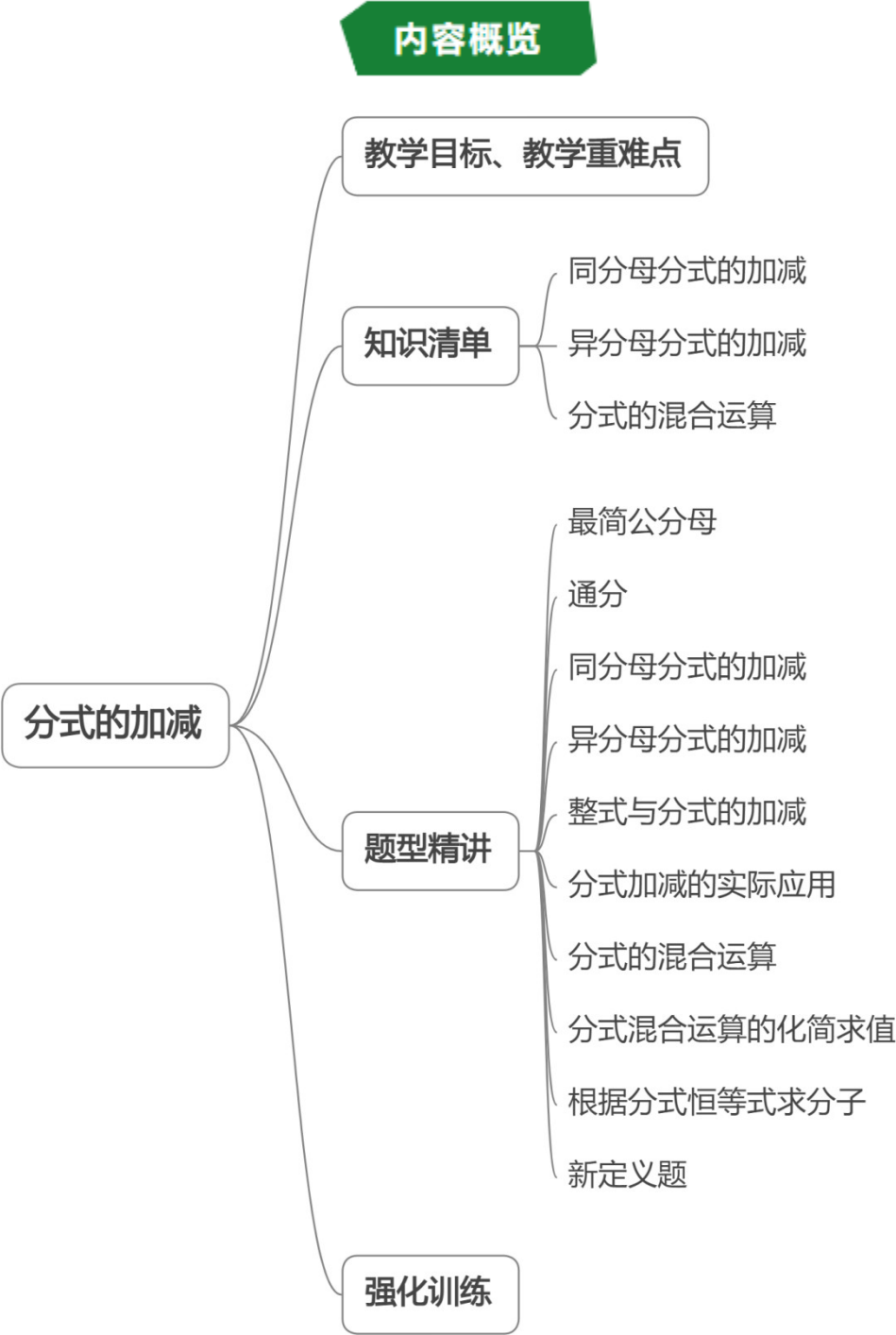


专题 13.3 分式的加减



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 寻找分式的最简公分母，并学会通分; 2. 掌握同分母分式的加减法; 3. 会进行异分母分式的加减法;
------	---

