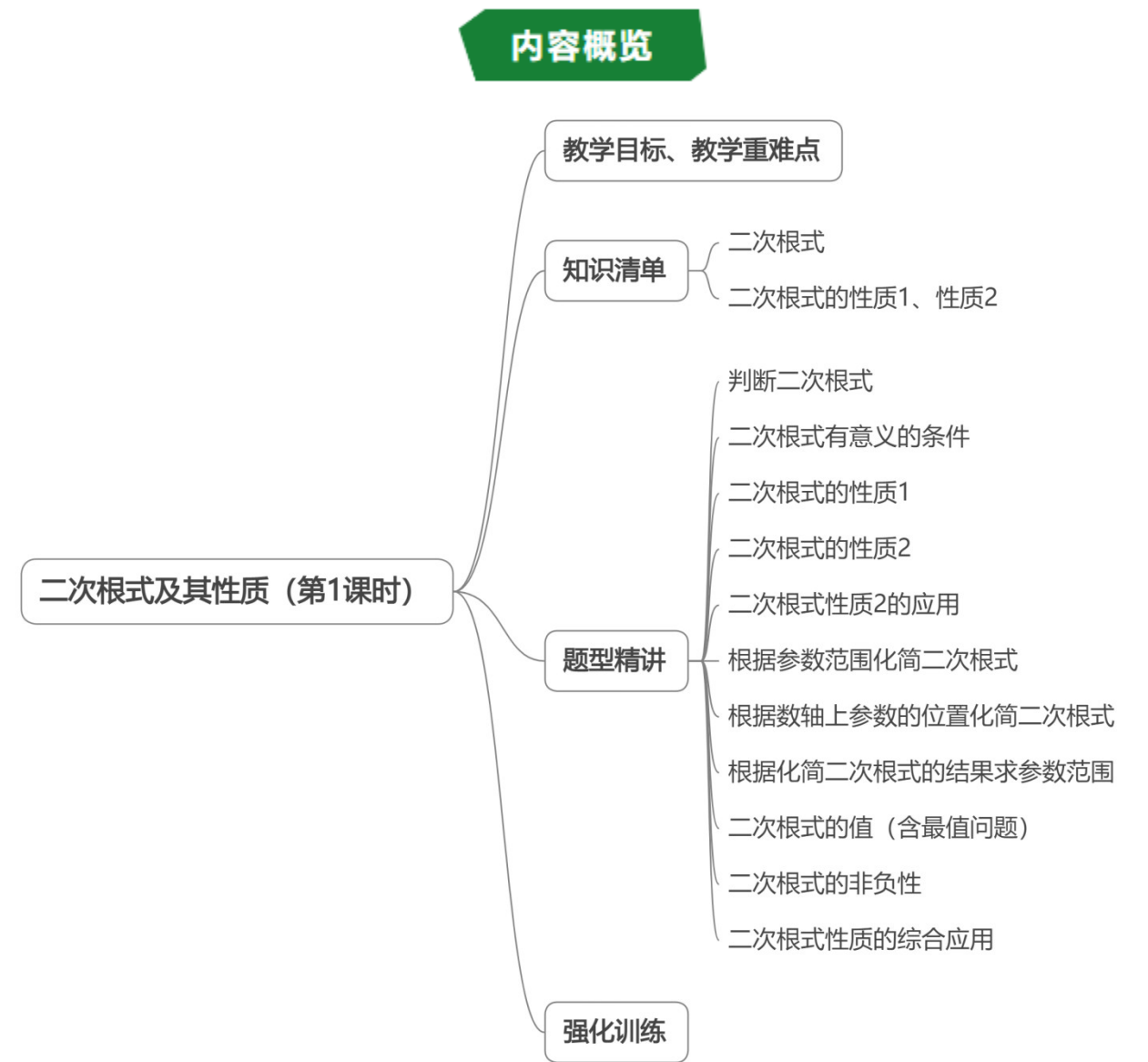


专题 20.1 二次根式及其性质（第 1 课时）



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 由算术平方根引出二次根式的概念； 2. 知道二次根式有意义的条件； 3. 了解二次根式的双重非负性； 4. 掌握二次根式的性质 1 和性质 2；根据二次根式的性质化简二次根式。
教学重难点	1.重点 (1) 根据二次根式有意义的条件求参数范围；

	(2) 二次根式非负性的应用； (3) 二次根式性质化简二次根式的应用。 2. 难点 (1) 二次根式性质 2 中，对 a 的理解，整体思想； (2) 二次根式与其他数学模块结合，如数轴，乘法公式，几何图形的性质等。
--	--

