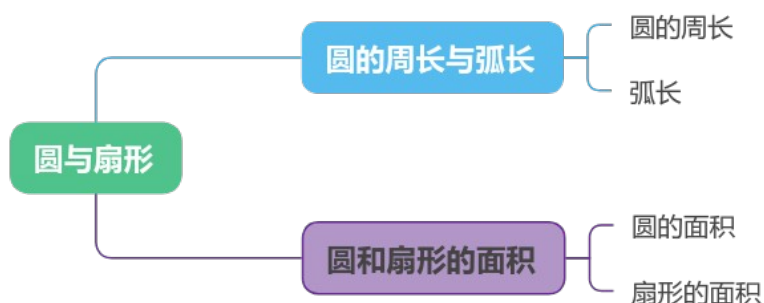


第六章 圆与扇形单元复习

内容概览



知识清单

知识点 1 圆的周长和圆周率

1. 圆的周长

圆周是条曲线，围成圆的曲线的长度叫做圆的**周长**。

2. 圆周率

圆的周长与它直径的**比值**是个常数，这个常数叫做**圆周率**，用字母 π (读作 pài) 表示；

特点： π 是无限不循环小数 ($\pi \approx 3.1415926535\dots$)，教材中取近似值 $\pi \approx 3.14$ ；

3. 圆的周长公式

由 $\pi = \frac{C}{d}$ ，变形得到圆的周长公式： **$C = \pi d$** (C 表示圆的周长)

结合直径与半径的关系 ($d = 2r$)，推导得到： **$C = 2\pi r$** ；

【即学即练】

例 1 如图，甲、乙两只蚂蚁同时从点 A 出发，甲沿着外侧的大圆爬行，乙在里面两个小圆沿“8”字形爬行，如果两只蚂蚁爬行的速度相同，那么是甲先回到点 A，还是乙先回到点 A？或者是它们同时回到点 A？为什么？

分析 甲沿着外侧的大圆爬行，即甲爬行的路程是大圆的周长；乙在里面两个小圆沿“8”字形爬行，即乙爬行的路程是两个小圆的周长和。

知识点 2 弧长

1. 1° 的弧

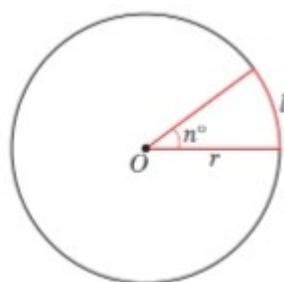
把圆心角平均分成 360 份，其中 1° 的圆心角所对的弧叫做 1° 的弧，它的长度是圆周的 $\frac{1}{360}$ ；

2. n° 的弧

n° 的圆心角所对的弧叫做 n° 的弧，它的长度是圆周的 $\frac{n}{360}$ ；

3. 半径一定时，弧长与所对的圆心角的大小成正比例。

弧长与圆的周长之比等于圆心角与周角之比。



4. 弧长公式

如果用 l 表示弧长， r 表示半径，那么 n° 的圆心角所对的弧长的计算公式是：

小结：弧是圆上的一部分，弧的长度时不包含两条半径的长度。

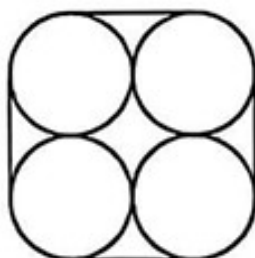
【即学即练】

例 2 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle A=60^\circ$ ， $\angle ABC=30^\circ$ ， $AB=2$ ，将三角形 ABC 绕点 B 顺时针旋转至三角形 $A'B'C'$ 的位置，点 A 对应点 A' ，点 C 对应点 C' ，且点 A 、 B 、 C' 在同一直线上，则点 A 经过的路径长为_____。

(结果保留 π)

例 3 如图,直径均为 1m 的四根圆管被一根金属带紧紧地捆在一起，试求金属带的长度.(接头处忽略不计， π

取 3.14)