	4. 知道分式的加减乘除混合运算。
教学重难点	1.重点 (1) 分式的加减运算； (2) 根据分式加减运算进行化简、求值等； (3) 分式加减运算的实际应用。 2.难点 (1) 分式的加减有关化简、变形、求值问题等； (2) 分式混合运算的综合应用。

知识清单

知识点 1 同分母分式的加减

同分母分式的加减：

同分母分式相加减，分母不变，把分子相加减；

上述法则可用式子表为：

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

要点：

(1) “把分子相加减”是把各分式的分子的整体相加减，即各个分子都应用括号，当分子是单项式时，括号可以省略；当分子是多项式时，特别是分子相减时，括号不能省，不然，容易导致符号上的错误。

(2) 分式的加减法运算的结果必须化成最简分式或整式。

【即学即练】

1. 计算 $\frac{2x}{x+1} + \frac{2}{x+1}$ 的结果等于 ()

A. 2

B. x

C. x+1

D. $\frac{2}{x+1}$

2. 计算 $\frac{4x+3}{2x+1} - \frac{1}{2x+1}$ 的结果等于 ()

A. 2

B. x

C. $\frac{4x+4}{2x+1}$

D. $\frac{3}{4x^2+1}$

3. 计算 $\frac{2m}{2m+n} - \frac{m-n}{n+2m}$ 的结果是 ()

A. $\frac{m+n}{n+2m}$

B. $\frac{m-n}{n+2m}$

C. $\frac{3m-n}{n+2m}$

D. $\frac{3m+n}{n+2m}$

知识点2 异分母分式的加减

一、分式的通分

异分母分数相加减，先将它们转化为分母相同的分数，再利用同分母分数的加减法法则进行计算. 异分母分式的加减与之类似. 将几个异分母分式分别化为与原来分式的值相等的同分母分式的过程叫作通分..

要点：

- (1) 通分的关键是确定各分式的最简公分母：一般取各分母所有因式的最高次幂的积作为公分母.
- (2) 如果各分母都是单项式，那么最简公分母就是各系数的最小公倍数与相同字母的最高次幂的乘积；如果各分母都是多项式，就要先把它们分解因式，然后再找最简公分母.
- (3) 约分和通分恰好是相反的两种变形，约分是对一个分式而言，而通分则是针对多个分式而言.

二、异分母分式的加减

异分母分式相加减，先通分，变为同分母的分式，再加减.

上述法则可用式子表为：

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

- 要点：** (1) 异分母的分式相加减，先通分是关键. 通分后，异分母的分式加减法变成同分母分式的加减法.
- (2) 异分母分式加减法的一般步骤：①通分，②进行同分母分式的加减运算，③把结果化成最简分式.

【即学即练】

1. 分式 $\frac{1}{x^2y}$ 和 $\frac{3}{xyz}$ 的最简公分母为 ()

- A. xy B. xyz C. x^2yz D. x^2y^2z

2. $\frac{m+2}{m-1}$, $\frac{5}{m+2}$ 的最简公分母是_____，通分的结果为_____.

3. 计算 $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{1-x}$ 的结果是 ()

- A. 2 B. $x+1$ C. $\frac{1}{x^2-1}$ D. $\frac{1}{1-x}$

4. 计算：

(1) $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

(2) $a - b + \frac{2b^2}{a+b}$

知识点3 分式的混合运算

分式的混合运算：

与分数的加、减乘、除混合运算一样，分式的加、减乘、除混合运算，也是先算乘、除，后算加、减；遇到括号，先算括号内的，按先小括号，再中括号，最后大括号的顺序计算. 分式运算结果必须达到最简，

能约分的要约分，保证结果是最简分式或整式.

要点：(1) 正确运用运算法则：分式的乘除（包括乘方）、加减、符号变化法则是正确进行分式运算的基础，要牢牢掌握..

(2) 运算顺序：先算乘方，再算乘、除，最后算加、减，遇有括号，先算括号内的.

(3) 运算律：运算律包括加法和乘法的交换律、结合律，乘法对加法的分配律.能灵活运用运算律，将大大提高运算速度.