知识清单

知识点 1 二次根式

1. 复习引入：在“实数”一章，我们学习了开平方运算，知道了当 $a \geq 0$ 时， $\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根。

2. 二次根式

① 二次根式：形如 $\sqrt{a}$ 的代数式（其中 a 为有理式），叫作二次根式。例如， $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 、 $\sqrt{a^2+1}$ 、

$\sqrt{b^2-4ac}$ ($b^2-4ac \geq 0$)、 $\sqrt{\frac{1}{x-2}}$ ($x > 2$) 等，都是二次根式。

② 二次根式有意义的条件：在实数范围内，负数没有平方根，所以如 $\sqrt{-3}$ 、 $\sqrt{b}$ ($b < 0$) 这样的式子没有意义， $\sqrt{a}$ 有意义的条件是代数式 a 的值不小于 0，即 $a \geq 0$ 。

易知 $\sqrt{a} \geq 0$ ，所以二次根式具有“双重非负性”。它与前面学的算术平方根的“双重非负性”是一致的。

*说明： $\sqrt{b^2-4ac}$ ($b^2-4ac \geq 0$)、 $\sqrt{\frac{1}{x-2}}$ ($x > 2$) 教材是没有附加括号条件的，但是教材有说明：无特别说明，本章出现的二次根式都有意义。

【即学即练】

1. 下列代数式 $\sqrt{\frac{x}{2}}$ ($x > 0$)， $\sqrt{2}$ ， 33 ， $\sqrt{x^2+1}$ ， $\sqrt{-3x}$ ($x > 0$) 中，二次根式有 ()

- A. 5 个 B. 4 个 C. 3 个 D. 2 个

2. 写出使下列式子有意义的 x 的取值范围。

(1) $\sqrt{1+3x}$ ；

(2) $\sqrt{\frac{1}{3}(x-2)}$ ；

(3) $\sqrt{x^2 + 7}$;

(4) $\sqrt{\frac{1}{x-2}}$.

3. 若二次根式 $\frac{\sqrt{x-2024}}{x}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 ()

A. $x > 2024$

B. $x \geq 2024$

C. $x < 2024$

D. $x \leq 2024$

4. 已知 $\sqrt{13-x}$ 是整数, 则自然数 x 的所有取值为_____.

知识点2 二次根式的性质1、性质2

1. **性质1**: $(\sqrt{a})^2 = a$ ($a \geq 0$) (任何一个非负数都可以写成一个数的平方的形式) .

2. **性质2**:

问题: $\sqrt{a^2}$ 与 a 一定相等吗? 为什么?

分析: $\sqrt{a^2}$ 是 a^2 的算术平方根, 是一个非负数, 而 a 可能为负数, 所以 $\sqrt{a^2}$ 与 a 不一定相等, 如

$\sqrt{(-1)^2} \neq -1$. 当 $a > 0$ 时, a^2 的算术平方根为 a ;

当 $a=0$ 时, a^2 的算术平方根为 0 ;

当 $a < 0$ 时, a^2 的算术平方根为 $-a$.

这是二次根式的又一性质。

总结:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

【即学即练】

1. 计算: $\sqrt{(-3)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$, $(\sqrt{2})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 计算: $\sqrt{(-10)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\sqrt{5^2 + 12^2} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\sqrt{(3-\pi)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 计算:

(1) $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2$;

(2) $(-2\sqrt{5})^2$;

(3) $(\sqrt{a^2 + 5})^2$;

$$(4) (\sqrt{a+b})^2 + (\sqrt{a-b})^2 (a-b \neq 0).$$

4. 计算：

$$(1) \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2};$$

$$(2) -\sqrt{144};$$

$$(3) \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2};$$

$$(4) \sqrt{a^4} (a < 0);$$

$$(5) \sqrt{(x-5)^2} (x < 5).$$

题型精讲

题型 01 判断二次根式

【典例 1】. 下列式子中，是二次根式的是 ()

A. $\sqrt{-1}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt[3]{6}$ D. $\sqrt{\pi-4}$

【变式 1】. 下列各式一定是二次根式的是 ()

A. $\sqrt{a}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{x+5}$ D. $\sqrt{-3}$

【变式 2】. 下列式子中，不属于二次根式的是 ()

A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{a^2+1}$ C. $\sqrt{3-\pi}$ D. $\sqrt{\frac{5}{6}}$

【变式 3】. 下列式子一定是二次根式的是 ()

A. $\sqrt{-x-2}$ B. $\sqrt{x}$ C. $\sqrt{x^2+2}$ D. $\sqrt{x^2-2}$

题型 02 二次根式有意义的条件

【典例 1】. 若二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义，则 x 的值范围为 ()

A. $x > 2$ B. $x \neq 2$ C. $x \geq 2$ D. $x \leq 0$

【变式1】. 使二次根式 $\sqrt{3x-1}$ 有意义的实数 x 的取值范围是_____.