知识点 3 圆面积

1. 定义

圆所围成区域的大小叫作圆的面积。

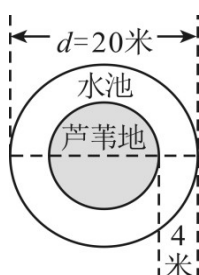
2. 圆面积公式

圆的面积公式： $S = \pi r^2$ 。

【即学即练】

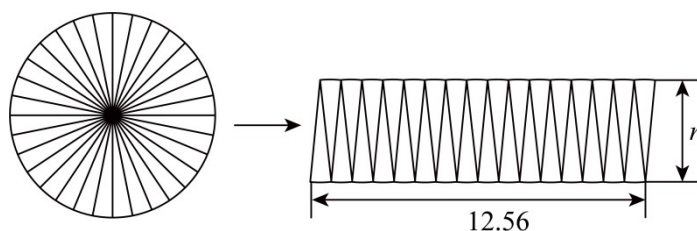
例⁴ 秋分过后就是寒露和霜降，正是吃螃蟹的好时节．小明舅舅承包了一个小鱼塘养螃蟹（如图），水池

中间有片芦苇地，这个芦苇地的面积是()平方米，水域的面积是()平方米．



例⁵ 小刚在硬纸板上画了一个圆，把圆平均分成³²份，剪开后，用这些近似于等腰三角形的小纸片拼成

一个近似的长方形，并量出长方形的长是12.56cm，则这个圆的面积是() (π 取 3.14)



A . 12.56cm²

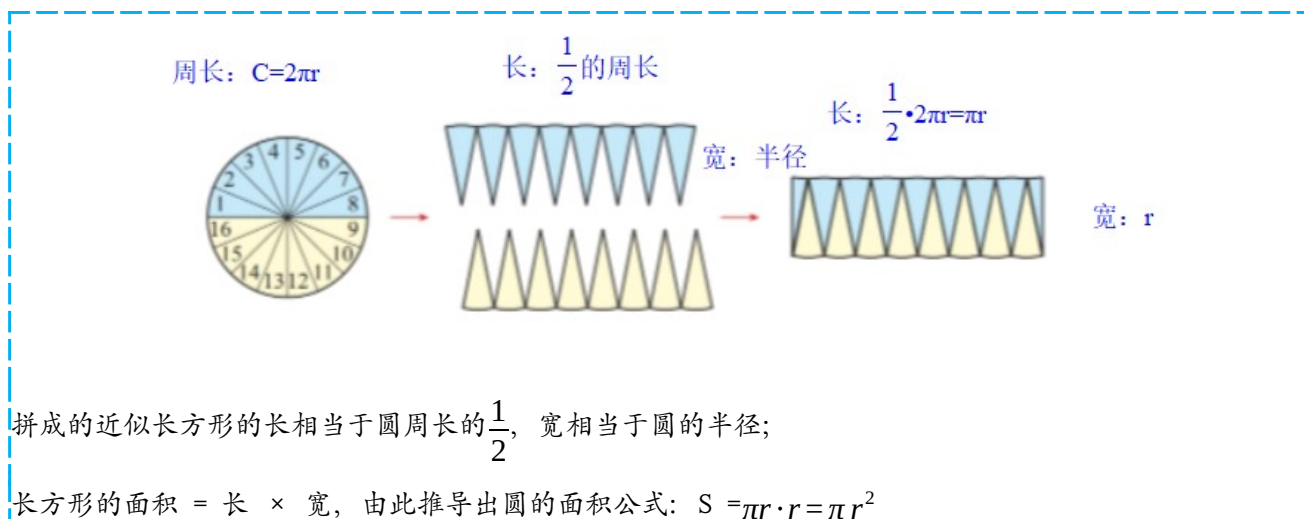
B . 25.12cm²

C . 37.8cm²

D . 50.24cm²

【知识拓展】——用“化圆为方”的思想来探究圆面积公式的推导

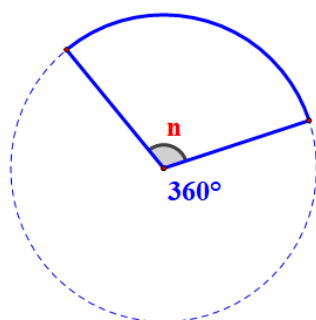
如图把一个圆平均分成若干等份（如 16 份、32 份），可以拼成一个近似的长方形；分的份数越多，拼成的图形越接近长方形；