【即学即练】

1. 化简

$$(1) \frac{2m-n}{n-m} + \frac{m}{m-n} + \frac{n}{n-m}$$

$$(2) \frac{m^2-2m+1}{m^2-1} \div \left(m-1 - \frac{m-1}{m+1} \right)$$

2. 计算：

$$(1) \frac{2x^2}{x+1} - \frac{2}{x+1} ;$$

$$(2) \frac{a-3b}{a-b} - \frac{a+b}{b-a} ;$$

$$(3) \frac{24}{x^2-16} + \frac{3}{4-x} ;$$

$$(4) \frac{a^2}{a-2} - a - 2 .$$

题型精讲

题型 01 最简公分母

【典例 1】 . 分式 $\frac{1}{x^2y}$ 和 $\frac{3}{xyz}$ 的最简公分母为 ()

A . xy

B . xyz

C . x^2yz

D . x^2y^2z

【变式 1】 . 分式 $\frac{2}{4x-4}$ 与 $\frac{1}{1-x}$ 的最简公分母是 ()

A . $x-1$

B . $4(x-1)$

C . $4(x-1)^2$

D . $-4(x-1)^2$

【变式 2】 . 分式 $\frac{2}{x+2}$ 与分式 $\frac{2x}{x^2-4}$ 的最简公分母是 ()

A . $(x+2)^2$

B . $(x-2)^2$

C . $(x+2)(x-2)$

D . $(x+2)(x^2-4)$

题型 02 通分

【典例 1】 . 通分：

(1) $\frac{b}{a-b}$, $\frac{a}{a+b}$.

(2) $\frac{x}{6ab^2}$, $\frac{y}{9a^2bc}$.

【变式 1】 . 通分：

(1) $\frac{2}{3x^2}$ 与 $\frac{1}{4x}$

(2) $\frac{1}{a+2}$ 与 $\frac{1}{a-2}$.

【变式 2】 . $\frac{a-1}{a^2+2a+1}$ 与 $\frac{5}{1-a^2}$ 通分的结果是_____ .

题型 03 同分母分式的加减

【典例 1】 . 化简 $\frac{a+1}{a} - \frac{1}{a}$ 结果正确的是 ()

A . 1

B . a

C . $\frac{1}{4}$

D . $-\frac{1}{a}$

【变式 1】 . 计算 $\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-2}$ 的结果是 ()

A . $\frac{x}{x-2}$

B . $\frac{2}{x-2}$

C . 1

D . -1

【变式 2】 . 设 $m = \frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1}$, $n = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1}$, 则 m , n 的关系是 ()

A . $m = n$

B . $m > n$

C . $m < n$

D . $m + n = 0$

题型 04 异分母分式的加减

【典例1】. 计算： $\frac{2a}{5a^2b} + \frac{3b}{10ab^2} = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2ab}$ B. $\frac{7}{10b}$ C. $\frac{7}{10ab}$ D. $\frac{2a+3b}{10a^2b^2}$

【变式1】. 计算 $\frac{2m}{m-1} + \frac{2}{1-m}$ 的结果为 ()

- A. 2 B. m C. $\frac{m}{m-1}$ D. $\frac{2}{m^2-1}$

【变式2】. 化简 $\frac{1}{a-1} - \frac{2}{a^2-1}$ 的结果是 ()

- A. $\frac{a+2}{a^2-1}$ B. $\frac{1}{a-1}$ C. 1 D. $\frac{1}{a+1}$

题型 05 整式与分式的加减

【典例1】. 化简 $\frac{a^2-1}{a-1} - 2$ 的结果为 ()

- A. $a-3$ B. $a-1$ C. a^2-2a+1 D. $\frac{a^2-2a-3}{a-1}$

【变式1】. 计算 $a+1 + \frac{1}{a-1}$ 的结果是 ()

- A. $\frac{a^2}{a-1}$ B. $\frac{a}{a-1}$ C. $a-1$ D. a^2

【变式2】. 若 $x^2+3x=-1$ ，则式子 $x - \frac{1}{x+1}$ 的值是 ()

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

题型 06 分式加减的实际应用

【典例1】. 某工程队要修路 a 米，原计划平均每天修 b 米. 因天气原因，平均每天少修 c 米 ($c < b$) .