【变式2】. 如果式子 $\frac{1}{\sqrt{4-3x}}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【变式3】. 使代数式 $\frac{\sqrt{2x+4}}{|x|-2}$ 有意义的 x 的取值范围是 ()

- A. $x \geq 2$ B. $x \leq -2$ C. $x > -2$ 且 $x \neq 2$ D. 一切实数

题型 03 二次根式的性质 1

【典例1】. 计算 $(\sqrt{5})^2$ 的结果是 ()

- A. $\pm\sqrt{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. ± 5 D. 5

【变式1】. 计算： $(\sqrt{2021})^2 =$ _____.

【变式2】. 计算 $(-3\sqrt{2})^2$ 的结果为_____.

【变式3】. 计算： $(-\sqrt{2025})^2 =$ _____.

题型 04 二次根式的性质 2

【典例1】. 化简： $\sqrt{2024^2} =$ _____.

【变式1】. 计算： $\sqrt{(-3)^2} =$ _____.

【变式2】. 计算 $\sqrt{(-\sqrt{2})^2} =$ ()

- A. $-\sqrt{2}$ B. 2 C. -2 D. $\sqrt{2}$

【变式3】. 下列各式化简错误的是 ()

- A. $(\sqrt{3})^2 = 3$ B. $\sqrt{3^2} = 3$ C. $\sqrt{(-3)^2} = 3$ D. $\sqrt{(\sqrt{3})^2} = -3$

【变式4】. 若二次根式 $\sqrt{x^2}$ 的值为9, 则 x 的值为_____.

题型 05 二次根式性质 2 的应用

【典例1】. 化简： $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} =$ _____.

【变式1】化简 $\sqrt{(4-\pi)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【变式2】化简： $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

题型 06 根据参数范围化简二次根式

【典例1】当 $a > 0$ 时， $\sqrt{(-a)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

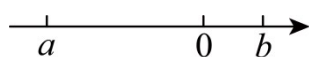
【变式1】已知 $a < 3$ ，化简 $\sqrt{(3-a)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【变式2】当 $1 < a < 2$ 时，代数式 $\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-1)^2}$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【变式3】若 $1 < x < 5$ ，则化简 $\sqrt{(x-5)^2} + |x-1|$ 的结果是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

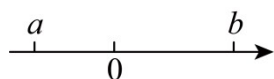
题型 07 根据数轴上参数的位置化简二次根式

【典例1】实数 a 、 b 在数轴上的位置如图所示， $\sqrt{(a+b)^2} - \sqrt{a^2}$ 化简的结果是 ()



- A . b B . $-b$ C . $-2a-b$ D . $2a+b$

【变式1】实数 a 、 b 在数轴上的位置如图所示，则化简 $\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} - \sqrt{(a-b)^2}$ 的结果为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



题型 08 根据化简二次根式的结果求参数范围

【典例1】若 $\sqrt{(1-x)^2} = x-1$ ，则 x 的取值范围为 ()

- A . $x > 1$ B . $x < 1$ C . $x \geq 1$ D . $x \leq 1$

【变式1】已知， $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2}$ 那么 a 应满足什么条件 ()

- A . $a > 0$ B . $a \geq 0$ C . $a = 0$ D . a 任何实数

【变式2】若 $\sqrt{(a-4)^2} = 4-a$ ，则 a 的取值范围是 ()

- A . $a < 4$ B . $a \leq 4$ C . $a > 4$ D . $a \geq 4$

【变式3】(1) 若 $\sqrt{(a+1)^2} = a+1$ ，则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 若 $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2 - a$ ，则 a 的取值范围是_____。

题型 09 二次根式的值 (含最值问题)

【典例 1】 . . 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， $\sqrt{2x+1}$ 的值为 3。

【变式 1】 . 若 $\sqrt{7-x}$ 为整数，则 x 的值可以是_____。(写出一个即可)