知识点 4 扇形的面积

1. 扇形的定义：

由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧围成的图形叫作**扇形**；



2. 扇形的面积

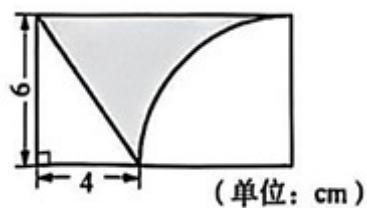
圆心角为 1° 的扇形面积是圆面积的 $\frac{1}{360}$ ；圆心角为 n° 的扇形面积是圆面积的 $\frac{n}{360}$ 。

所以，**圆心角**与**周角**之比等于对应的扇形面积与圆的面积之比。

如果用 S 表示扇形的面积， r 表示半径，那么圆心角为 n° 的扇形面积的计算公式是

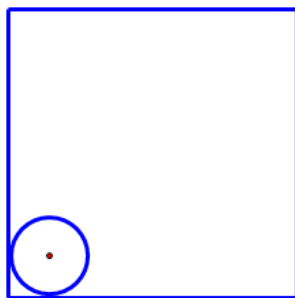
【即学即练】

例 6 如图，长方形纸片上剪去一个直角三角形和一个扇形，则剩下阴影部分的面积是多少？(结果保留 π)



【难点剖析】组合图形的面积

例 7 如图，在边长为 10cm 的正方形内侧有一个半径 2cm 的圆沿着正方形的边滚动一周，求圆滚动过程中覆盖不到的部分的面积.(结果保留 π)



【分析】如图，圆覆盖不到的部分是中间的一个边长小正方形和大正方形四个角上圆弧覆盖不到的部分.

【解析】中间圆覆盖不到的部分是一个正方形，

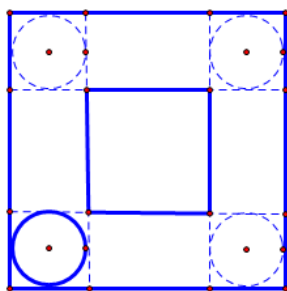
边长 $r = 10 - 2 \times 4 = 2(\text{cm})$, $S_1 = 2^2 = 4(\text{cm}^2)$.

四个角上覆盖不到的部分 $S_2 = 4 \times 4 - \pi \times 2^2 = 16 - 4\pi(\text{cm}^2)$.

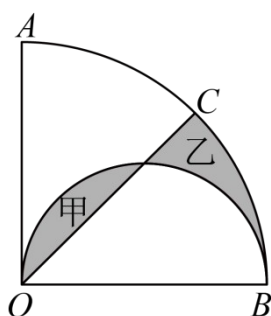
所以 $S = S_1 + S_2 = 20 - 4\pi(\text{cm}^2)$.

所以圆滚动过程中覆盖不到的部分的面积为 $(20 - 4\pi)\text{cm}^2$.

说明 要注意中间覆盖不到的正方形边长是大正方形边长减去直径的两倍，



例⁸ 如图所示，已知扇形 AOB ， $OB=10$ ， $\angle AOB=90^\circ$ ，以 OB 为直径画半圆，点 C 为弧 AB 中点。



阴影甲的面积与阴影乙的面积大小比较：_____。

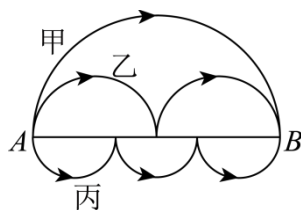
A. 甲的面积大 B. 乙的面积大 C. 相等 D. 无法比较

题型精讲

题型 01 有关圆周长的计算

【典例 1】（²⁴⁻²⁵ 六年级上·上海长宁·期末）如图，甲、乙、丙三只蚂蚁同时沿着以下路线从点 A 出发到

点 B ，如果三只蚂蚁爬行的速度相同，那么（ ）



A. 同时到达 B. 甲先到达

C. 乙先到达

D. 丙先到达

【变式1】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海·期末）“滴水湖”的湖面呈圆形，半径约是1.25千米，“滴水湖”的周长大约为（ ）千米

