

专题 04 实数 二次根式 选填压轴题

考点归纳

考点 01 立方根的性质；立方根的应用

考点 02 数的开方有关的小数点移动规律问题

考点 03 实数与数轴

考点 04 实数的综合应用

考点 05 二次根式的综合应用

考点专练

考点 01 立方根的性质；立方根的应用

1. $\sqrt[3]{x-2} = x-2$ ，则 $x^2 - x$ 的值为 ()

- A. 0 或 1 B. 0 或 2 C. 0 或 6 D. 0 或 2 或 6

2. 已知 $\sqrt[3]{2x+1} \cdot 2x-1 = 0$ ，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 一个正方体的木块的体积是 343cm^3 ，现将它锯成 8 块同样大小的小正方体木块，则每个小正方体木块的表面积是_____。

4. 每年农历八月十五是我国传统的中秋佳节，这时是一年秋季的中期，所以被称为中秋。自古便有中秋节赏月品月饼的习俗，某商店的李师傅制作的正方体月饼礼盒的体积为 216cm^3 ，而康师傅制作的正方体月饼礼盒的体积比李师傅制作的小 91cm^3 ，则康师傅制作的正方体月饼礼盒的表面积为_____。

考点 02 数的开方有关的小数点移动规律问题

5. 已知 $\sqrt[3]{0.1234} \approx 0.4979$ ， $\sqrt[3]{12.34} \approx 2.311$ ，则 $\sqrt[3]{12340}$ 的值约是 ()

- A. 4.979 B. 23.11 C. 49.79 D. 231.1

6. 用计算器计算出的下表中各数的算术平方根如下：

n	0.0625	0.625	6.25	62.5	625	6250	62500	L
$\sqrt{n}$	0.25	0.7906	2.5	7.906	25	79.06	250	L

根据以上规律，若 $\sqrt{1.71} \approx 1.31$ ， $\sqrt{17.1} \approx 4.14$ ，则 $\sqrt{1710} \approx$ ()

- A . 41.4 B . 13.1 C . 414 D . 131

7 . 小明用计算器求了一些正数的平方，记录如下表 .

x	15	15.1	15.2	15.3	15.4	15.5	15.6	15.7	15.8	15.9	16
x^2	225	228.01	231.04	234.09	237.16	240.25	243.36	246.49	249.64	252.81	256

下面有四个推断：

- ① 2.4649 的平方根是 ± 1.57
 ② 240 的算术平方根位于 15 和 16 这两个连续的整数之间；
 ③ 对于大于 16 的两个正数，若它们的差等于 0.1，则它们的平方的差大于 3.19
 ④ 一定有 3 个整数的算术平方根在 15.1 ~ 15.2 之间

其中正确的序号是 ()

- A . ①②③ B . ①③④ C . ①②④ D . ①②③④

8 . 小明用计算器求了一些正数的平方，记录如表

x	15	15.1	15.2	15.3	15.4	15.5	15.6	15.7	15.8	15.9	16
x^2	225	228.01	231.04	234.09	237.16	240.25	243.36	246.49	249.64	252.81	256

下面有四个推断：

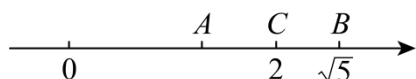
- ① $\sqrt{2310.4} = 152$
 ② 一定有 3 个整数的算术平方根在 15.5 ~ 15.6 之间
 ③ 对于大于 16 的两个正数，若它们的差等于 0.1，则它们的平方的差一定大于 3.19
 ④ 与 $\sqrt{239}$ 更接近的整数是 15

所有合理推断的序号是 ()

- A . ② B . ②③ C . ②③④ D . ①②③

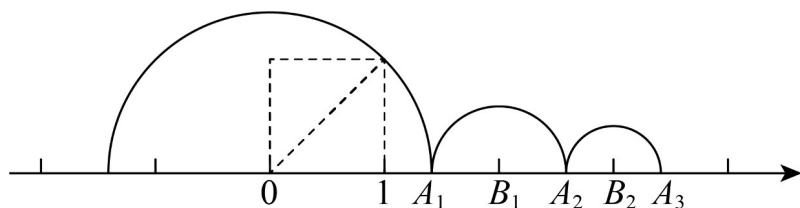
考点 03 实数与数轴

9 . 数轴上点 C、点 B 表示数如图所示，且点 A 与点 B 关于点 C 成中心对称，则点 A 表示的数是 ()



