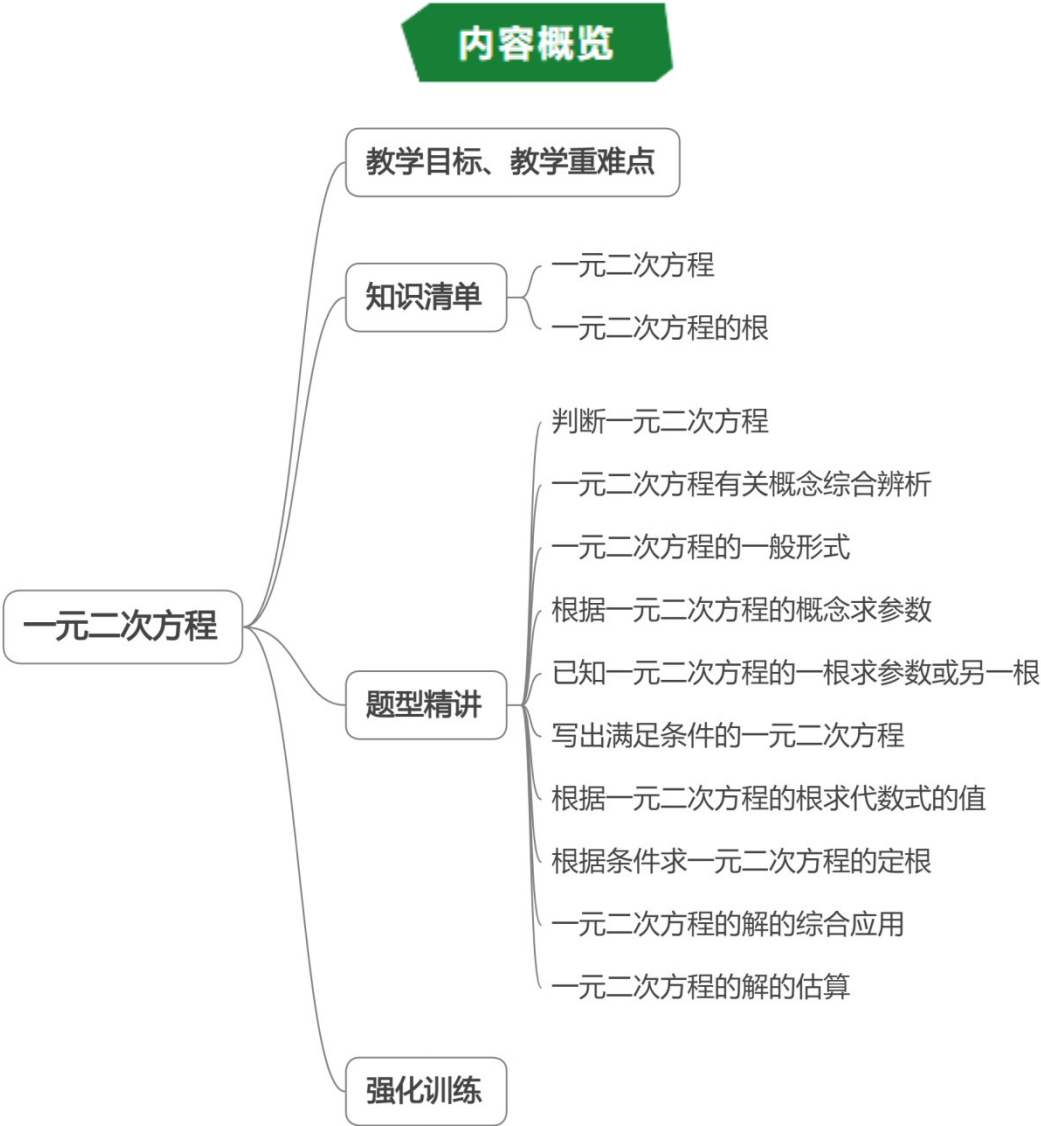


专题 21.1 一元二次方程



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 了解一元二次方程的概念； 2. 知道一元二次方程的一般形式； 3. 掌握一元二次方程的根的概念，以及整体代换思想。
教学重难点	1.重点 (1) 一元二次方程的概念及其求参数问题； (2) 将一元二次方程化成一般形式，并知道其二次项及其系数，一次项及其系数，常数项等；