A. 1.25π

B. 2.5π

C. 5π

D. 2.25π

【变式2】（²³⁻²⁴ 六年级上·上海松江·期末）中国建筑中经常能见到“外圆内方”和“外方内圆”的设计，如图，在外圆内方图案中，圆与正方形面积比是（ ）



A. $\pi:2$

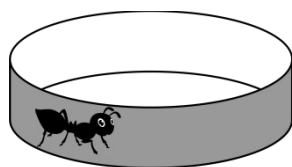
B. $2:\pi$

C. $4:\pi$

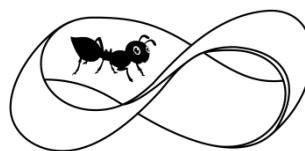
D. $\pi:4$

【变式3】（²⁵⁻²⁶ 六年级上·上海·期末）淘气家新买了一张直径是1.5米的圆桌，圆桌的边是用铝合金包起来的，铝合金的长度至少是_____米。（ π 取3.14）

【变式4】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海崇明·期末）图①的纸环是将一张长方形纸条两端粘上得到的，我们可以将纸环看成是一个直径为10cm的圆。图②的纸环是将同一张长方形纸条一端旋转 180° ，再将两端粘上得到的“莫比乌斯带”，一只蚂蚁沿纸环②向前爬行，蚂蚁如果不爬过纸环的边缘，它至少需要爬_____厘米才能到达原来的位置。



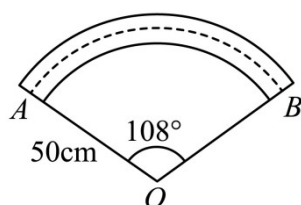
图①



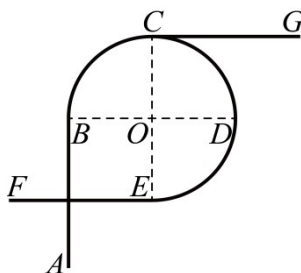
图②

题型 02 有关弧长的计算

【典例 1】 (24-25 六年级下·上海虹口·期中) 如图所示为一弯形管道，其中心线是一段圆弧 AB ，已知半径 $OA = 50\text{cm}$ ， $\angle AOB = 108^\circ$ ，则管道的长度（即弧 AB 的长）为_____cm（ π 取 3.14）。



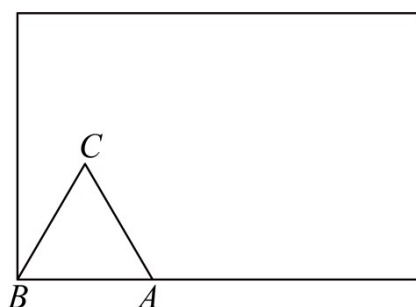
【变式 1】 (24-25 六年级下·上海·期中) 如图是一座立体交叉桥的示意图（道路宽度忽略不计）， A 为入口， F, G 为出口，其中直行道为 AB, CG, EF ，且 $AB = CG = EF = 165$ 米，弯道为以点 O 为圆心的一段弧，且所对的圆心角均为 90° ，半径为 $\frac{300}{\pi}$ 米。甲车由 A 口驶入立交桥，以 12 米/秒的速度行驶，从 G 口驶出用时多少秒？