- A. $\sqrt{2}$ B. $4 - \sqrt{5}$ C. $\sqrt{5} - 2$ D. $2\sqrt{5} - 2$

10. 如图，通过画边长为 1 的正方形，就能准确的把 $\sqrt{2}$ 表示在数轴上点 A_1 处，记 A_1 右侧最近的整数点为 B_1 ，以点 B_1 为圆心， A_1B_1 为半径画半圆，交数轴于点 A_2 ，记 A_2 右侧最近的整数点为 B_2 ，以点 B_2 为圆心， A_2B_2 为半径画半圆，交数轴于点 A_3 ，如此继续，则 A_8B_8 的长为 ()



- A. $\sqrt{2} - 1$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $2 - \sqrt{2}$

11. 如图 1 是由 8 个同样大小的立方体组成的魔方，体积为 216.

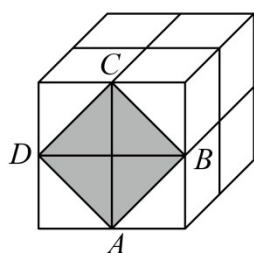


图1

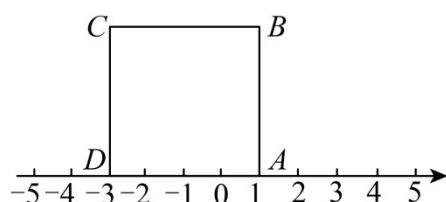
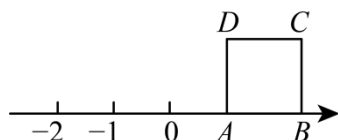


图2

- (1) 这个魔方的棱长为_____；
 (2) 图 1 中阴影部分是一个正方形 $ABCD$ ，阴影部分的面积为_____，边长为_____；
 (3) 把正方形 $ABCD$ 放到数轴上，如图 2，使点 A 与 1 重合，则点 D 在数轴上所表示的数为_____。

12. 如图，面积为 a ($a > 1$) 的正方形的边 $ABCD$ 在数轴上，点 A 表示的数为 1. 将正方形 $ABCD$ 沿着数轴水平向右移动，移动后的正方形记为 $A'B'C'D'$ ，点 A, B, C, D 的对应点分别为 A', B', C', D' ，移动后的正方形 $A'B'C'D'$ 与原正方形 $ABCD$ 重叠部分的面积记为 S .



- ① 若 $a = 4, S = 2$ ，则数轴上点 A' 表示的数是_____；
 ② 若 $S = \sqrt{a}$ ，则数轴上点 A' 表示的数是_____ (用含 a 的代数式表示)。

考点 04 实数的综合应用

13. 已知： $a = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{1}$ ，那么 $\frac{3}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^3} =$ _____.

14. 设 x, y, z 是两两不等的实数，且满足下列等式：

$$\sqrt{x^3(y-x)^3} - \sqrt{x^3(z-x)^3} = \sqrt{y-x} - \sqrt{x-z}, \text{ 则 } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \text{ 的值为 } \underline{\quad}.$$

15. 若我们约定： $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，例如： $[3.1] = 3$ ， $[-2.5] = -3$ ， $[2] = 2$ ，记

$$s = \frac{[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + [\sqrt{100}]}{5}, \text{ 则 } [\sqrt{s}] \text{ 的值为 } (\quad)$$

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

16. 若用 $[x]$ 表示任意正实数的整数部分，例如： $[2.5] = 2$ ， $[2] = 2$ ， $[\sqrt{2}] = 1$ ，则式子

$[\sqrt{2}] - [\sqrt{3}] + [\sqrt{4}] - [\sqrt{5}] + \cdots + [\sqrt{2022}] - [\sqrt{2023}] + [\sqrt{2024}] - [\sqrt{2025}]$ 的值为 () (式子中的“+”，“-”依次相间)

- A. 67 B. -22 C. 68 D. -21

17. 设 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，例如： $[3.15] = 3$ ， $[3.7] = 3$ ， $[3] = 3$ ，则

$$[\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3}] + [\sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 4}] + [\sqrt[3]{3 \cdot 4 \cdot 5}] + \cdots + [\sqrt[3]{2000 \cdot 2001 \cdot 2002}] = \underline{\quad}.$$