【变式 2】 . 已知 n 是正整数， $\sqrt{28n}$ 是整数，则 n 的最小值是_____。

题型 10 二次根式的非负性

【典例 1】 . . 若 $b = \sqrt{a-6} + \sqrt{6-a} + 8$ ，则 $\sqrt{ab} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【变式 1】 . 已知 $\sqrt{a-1} + b^2 - 4b + 4 = 0$ ，则 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【变式 2】 . 已知 $y = \sqrt{8-x} + \sqrt{x-8} + 2$ 。

(1) 求代数式 $\sqrt{xy}$ 的值_____。

(2) 求代数式 $\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2} \cdot \sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}$ 的值_____。

题型 11 二次根式性质的综合应用

【典例 1】 . . 已知 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，化简 $\sqrt{(a-c+b)^2} - |b-a-c| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【变式 1】 . (1) 先计算： $\sqrt{3^2} = \underline{\hspace{1cm}}$ ； $\sqrt{0.5^2} = \underline{\hspace{1cm}}$ ； $\sqrt{(-6)^2} = \underline{\hspace{1cm}}$ ； $\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \underline{\hspace{1cm}}$ ； $\sqrt{0^2} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。根据计算结果后面问题。

题。

(2) $\sqrt{a^2}$ 一定等于 a 吗？如果不是，那么 $\sqrt{a^2} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(3) 利用你总结的规律完成下列问题：

① 若 $x < 2$ ，则 $\sqrt{(x-2)^2} = \underline{\hspace{1cm}}$ ；

② $\sqrt{(3.14-\pi)^2} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(4) 若 a 、 b 、 c 为三角形的三边长，化简： $\sqrt{(a+b-c)^2} + \sqrt{(b-c-a)^2} + \sqrt{(c+a-b)^2}$ 。

【变式 2】 . 阅读材料：

小明在学习了二次根式后，发现一些含有根号的式子可以写成另一个式子的平方，如 $3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$ ，

这样就可以将 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 进行化简，

$$\text{即：} \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1+\sqrt{2}.$$

善于思考的小明进行了以下探索：

对于 $a+2\sqrt{b}$ ，若能找到两个数 m 和 n ，使 $m^2+n^2=a$ 且 $mn=\sqrt{b}$ ，则 $a+2\sqrt{b}$ 可变形为 m^2+n^2+2mn ，即

$(m+n)^2$ ，从而使得 $\sqrt{a+2\sqrt{b}} = \sqrt{(m+n)^2} = m+n$ 。（其中 a, b, m, n 均为正数）

例如： $\because 4+2\sqrt{3}=1+3+2\sqrt{3}=(\sqrt{1})^2+(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^2$ ，

$$\therefore \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}.$$

请你参考小明的方法探索并解决下列问题：

(1)化简： $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ ；

(2)化简： $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ ；

(3)若 $\sqrt{a^2+4\sqrt{5}}=b+\sqrt{5}$ ，其中 a, b 都是整数，直接写出 a 的值。

强化训练

一、单选题

1. 下列代数式中，不一定是二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$

C. $\sqrt{x^2}$

D. $\sqrt{\frac{2}{x}}$

2. 下列计算正确的是（ ）

A. $(-\sqrt{8})^2=64$

B. $\sqrt{(-25)^2}=\pm 25$

C. $\sqrt{9\frac{1}{16}}=3\frac{1}{4}$

D. $-\sqrt{(-8)^2}=-8$

3. 若代数式 $\frac{\sqrt{x+3}}{5-x}$ 有意义，则 x 的取值范围是（ ）

A. $x > -3$

B. $x \geq -3$

C. $x > -3$ 且 $x \neq 5$

D. $x \geq -3$ 且 $x \neq 5$

4. 如果 a 是任意实数，下列各式中一定有意义的是（ ）

A. $\sqrt{a}$

B. $\sqrt{\frac{1}{a}}$

C. $\sqrt{a^2}$

D. $\sqrt{-a}$

5. 如果 $\frac{\sqrt{a^2}}{a} = 1$ ，那么 a 是 () .