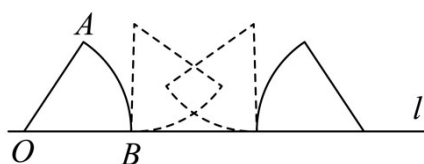
【变式 2】 (24-25 六年级下·上海崇明·期末) 已知扇形的圆心角是 120° ，半径是 3 cm，那么扇形的周长是_____。

cm

【变式3】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海闵行·期中）如图，长方形的长是⁶厘米，宽是⁴厘米，在这个长方形内有一个边长为²厘米的等边三角形（等边三角形的三个内角都是 60° ），三角形沿长方形的边在长方形内部向左滚动一周，顶点 C 所经过的路程为_____厘米。（保留 π ）



【变式4】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海黄浦·期中）如图，已知扇形 AOB 的圆心角是 60° ，半径是 6 ，将它沿着 OB 所在直线 l 向右作顺时针方向的滚动，当它到达图中最右侧扇形的位置时，点 O 经过的路程的长是_____。（ π 取 3.14 ）



题型 03 有关圆的面积的计算

【典例1】（²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海普陀·期末）圆环是由两个同心圆所围成的平面图形，即由外圆的内部与内圆的外部组成的区域，两个圆的半径之差称为环宽。如果一个圆环的外圆半径等于内圆直径，那么将此圆环称为“平等圆环”。环宽是 5cm 的“平等圆环”的面积是_____ cm^2 。（结果保留 π ）

【变式 1】 (24-25 六年级下·上海·期末) 一个圆的直径由 10 厘米增加到 20 厘米，则圆的面积变为原来的

()

A . 2 倍

B . 4 倍

C . $\frac{1}{2}$

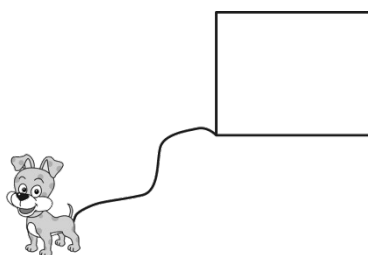
D . $\frac{1}{4}$

【变式 2】 (24-25 六年级下·上海黄浦·期末) 已知一个圆形喷水池的半径是 4 米，沿它的外侧铺一条 1 米

宽的小路，那么这条小路的面积等于_____平方米 . (结果保留 π)

【变式 3】 (24-25 六年级下·上海·单元测试) 如图，长方形建筑物，一只狗拴在墙角处，不能够进入长方

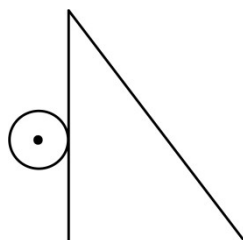
形内部，长方形长 5 米，宽为 4 米，绳子长 6 米，求出小狗活动的范围有多少平方米？



【变式 4】 (24-25 六年级下·上海普陀·期中) 如图，一个半径为 1cm 的圆绕着一个三条边分别为 6cm 、

8cm 、 10cm 的直角三角形的外侧滚动一周，那么这个圆滚动过程中覆盖的面积为_____ cm^2 . (结果保留

π)



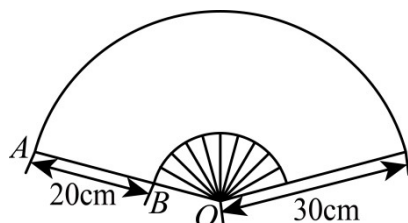
题型 04 有关扇形面积的计算

【典例 1】 (24-25 六年级下·上海闵行·期末) 已知一个扇形面积占它所在圆面积的 $\frac{1}{15}$ ，那么这个扇形的圆心角为_____。

【变式 1】 (24-25 六年级下·上海闵行·期末) 在学习扇形的面积公式时，已知圆心角 n 和扇形所在圆的半径 R ，可以推的公式： $S_{\text{扇形}} = \text{①}$ _____，并通过比较扇形面积公式与弧长公式 $l = \text{②}$ _____，得出扇形面积的另一种计算方法 $S_{\text{扇形}} = \text{③}$ _____。请解决下列问题：