	(3) 一元二次方程的根及其应用。 2. 难点 (1) 概念辨析及其应用； (2) 一元二次方程的根的应用—求代数式的值等。
--	--

知识清单

知识点1 一元二次方程

1. 实例

一块长方形绿地的面积为 1200 m^2 ，且已知长比宽多 10 m 。问：长和宽各为多少？

设这块长方形绿地的宽为 $x \text{ m}$ ，它的长就是 $(x+10) \text{ m}$ 。

因为绿地 面积为 1200 m^2 ， 所以 $x(x+10)=1200$ 。

去括号，得 $x^2+10x=1200$ 。

2. 一元二次方程

①定义：一般地，只含有一个未知数，且未知数的最高次数是2的整式方程叫作一元二次方程。

②一般形式：一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0$ (a 、 b 、 c 为已知数，且 $a \neq 0$)。

③其中 ax^2 叫作二次项， a 是二次项系数； bx 叫作一次项， b 是一次项系数； c 叫作常数项。

要点：一元二次方程的特征

(1) 都是整式方程；

(2) 只含有一个未知数；

(3) 未知数的最高次数是2。

3. 将一元二次方程化成一般形式

例 将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数及常数项。

(1) $(8-2x)(5-2x)=18$

(2) $y+\sqrt{3}=\sqrt{2}(y^2+2)$ 。

解：(1) $2x^2-13x+11=0$ ；2，-13，11。

(2) $-\sqrt{2}y^2+y+\sqrt{3}-2\sqrt{2}=0$ ； $-\sqrt{2}$ ，1； $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ 。

【即学即练】

1. 下列属于一元二次方程的是 ()

- A. $x+y=1$ B. $2x+1=4$ C. $x^2+x=2$ D. $x^2+\frac{1}{x}=2$

2. 下列方程① $ax^2+bx+c=0$; ② $3x(x-4)=0$; ③ $x^2+y-3=0$; ④ $\frac{1}{x}+x^2=2$; ⑤ $x^3-3x+9=0$; ⑥

$x^2+x+1=0$; ⑦ $(x-2)(x+5)=x^2-1$. 其中一定是一元二次方程的有 () 个

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

3. 把下列方程化成一般式, 并写出二次项、一次项和常数项.

(1) $(5x-1)^2=4(x-3)^2$;

(2) $3y(y+1)=7(y+2)-5$.

4. 一元二次方程 $2x^2-8x=5$ 化成一般形式后, 二次项系数为_____, 一次项系数为_____, 常数项为_____.

5. 若关于 x 的方程 $(k+3)x^{|k|-1}+6x-1=0$ 是一元二次方程, 则 $k=(\quad)$

- A. 1 B. -3 C. -1 D. 3

知识点 2 一元二次方程的根

1. 满足方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的实数 x 叫作这个方程的**实数根**(或者**实数解**), 简称**实根**或者**根**.

2. 判断一个未知数的值是不是这个方程的根:

使一元二次方程左右两边相等的未知数的值叫做一元二次方程的根。

3. 一元二次方程如果有实数根, 则必然有两个实数根, 未知数为 x 的一元二次方程的两个根通常用 x_1 、 x_2 表示.

【即学即练】

1. 若一元二次方程有一个根是 $x=1$, 则这个方程可以是 ()

- A. $(x+1)(x+2)=0$ B. $x^2-1=0$
C. $x^2-2x-1=0$ D. $x^2+x=0$

2. 已知关于 x 的一元二次方程: $x^2-kx=0$ 的一个根是 2, 则 k 的值是_____.

3. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+2a+3=0$ 的一个根是 1, 则 a 的值是_____.