18. 三个互不相等的负整数，若两两乘积的算术平方根都是整数，则称这三个数为“完美组合数”。例如：

-3 ， -12 ， -27 这三个数， $\sqrt{(-3) \times (-12)} = 6$ ， $\sqrt{(-3) \times (-27)} = 9$ ， $\sqrt{(-12) \times (-27)} = 18$ ，其结果 6 ， 9 ， 18

都是整数，所以 -3 ， -12 ， -27 这三个数称为“完美组合数”。若三个数 -5 ， m ， -20 是“完美组合数”，其中有两个数乘积的算术平方根为 20 ，则 m 的值为 ()

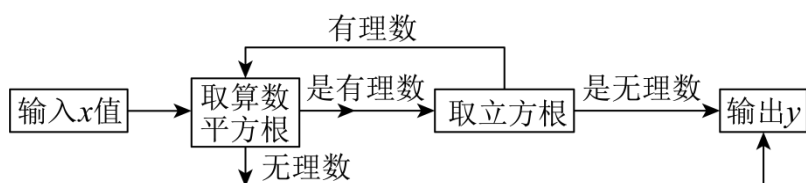
- A. -20 B. -80 C. -80 或 -20 D. 80 或 20

19. 观察下列算式： $a_1 = \sqrt{1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1} = 5$ ， $a_2 = \sqrt{2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1} = 11$ ， $a_3 = \sqrt{3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1} = 19$ ，...，它具有

一定的规律性，若把第 n 个算式的结果记为 a_n ，则 $\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \frac{1}{a_3+1} + \cdots + \frac{1}{a_{2024}+1}$ 的值是 ()

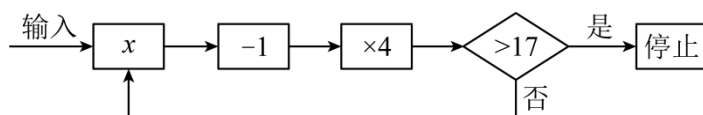
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2025}$ C. $\frac{2023}{4050}$ D. $\frac{506}{1013}$

20. 在如图所示的运算程序中，输入 x 的值是 64 时，输出的 y 值是 ()



- A. $\sqrt[3]{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 8

21. 按照如下程序操作，规定：从“输入一个值 x ”到“结果是否大于 17”为一次程序操作．如果结果得到的数小于或等于 17，则用得到的这个数进行下一次操作．



- (1) 若 $x=3$ 时，程序进行了_____次操作就停止了；
 (2) 若 $x=\sqrt{35}$ 时，则输出的数为_____；
 (3) 若程序操作进行了两次才停止，则输入的 x 的取值范围是_____；

22. 类比平方根和立方根，我们定义 n 次方根为：一般地，如果 $x^n = a$ ，那么 x 叫 a 的 n 次方根，其中 $n > 1$ ，且 n 是正整数．例如：因为 $(\pm 3)^4 = 81$ ，所以 ± 3 叫 81 的四次方根，记作： $\pm \sqrt[4]{81} = \pm 3$ ，下列结论中正确的是 ()

- A. 负数 a 有偶数次方根 B. 32 的 5 次方根是 ± 2
 C. $\sqrt[2024]{a^{2024}} = a$ D. 当 n 为奇数时，2 的 n 次方根随 n 的增大而减小

23. 课堂上老师提出一个问题：“一个数是 74088，它的立方根是多少？”小明脱口而出：“42”．老师十分惊奇，忙问计算的奥妙．小明给出以下方法：

- ①由 $10^3 = 1000$ ， $100^3 = 1000000$ ，能确定 $\sqrt[3]{74088}$ 是两位数；
 ②由 74088 的个位上的数是 8，因为 $2^3 = 8$ ，能确定 $\sqrt[3]{74088}$ 的个位上的数是 2；
 ③如果划去 74088 后面的三位 088 得到数 74，而 $4^3 = 64$ ， $5^3 = 125$ ，由此能确定 $\sqrt[3]{74088}$ 的十位上的数是 4．(提示： $6^3 = 216, 7^3 = 343, 8^3 = 512, 9^3 = 729$)

已知 $\sqrt[3]{493039}$ 为整数，请利用以上方法，则 $\sqrt[3]{493039}$ 的每位数上的数字之和为 ()

- A. 15 B. 16 C. 17 D. 19

24. 据说我国著名数学家华罗庚在一次出国访问途中，看到飞机上邻座的乘客阅读的杂志上有一道智力题：一个数是 59319，希望求出它的立方根．华罗庚脱口而出：39．邻座的乘客十分惊奇，忙问计算的奥妙．