问题 1：求弧长为 4π ，圆心角为 144° 的扇形面积。

【变式 2】 (24-25 六年级下·上海嘉定·期末) 如图，一把展开的扇子的圆心角是 135° ，扇子的骨柄长是 30 cm，扇面宽度 20 cm。求这把扇子完全展开后扇面所占的面积 (π 取 3.14)。



【变式 3】 (24-25 六年级下·上海闵行·期末) 如果一个扇形的弧长等于它所在圆的半径，那么此扇形叫做“完美扇形”。已知某个“完美扇形”的周长等于 12，那么这个扇形的面积等于_____。

【变式 4】 (24-25 六年级下·上海徐汇·期末) 中国邮政集团公司曾发行《二十四节气》特殊版式小全张 (图 1)，上面绘制了代表二十四气风貌的图案，这 24 枚大小相同的邮票组成了一个圆环，以“夏至”节气

单枚邮票为例 (图 2)，该邮票的“下圆弧” $\overline{BC}$ 的长为 1.57 cm，“直边” AB 的长为 6 cm。求单枚邮票的面积

(π 取 3.14) .



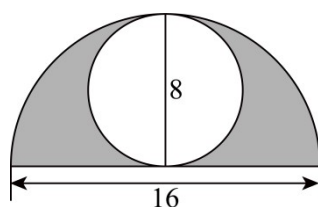
图1



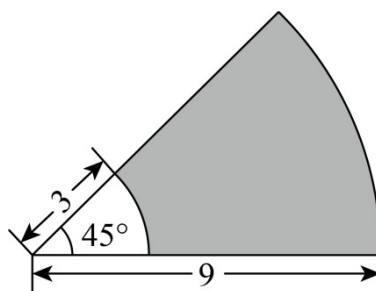
图2

题型 05 有关组合图形的周长和面积的计算

【典例 1】 (²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海黄浦·期末) 如图，求图中阴影部分的周长。(结果保留 π)



【变式 1】 (²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海·期中) 求图中阴影部分的周长 (结果保留 π ，单位：厘米) .

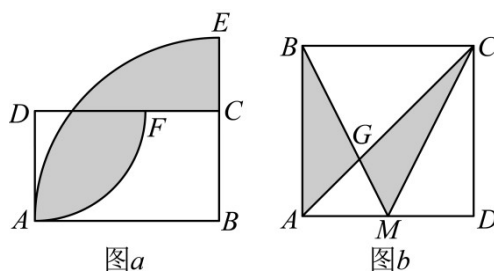


【变式 2】 (²⁴⁻²⁵ 六年级下·上海闵行·期末) (1) 如图 a ，四边形 $ABCD$ 是长方形，长为 10，宽为 6，求

阴影部分的面积。(保留 π)

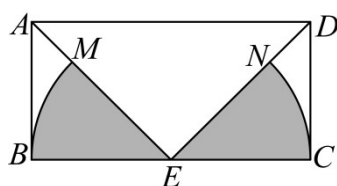
(2) 如图 b ，正方形 $ABCD$ 边长为 2， M 为边 AD 的中点，求图中阴影部分面积。(正方形中过 G 点作边

AB 、 AM 的高相等)



【变式3】 (24-25 六年级下·上海金山·期末) 如图，在长方形 $ABCD$ 中， $AB = 4\text{cm}$ ， $AD = 8\text{cm}$ ， $\triangle ADE$

是直角三角形， $\angle BEA = \angle CED$ ，取 BC 的中点 E ，以 EB 为半径画弧 BM 、以 EC 为半径画弧 CN 。

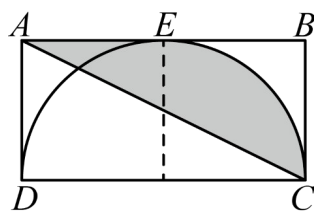


(1) 求图中阴影部分面积 (π 取 3.14)

(2) 求图中阴影部分周长 (π 取 3.14)

【变式4】 (24-25 六年级下·上海宝山·期末) 如图，在长方形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $AD = 1$ ，连接 AC ，并以