4. 若方程 $x^2-x-1=0$ 的一个根是 m , 则代数式 $m^2-m+5=$ _____.

5. 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根为 -1, 则 ()

A . $a+b+c=0$ B . $a-b+c=0$ C . $-a-b+c=0$ D . $-a+b+c=0$

题型精讲

题型 01 判断一元二次方程

【典例 1】 . 下列方程中，属于一元二次方程的是 ()

A . $x-3y=1$ B . $x^2+2=\frac{3}{x}$ C . $x^2-3y+2=0$ D . $x^2-2x-3=0$

【变式 1】 . 下列方程是一元二次方程的是 ()

A . $3x^2=3(x-2)^2$ B . $\frac{1}{x}+x=0$ C . $ax^2+bx+c=0$ D . $x^2+2x+1=0$

【变式 2】 . 下列方程是一元二次方程的是 ()

A . $ax^2+bx+c=0$ B . $x^2-y+1=0$ C . $x^2=0$ D . $\frac{1}{x^2}+x=2$

题型 02 一元二次方程有关概念综合辨析

【典例 1】 . 关于 x 的方程 $x^2-6x+3=0$ ，下列说法错误的是 ()

A . 二次项系数为 1 B . 一次项系数为 -6
C . 常数项为 0 D . 它是一元二次方程

【变式 1】 . 下列叙述正确的是 ()

A . 形如 $ax^2+bx+c=0$ 的方程叫一元二次方程
B . 方程 $4x^2+3x=4$ 不含有常数项
C . 一元二次方程中，二次项系数、一次项系数及常数项均不能为 0
D . $(3-y)^2=0$ 是关于 y 的一元二次方程

题型 03 一元二次方程的一般形式

【典例 1】 . 一元二次方程 $(x+1)(x+3)=9$ 的一般形式是_____.

【变式 1】 . 把 $x(x-2)=4x^2-3x$ 化成一般形式为_____，二次项系数为_____，一次项系数为_____
，常数项为_____.

【变式2】 . 将方程 $x^2 - 2x = 10$ 化为一元二次方程的一般形式，其中二次项系数为 1，一次项系数，常数项分别是 ()

- A . -2, -10 B . -2, 10 C . 2, -10 D . 2, 10

【变式3】 . 方程 $2x^2 - 1 = 3x$ 化为一般形式后，当二次系数为正数时，一次项系数是_____ .

【变式4】 . 方程 $(3x+1)(x-1) = 5$ 整理成一元二次方程的一般形式后，它的二次项系数与一次项系数的比值是_____ .

【变式5】 . 把一元二次方程 $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) + (2x-1)^2 = 0$ 化成一般形式，正确的是 ()

- A . $5x^2 - 4x + 4 = 0$ B . $5x^2 - 4x - 4 = 0$ C . $5x^2 - 2x + 1 = 0$ D . $5x^2 - 4x + 6 = 0$

题型 04 根据一元二次方程的概念求参数

【典例1】 . 若关于 x 的方程 $(m-1)x^2 - 3x - 1 = 0$ (m 为常数) 是一元二次方程，则 m 的取值范围为_____ .

【变式1】 . 关于 x 的方程 $(k-1)x^{|k|+1} - x + 5 = 0$ 是一元二次方程，则 $k =$ _____ .

【变式2】 . 已知关于 x 的方程 $(k+2)x^{|k|} + x + 1 = 0$ 是一元二次方程，则 k 的值应为 ()

- A . ± 2 B . -2 C . 2 D . 不能确定

【变式3】 . 若方程 $(m-1)x^{m^2+1} - x - 2 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 $m =$ _____ .

【变式4】 . 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + k^2 - 4 = 0$ 的常数项为 0，则 k 的值为 ()

- A . -2 B . 4 C . 2 或 -2 D . 4 或 -2

【变式5】 . 关于 x 的方程 $(m^2 - 4)x^2 + (m - 2)x - 2 = 0$ ，当 m 满足_____时，方程为一元二次方程，当 m 满足_____时，方程为一元一次方程 .

