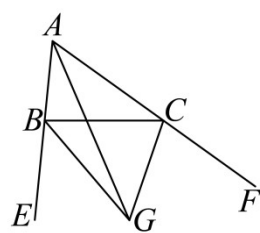


图2

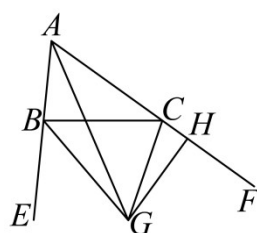


图3

- (1) 若 $\angle BAC = 60^\circ$ ，求 $\angle BGC$ 的度数；
- (2) 如图 2，连接 AG ，求证： AG 平分 $\angle BAC$ ；
- (3) 如图 3，在 (2) 的条件下，在 AC 上取点 H ，使得 $\angle AGH = \angle BGC$ ，若 $\triangle ABC$ 的周长等于 16，求 AH 的长度。