因此，实际完成工程的时间比原计划推迟的天数为 ()

- A. $\frac{ab}{b(b-c)}$ B. $\frac{ac}{b(b-c)}$ C. $\frac{ab}{b(b+c)}$ D. $\frac{ac}{b(b+c)}$

【变式1】. 绿化队原来用浸灌方式浇绿地， a 天用水 m 吨，现在改用喷灌方式，可使这些水多用 3 天，那么现在比原来每天节约用水的吨数为 ()

$$A. \frac{3a}{m} \quad B. \frac{am}{a+3} \quad C. \frac{3m}{a} \quad D. \frac{3m}{a(a+3)}$$

【变式2】 . 甲乙两个码头相距 s 千米，某船在静水中的速度为 a 千米/时，水流速度为 b 千米/时，则船一次往返两个码头所需的时间为 () 小时

$$A. \frac{2s}{a+b} \quad B. \frac{2s}{a-b} \quad C. \frac{s}{a} + \frac{s}{b} \quad D. \frac{s}{a+b} + \frac{s}{a-b}$$

题型 07 分式的混合运算

【典例1】 . 化简： $\left(x + 1 - \frac{3}{x-1}\right) \div \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1}$

【变式1】 . 化简： $\left(1 - \frac{5}{x+3}\right) \div \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 9}$.

【变式2】 . 计算：

$$(1) \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$(2) \frac{a-1}{a} \div \left(a - \frac{1}{a}\right)$$

【变式3】 . 计算：

$$(1) \left(\frac{2a}{b}\right)^2 \cdot \frac{1}{a-b} - \frac{a}{b} \div \frac{b}{4} ;$$

$$(2) \left(\frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x^2-4x+4}\right) \div \frac{x}{x-4} .$$

题型 08 分式混合运算的化简求值

【典例1】 . 先化简再求值： $\frac{x^2+x}{x^2-2x+1} \div \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x}\right)$ ，其中 $x = -2$.

【变式1】 . (1) 先化简，再求值： $\left(\frac{x-1}{x} - \frac{x-2}{x+1}\right) \div \frac{2x^2-x}{x^2+2x+1}$ ，其中 $x = -\frac{1}{2}$.

(2) 先化简，再求值： $\left(\frac{-6x}{x-3} - x + 3\right) \div \frac{x^2+9}{x} \div \frac{3x}{x^2-9}$ ，请从 -3 、 -2 、 0 、 3 中选取合适的 x 的值代入 .

题型 09 根据分式恒等式求分子

【典例1】. 若 $\frac{5x-7}{x^2-4x-5} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-5}$, 则 A 、 B 的值为 ()

A . $A=3$, $B=-2$

B . $A=2$, $B=3$

C . $A=3$, $B=2$

D . $A=-2$, $B=3$

【变式1】. 已知 $\frac{11x}{-3x^2-14x+24} = \frac{A}{x+6} + \frac{B}{4-3x}$, 求 A , B 的值 .

【变式2】. 已知 $\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$ (A 、 B 、 C 是常数) , 求 A 、 B 、 C 的值 .

题型10 新定义题

【典例1】. 一个代数式只含有字母 x , y , 把 x 替换成 y , 把 y 替换成 x , 得到一个新的代数式 . 若不论 x , y 如何取值 , 新代数式的值与原代数式的值始终相等 , 则称其为对称式 . 例如 : 代数式 $\frac{x+y}{xy}$, 新代数式为 $\frac{y+x}{yx}$, 因为 $\frac{x+y}{xy} = \frac{y+x}{yx}$, 所以 $\frac{x+y}{xy}$ 是对称式 ; 而代数式 $\frac{x-y}{x}$, 新代数式为 $\frac{y-x}{y}$, 因为当 $x=2$, $y=1$ 时 , 代数式值为 $\frac{1}{2}$, 新代数式值为 -1 , 两者不相等 , 所以 $\frac{x-y}{x}$ 不是对称式 .