题型 05 已知一元二次方程的一根求参数或另一根

【典例1】 . 如果关于 x 的一元二次方程 $(m-3)x^2 + 3x + m^2 - 9 = 0$ ，有一个解是 0，那么 m 的值是 ()

- A . 3 B . -3 C . ± 3 D . 0 或 -3

【变式1】 . 若关于 x 的一元二次方程 $(a+1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$ 的一个根是 0，则另一个根的值为 ()

A . 1

B . -1

C . $\frac{1}{2}$

D . $-\frac{1}{2}$

题型 06 写出满足条件的一元二次方程

【典例 1】 . 写出一个二次项系数为 1，一次项系数为 -3，常数项为 -4 的一元二次方程是_____ . (用一般形式表示)

【变式 1】 . 已知某一元二次方程的一个根是 -2，则此方程可以是 _____ . (填一个即可)

题型 07 根据一元二次方程的根求代数式的值

【典例 1】 . 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx - 3 = 0$ 的一个根是 $x = 1$ ，则代数式 $2024 - a - b$ 的值为__

【变式 1】 . 若 $x = 4$ 是关于 x 的方程 $ax^2 - bx = 8$ 的解，则 $2025 - 8a + 2b$ 的值为_____ .

题型 08 根据条件求一元二次方程的定根

【典例 1】 . 关于 x 的方程 $(k+2)x^2 - kx - 2 = 0$ 必有一个根为 ()

A . $x=1$

B . $x=-1$

C . $x=2$

D . $x=-2$

【变式 1】 . 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx - 3 = 0 (a \neq 0)$ 有一个根为 $x = 2021$ ，则方程 $a(x-1)^2 + bx - 3 = b$ 必有一根为 ()

A . 2019

B . 2020

C . 2021

D . 2022

【变式 2】 . 若方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 中， a, b, c 满足 $a+b+c=0$ 和 $a-b+c=0$ ，则方程的根是 ()

A . 1, 0

B . -1, 0

C . 1, -1

D . 无法确定

题型 09 一元二次方程的解的综合应用

【典例 1】 . 两个关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 和 $cx^2 + bx + a = 0$ ，其中 a, b, c 是常数，且 $a + c = 0$ ，如果 $x = 2020$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根，那么下列各数中，一定是方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的根的是 ()

A . 2020

B . $-\frac{1}{2020}$

C . -2020

D . $\pm \frac{1}{2020}$

【变式1】. 若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 满足 $a-b+c=0$, 称此方程为“天宫”方程. 若方程 $a^2x^2-2021ax+1=0$ ($a \neq 0$) 是“天宫”方程, 求 $a^2+2022a+\frac{2021a}{a^2+1}-\frac{a}{2021a+1}$ 的值是 ____.

题型 10 一元二次方程的解估算

【典例1】. 观察下列表格, 可知一元二次方程: $x^2-x=1.2$ 的一个近似解是 ()

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
x^2-x	0.11	0.24	0.39	0.56	0.75	0.96	1.19	1.44

- A. $x \approx 0.24$ B. $x \approx 1.69$ C. $x \approx 1.71$ D. $x \approx 1.19$

【变式1】. 根据下列表格的对应值, 由此可判断方程 $x^2+12x-15=0$ 必有一个解 x 的取值范围是__

x	-1	1	1.1	1.2
x^2+12x	-11	13	14.41	15.84

【变式2】. 探索方程 $x^2+12x-15=0$ 的正数解的过程如下表:

x	0	0.5	1	1.5	2
$x^2+12x-15$	-15	-8.75	-2	5.25	13

可以看出方程的正数解应介于 a 和 b 之间, 则 a, b 分别是 ()

- A. 0, 0.5 B. 0.5, 1 C. 1, 1.5 D. 1.5, 2

强化训练

一、单选题

1. 下列关于 x 的方程中, 一定属于一元二次方程的是 ()