CD 为直径画半圆，求阴影部分的面积。(结果保留 π)



强化训练

1. (24-25 六年级下·上海·月考) 如果扇形的半径不变，圆心角扩大为原来的 2 倍，那么扇形的弧长 ()

A. 不变

B. 扩大为原来的 4 倍

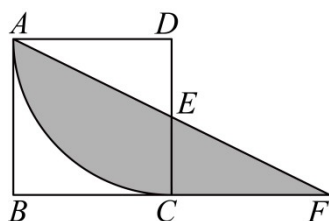
C. 缩小为原来的一半

D. 扩大为原来的 2 倍

2. (24-25 六年级下·上海宝山·期末) 在一个圆中，若 45° 的圆心角所对的弧长是 6.28 厘米，则这个圆的周长是_____厘米 .

3. (24-25 六年级下·上海徐汇·期末) 如果一个扇形的半径是 1 ，弧长是 $\frac{\pi}{6}$ ，那么此扇形的圆心角的度数为_____ .

4. (24-25 六年级下·上海杨浦·期末) 如图，四边形 $ABCD$ 是一个边长为 4cm 的正方形， F 在 BC 的延长线上且 $CF = 4\text{cm}$ ，则涂色部分面积为_____ cm^2 .



5. (24-25 六年级下·上海·期末) 2023 年，中国成功发射了“巡天”空间望远镜，该望远镜与天宫空间站共轨飞行，协同完成宇宙观测任务 . 已知巡天望远镜的轨道高度距地面约 450km ，运行轨道近似为圆形，绕地球一周约需 95 分钟 . 地球半径约为 6400km ，求巡天望远镜的绕行速度 . (π 取 3 ，结果精确到 0.1km/min)



6. (24-25 六年级下·上海闵行·期末) 第 19 届杭州亚运会会徽如图 ¹ 所示，名为“潮涌”，展现了浙江杭州

山水城市的自然特质，也寓意着勇立潮头的精神风貌。其主体部分可以看成如图 ² 的几何图形，小明测量

得 $OB = 2\text{cm}$ ， $OA = 4\text{cm}$ ， $\angle BOC = 120^\circ$ 。求图 ² 中的阴影部分的周长为多少厘米？（结果保留 π ）



图1

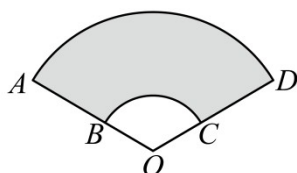


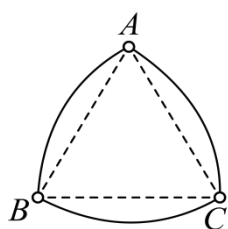
图2

7. (24-25 六年级下·上海宝山·期中) 已知一个时钟的分针针尖到中心的距离为 15cm ，经过 20 分钟，分针的顶端所走的路程是多少？

8. (24-25 六年级下·上海虹口·期中) 生活中有很多神奇的事情，车轮可以不是圆的，是不是很诧异，我

们一起来认识一下“勒洛三角形”。它是一种特殊图形，指分别以等边三角形的顶点为圆心，以其边长为半

径作圆弧，由这三段圆弧组成的曲边三角形称为勒洛三角形（如图 ¹）。



若等边三角形 ABC 的边长为 6cm ，请你求出这个勒洛三角形的周长。（结果保留 π ）

9. (24-25 六年级下·上海闵行·期末) 在学习扇形的面积公式时，已知圆心角 n 和扇形所在圆的半径 R ，可

以推的公式： $S_{\text{扇形}} = \text{①}$ ——，并通过比较扇形面积公式与弧长公式 $l = \text{②}$ ——，得出扇形面积的另一种