(1) 请判断 x^2y+xy^2 和 $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$ 是不是对称式 ? 模仿上面的格式说明理由 ;

(2) 关于字母 x , y 的代数式 $\frac{x+my}{xy} + \frac{x-y}{xy}$ (m 为常数) 是对称式 , 求 m 的值 .

【变式1】. 定义 : 若分式 A 与分式 B 的差等于它们的积 . 即 $A-B=AB$, 则称分式 B 是分式 A 的“友好分式” . 如 $\frac{1}{x+1}$ 与 $\frac{1}{x+2}$. 因为 $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$, $\frac{1}{x+1} \times \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$. 所以 $\frac{1}{x+2}$ 是 $\frac{1}{x+1}$ 的“友好分式” .

(1) 填空 : 分式 $\frac{1}{x+4}$ —— 分式 $\frac{1}{x+3}$ 的“友好分式” . (填“是”或“不是”)

(2) 已知分式 $\frac{2x+2}{3x+2}$ 是分式 A 的“友好分式” .

① 求分式 A 的表达式 ;

② 若整数 x 使得分式 A 的值是正整数 , 求分式 A 的值 .

【变式2】 . 如果分式 M 与分式 N 的差为常数 k , 且 k 为正整数 , 则称 M 为 N 的“差整分式” , 常数 k 称为“差整值” . 如分式 $M = \frac{x+1}{x}$, $N = \frac{1-x}{x}$, $M - N = \frac{x+1-(1-x)}{x} = 2$, 故 M 为 N 的“差整分式” , “差整值” .

(1) 以下各组分式中 , A 为 B 的“差整分式”的是—— (填序号) ;

① $A = \frac{1}{x}, B = \frac{1}{2x}$, ② $A = \frac{x-6}{x-2}, B = -\frac{x+2}{x-2}$, ③ $A = \frac{-2x-2}{x^2-1}, B = \frac{x-3}{x-1}$;

(2) 已知分式 $C = \frac{3x-4}{x-2}, D = \frac{G}{x^2-4}$, C 为 D 的“差整分式” , 且“差整值”为 2 , 求 G 所代表的代数式 ;

强化训练

一、单选题

1 . 计算 $\frac{2}{a} + \frac{3}{2a}$ 的结果为 ()

A . $\frac{5}{a}$

B . $\frac{5}{2a}$

C . $\frac{3}{a}$

D . $\frac{7}{2a}$

2 . 化简 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的结果是 ()

A . $\frac{2}{a+b}$

B . $\frac{1}{ab}$

C . $\frac{ab}{a+b}$

D . $\frac{a+b}{ab}$

3 . 化简 $\frac{1}{5-x} + \frac{10}{x^2-25}$ 的结果为 ()

A . $x+5$

B . $x-5$

C . $-\frac{1}{x+5}$

D . $\frac{1}{x+5}$

4 . 化简 $\frac{4}{x+2} + x-2$ 的结果是 ()

A . 1

B . $\frac{x^2}{x^2-4}$

C . $\frac{x}{x+2}$

D . $\frac{x^2}{x+2}$

5 . 下列各选项中 , 所求的最简公分母错误的是 ()

A . $\frac{1}{2x}$ 与 $\frac{1}{3x}$ 的最简公分母是 $6x$

B . $\frac{1}{2a^2b}$ 与 $\frac{2}{ab^3c}$ 的最简公分母是 $2a^2bc$

C. $\frac{1}{x^2-4}$ 与 $\frac{1}{x+2}$ 的最简公分母是 $(x+2)(x-2)$

D. $\frac{m}{3m-3n}$ 与 $\frac{n}{m-n}$ 的最简公分母是 $3(m-n)$

6. $\frac{x^{n+1}-x^{n-1}}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^2}$ 等于 ()