- A. $x^2+9=0$ B. $ax^2-2x+3=0$
C. $x^2+2y+6=0$ D. $\frac{1}{x^2}=3$

2. 下列各数中, 哪个是方程 $x^{(2-x)}=1$ 的解 ()

- A. -1 B. 1 C. 0 D. 2

- A . 1 个 B . 2 个 C . 3 个 D . 4 个

二、填空题

- 11 . 已知方程 $(a-3)x^{|a|-1} + 3x + 3a = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 $a =$ _____ .
- 12 . 若关于 x 的方程 $(m-2)x^2 + \sqrt{m}x + 1 = 0$ 是一元二次方程，则 m 的取值范围是_____ .
- 13 . 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2mx - m + 2 = 0$ 的二次项系数、一次项系数和常数项的和为 0，则 m 的值是_____ .
- 14 . 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个解为 1 和 -1，则 $a + b + c =$ _____， $a - b + c =$ _____， $b =$ _____ .
- 15 . 已知关于 x 的方程 $(m^2 - 1)x^2 + (m - 2)x - 2m + 1 = 0$ ，当 m _____ 时，原方程是一元二次方程；当 m _____ 时，原方程是一元一次方程 .
- 16 . 关于 x 的一元二次方程 $m(x-p)^2 + n = 0$ (m, n, p 均为常数， $m \neq 0$) 的根是 $x_1 = -3, x_2 = 2$ ，则方程 $m(x-p+5)^2 + n = 0$ 的根是_____ .
- 17 . 已知 $x = \sqrt{6-2\sqrt{5}}$ 为一元二次方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的一个根，且 a, b 为有理数，则 $a =$ _____， $b =$ _____ .

三、解答题

- 18 . 下列方程中哪些是一元二次方程？将一元二次方程写成一般式的形式，并指出它的二次项系数、一次项系数和常数项

(1) $3x + 2 = 5x - 3$;

(2) $x^2 = 4$;

(3) $\frac{x-2}{x+1} - 1 = x^2$;

(4) $x^2 - 4 = (x+2)^2$;

(5) $ax^2 + bx + c = 0$;

(6) $3x^2 - 5x + 7 = x^2$

- 19 . 填表：

方程	一般形式	二次项系数	一次项系数	常数项
$x^2 - 4x - 3 = 0$				
$2x^2 = 0$				
$\frac{1}{2}x^2 = \sqrt{9}$				
$(2y - 3)^2 = y(y + 2)$				

20. 已知 a 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的一个根，求代数式 $a(a-4) + (a-1)(a+1)$ 的值。

21. 若 a 是方程 $x^2 - 2023x + 1 = 0$ 的一个根，求代数式 $a^2 - 2024a + \frac{a^2 + 1}{2023}$ 的值。

22. 【阅读理解】

【定义】如果关于 x 的方程 $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ ($a_1 \neq 0$, a_1 、 b_1 、 c_1 是常数) 与 $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ ($a_2 \neq 0$, a_2 、 b_2 、 c_2 是常数)，其中方程中的二次项系数、一次项系数、常数项分别满足 $a_1 + a_2 = 0$ ， $b_1 = b_2$ ， $c_1 + c_2 = 0$ ，则这两个方程互为“对称方程”。

【举例】求方程 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 的“对称方程”，这样思考：由方程 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 可知， $a_1 = 2$ ， $b_1 = -3$ ， $c_1 = 1$ ，根据 $a_1 + a_2 = 0$ ， $b_1 = b_2$ ， $c_1 + c_2 = 0$ ，求出 a_2 ， b_2 ， c_2 就能确定这个方程的“对称方程”。

请用以上方法解决下面问题：

(1) 写出方程 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 的“对称方程”是_____；

(2) 若关于 x 的方程 $8x^2 + (m-3)x - n = 0$ 与 $-8x^2 - x + 1 = 0$ 互为“对称方程”，求 $(m+n)^2$ 的值。