- A . 非负数 B . 0 C . 正实数 D . 负实数

6. 化简 $\sqrt{(3-\pi)^2} + \sqrt{(\pi-4)^2}$ 的结果是 ()

- A . 1 B . -1 C . 7 D . -7

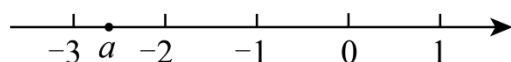
7. 要使 $\sqrt{(x-2)^2} = (\sqrt{x-2})^2$ ， x 的取值范围是 ()

- A . $x > 2$ B . $x \geq 2$ C . $x < 2$ D . $x \leq 2$

8. 已知 $y = \sqrt{3-x} + \sqrt{x-3} + 2$ ，那么 y^x 的值是 ()

- A . -9 B . -8 C . 8 D . 9

9. 实数 a 在数轴上的位置如图所示，则化简 $\sqrt{a^2 + 4a + 4} - \sqrt{(a-5)^2}$ 结果为 ()



- A . 7 B . -7 C . $-2a+7$ D . $2a-7$

10. 若 $x-4 \geq 3x+4$ ，则化简 $\sqrt{x^2-2x+1} - \sqrt{x^2+6x+9}$ 的结果是 ()

- A . -4 B . 4 C . -6 D . 6

二、填空题

11. 计算 $\sqrt{(-5)^2}$ 的结果是_____.

12. 当 $x = -6$ 时， $\sqrt{6-3x}$ 的值是_____.

13. 代数式 $\frac{\sqrt{x-5}}{x-6}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

14. 化简： $\sqrt{(6-2\pi)^2} =$ _____.

15. 化简 $(\sqrt{-x})^2 + \sqrt{x^2} =$ _____.

16. 如果有： $\sqrt{x-2} + |y+1| = 0$ ，则 $x+y =$ _____.

17. 若 $\sqrt{(2a-3)^2} = 3-2a$ ，则 a 的取值范围是_____.

18. 已知 x, y 为实数， $y = \sqrt{x^2-9} + \sqrt{9-x^2} + 4$ ，则 $x-y =$ _____.

三、解答题

19. 下列式子哪些是二次根式？哪些不是二次根式？

$$\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{-5}, \sqrt{\frac{a}{3}} (a \geq 0), \sqrt{x+y} (x \geq 0, y \geq 0), \sqrt{x^2+4x+4}.$$

20. 求使下列各式有意义的 x 的取值范围：

(1) $\sqrt{5-2x}$;

(2) $\sqrt{x^2+5}$;

(3) $\sqrt{-(x-1)^2}$;

(4) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$;

(5) $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$;

(6) $\frac{\sqrt{1-x}}{x}$.

21. 化简：

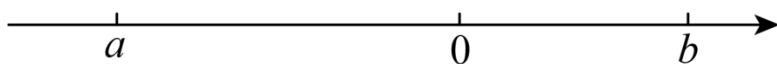
(1) $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$;

(2) $\sqrt{\frac{x^2}{9}} (x \geq 0)$;

(3) $\sqrt{(1-b)^2} (b \geq 1)$;

(4) $\sqrt{(3.14-\pi)^2}$.

22. 已知 a 、 b 两数在数轴上的对应位置如图所示，化简 $\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{a^2}$.



23. 先化简，再求值： $a + \sqrt{1-2a+a^2}$ ，其中 $a = 1007$. 如图是小亮和小芳的解答过程 .



解：原式 $= a + \sqrt{(1-a)^2}$
 $= a + 1 - a$
 $= 1.$

解：原式 $= a + \sqrt{(1-a)^2}$
 $= a + a - 1$
 $= 2013.$



(1) _____ 的解答过程是错误的 (填“小亮”或“小芳”) ;

(2)错误的解答过程原因在于未能正确地运用二次根式的性质：_____ (请用符号语言表达) ；

(3)先化简，再求值： $m + 2\sqrt{m^2 - 6m + 9}$ ，其中 $m = -2024$ ．

24．已知 $\triangle ABC$ 三条边的长度分别是 $\sqrt{x+1}$ ， $\sqrt{(5-x)^2}$ ， $4 - (\sqrt{4-x})^2$ ，记 $\triangle ABC$ 的周长为 $C_{\triangle ABC}$ ．

(1)当 $x = 2$ 时， $\triangle ABC$ 的周长 $C_{\triangle ABC} =$ _____ (请直接写出答案) ．

(2)请用含 x 的代数式表示 $\triangle ABC$ 的周长 $C_{\triangle ABC}$ (结果要求化简)，并求出 x 的取值范围．如果一个三角形的

三边长分别为 a ， b ， c ，三角形的面积为 S ，则 $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}$ ．

若 x 为整数，当 $C_{\triangle ABC}$ 取得最大值时，请用秦九韶公式求出 $\triangle ABC$ 的面积 ．