你知道华罗庚是怎样计算的吗？请按照下面的问题试一试：

- (1) 由 $10^3 = 1000, 100^3 = 1000000$ ，试确定 $\sqrt[3]{19683}$ 是 _____ 位数；
- (2) 由 19683 个位数是 3，试确定 $\sqrt[3]{19683}$ 个位数是 _____；
- (3) 如果划去 19683 后面的三位数 683 得到数 19，而 $2^3 = 8, 3^3 = 27$ ，由此你能确定 $\sqrt[3]{19683}$ 十位的数字是 _____；
- (4) 用上述方法确定 110592 的立方根是 _____。

考点 05 二次根式的综合应用

25. 已知 $x = \frac{1}{\sqrt{2021} - \sqrt{2020}}$ ，则 $x^6 - 2\sqrt{2020}x^5 - x^4 + x^3 - 2\sqrt{2021}x^2 + 2x - \sqrt{2021}$ 的值为 ()
- A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2020}$ D. $\sqrt{2021}$
26. 已知 $x = \frac{1}{\sqrt{2020} - \sqrt{2019}}$ ，则 $x^6 - 2\sqrt{2019}x^5 - x^4 + x^3 - 2\sqrt{2020}x^2 + 2x - \sqrt{2020}$ 的值为 ()
- A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2019}$ D. $\sqrt{2020}$
27. 设 a 为 $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ 的小数部分，b 为 $\sqrt{6+3\sqrt{3}} - \sqrt{6-3\sqrt{3}}$ 的小数部分，则 $\frac{2}{b} - \frac{1}{a}$ 的值为 ()
- A. $\sqrt{6} + \sqrt{2} - 1$ B. $\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1$ C. $\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1$ D. $\sqrt{6} + \sqrt{2} + 1$
28. 当 $x=4$ 时， $\frac{\sqrt{x-2\sqrt{3}}}{\sqrt{x^2-4\sqrt{3}x+12}} - \frac{\sqrt{x+2\sqrt{3}}}{\sqrt{x^2+4\sqrt{3}x+12}}$ 的值为 ()
- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3
29. 已知 x、y、z 为有理数，且等式 $x + \sqrt{2}y + \sqrt{5}z = \sqrt{7-2\sqrt{10}}$ 成立，则 $3x - 998y + 1024z$ 的值是 ()
- A. 2020 B. 2021 C. 2022 D. -2022
30. 对于已知三角形的三条边长分别为 a, b, c，求其面积的问题，中外数学家曾经进行过深入研究，古希腊的几何学家海伦给出求其面积的海伦公式： $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ，其中 $p = \frac{a+b+c}{2}$ ，若一个三角形的三边长分别为 2, 3, 4，则其面积 ()
- A. $\frac{3}{4}\sqrt{15}$ B. $\frac{3}{2}\sqrt{15}$ C. $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ D. $\frac{3}{4}\sqrt{5}$
31. 按照一定次序排列的一列数叫数列，一般用 $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ 表示一个数列，可简记为 $\{a_n\}$ ，现有数列

$\{a_n\}$ 满足一个关系式 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} =$ _____ .

32 . 已知 $y = \sqrt{x-8} + \sqrt{8-x} + 18$, 求代数式 $\frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{2xy}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}$ 的值为_____ .

33 . 已知 x, y 满足 : $1 < x < y < 100$, 且 $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - \sqrt{2009x} - \sqrt{2009y} + \sqrt{2009xy} = 2009$, 则 $\sqrt{xy} =$ _____ .

34 . 已知 $x = \sqrt{4-\sqrt{12}}$, 则 $\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) \cdot \frac{x^2-4}{2(x-1)} =$ _____

35 . 若 $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10$, 则 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} =$ _____.

36 . 已知 $\sqrt{120\sqrt{6} + 540\sqrt{10} + 144\sqrt{15} + 2118}$ 可写成 $\sqrt{2a} + \sqrt{3b} + \sqrt{5c}$ 的形式 (a, b, c 为正整数) , 则 $abc =$ _____.

37 . 设 $s = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{1999^2} + \frac{1}{2000^2}}$, 求不超过 s 的最大整数 $[s] =$ _____ .

38 . 设 $a_1 = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}, a_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}, a_3 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}, \dots, a_n = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$, 其中 n 为正整数 , 则

$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \dots + \sqrt{a_{2021}} =$ _____ .