计算方法 $S_{\text{扇形}} = \text{③}$ ——。请解决下列问题：

问题 I：求弧长为 4π ，圆心角为 144° 的扇形面积。

问题 II：某小区设计的花坛形状如图 1 中的阴影部分，已知 AB 和 CD 所在圆心都是点 O ，弧 AB 的长为 l_1 ，

弧 CD 的长为 l_2 ， $AC = BD = d$ ，求花坛的面积。

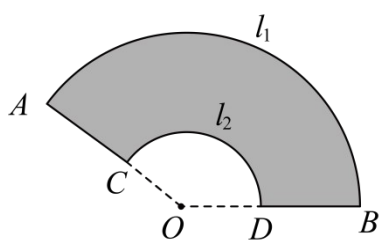


图1

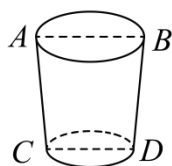


图2

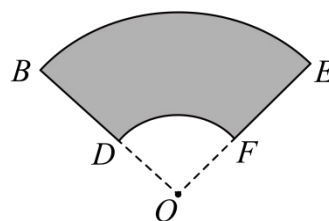


图3

(1) 另一种扇形面积的计算方法 $S_{\text{扇形}} = \text{③}$ ——。请你解答问题 I；

(2) 在解决问题 II 的过程中，有位同学发现扇形面积公式③类似于三角形面积公式：类比梯形面积公式，

他猜想花坛的面积 $S = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)d$ 。他的猜想正确吗？如果正确，写出推导过程；如果不正确，请说明理由。

(参考公式： $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$)

(3) 乙同学发现平时所用的一次性纸杯 (如图 2) 的侧面展开的大致图形 (如图 3) 所示，经测量杯口直

径 $AB = 10\text{cm}$ ，杯底直径 $CD = 5\text{cm}$ ，杯壁母线长 $AC = BD = 10\text{cm}$ ，忽略纸杯的连接部分和纸杯的厚度，

请求出在图³中其侧面展开的图形 $BDFE$ 面积。

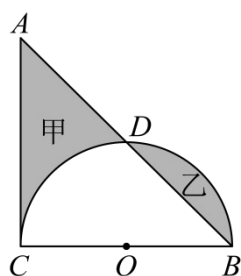
(⁴) 丙同学认为，要想准确画出纸杯的侧面展开图，需要确定图³中 $\overline{BE}$ 和 $\overline{BF}$ 所在的半径 OE ， OF 的长

以及圆心角 $\angle BOE$ 的度数，那么根据(³)中的尺寸， $\overline{BF}$ 所在圆的半径 $OF = \underline{\hspace{2cm}}$ ；它所对的圆心角 $\angle BOE$ 的度数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. (24-25 六年级下·上海闵行·期末) 如图，在直角三角形 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 20$ 厘米，

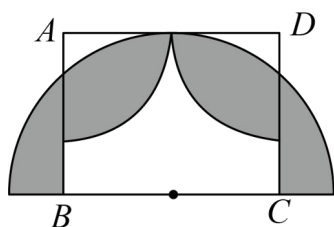
以直角边 BC 为直径作半圆，与 A 交于点 D ，那么阴影甲的面积比阴影乙的面积大多少平方厘米？(π 取

3.14)



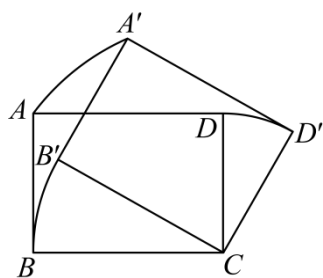
11. (24-25 六年级下·上海松江·期末) 如图，长方形 $ABCD$ 的长 $AD = 4$ cm，宽 $AB = 3$ cm。求阴影部分的

周长和面积(结果保留 π)。



12. (24-25 六年级下·上海·期末) 如图，将矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转 30° 到矩形 $A'B'CD'$ ，已知

$AB = CD = 3$ cm， $BC = AD = 4$ cm， $AC = A'C = 5$ cm，则旋转的过程中：



(1) 边 BC 扫过的部分是个什么形状？求出该部分的面积；

(2) 分别求出点 A 和点 D 走过的路线长；

(3) 求出边 AD 扫过的部分的面积。