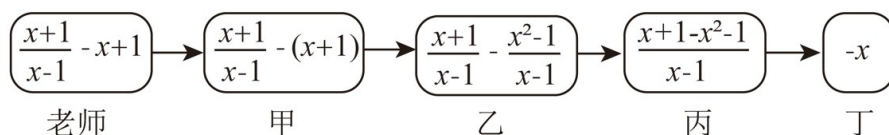
A. $\frac{1}{x^{n+1}}$

B. $\frac{1}{x^{n-1}}$

C. $\frac{1}{x^2}$

D. 1

7. 某校举办了“学习二十大精神，争做五育标兵”系列活动，其中一项数学活动是计算接力赛，规则是：每一个人只能看到前一个人给的式子，然后只计算一步，再把结果传给下一个人，最后完成计算，某组同学计算过程如下，出现错误的是 ()



A. 只有甲

B. 乙和丁

C. 丙和丁

D. 甲和丙

8. 已知 $x - \frac{1}{x} = 1$ ，则 $\frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}$ 的值是 ()

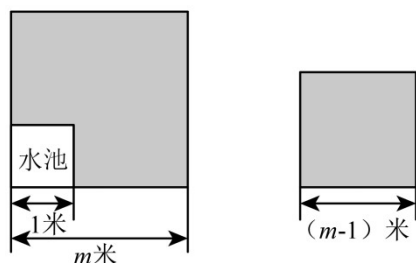
A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{1}{6}$

9. 如图，“丰收1号”小麦的试验田是边长为 m ($m > 1$) 米的正方形去掉一个边长为 1 米的正方形蓄水池后余下的部分，“丰收2号”小麦的试验田是边长为 $(m-1)$ 米的正方形，两块试验田的小麦都收获了 200 千克，那么“丰收1号”小麦和“丰收2号”小麦的单位面积产量相比，()



A. “丰收1号”高

B. “丰收2号”高

C. 一样高

D. 无法确定哪个高

10. 一组代数式 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 满足下面关系： $a_2 = 1 - \frac{1}{a_1}$, $a_3 = 1 - \frac{1}{a_2}$, $a_4 = 1 - \frac{1}{a_3}$, 以此类推，若

$a_1 = x^2$ ，则 a_{2025} 为 ()

- A. $\frac{1}{1-x^2}$ B. $\frac{x^2-1}{x^2}$ C. $\frac{x^2}{x^2-1}$ D. x^2

二、填空题

11. 计算： $\frac{y}{2x} - \frac{1}{2x} =$ _____.

12. 分式 $\frac{1}{a+2}$, $\frac{a}{2-a}$, $\frac{2}{a^2-4}$ 的最简公分母是_____.

13. 分式 $\frac{1}{x^2-3x}$ 与 $\frac{1}{x^2-9}$ 通分后的结果是_____.

14. 若 $\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ ，则 $B =$ _____.

15. 化简 $\left(\frac{2}{m^2-mn} + \frac{1}{m^2+mn} \right) \div \frac{1}{m^2-n^2}$ 的结果为_____.

16. 在计算 $\frac{m^2}{m+1} \div \frac{\otimes}{m+1}$ 时，把运算符号“ $\div$ ”看成了“ $-$ ”，得到的计算结果是 $m-1$ ，则 $\otimes$ 表示的数是_____.

17. 王老师驾车出行，在加油站加了 a 升汽油，经估算可行驶 m 天，由于行程调整，比计划多使用了 2 天，则王老师实际比计划平均每天少用汽油_____升。（写出化简后的结果）

18. 设有理数 a, b, c 都不为零，且 $a+b+c=0$ ，则 $\frac{2}{a^2+b^2-c^2} + \frac{2}{b^2+c^2-a^2} + \frac{2}{c^2+a^2-b^2}$ 的值为_____.

三、解答题

19. 通分：

(1) $\frac{3c}{4a^2b}$ 与 $\frac{c}{3ab^2}$ ；

(2) $\frac{ab}{a^2-b^2}$ 与 $\frac{b}{a^2+ab}$.

20 . 通分 :

$$(1) x-y, \frac{2y^2}{x+y};$$

$$(2) \frac{a}{a^2-b^2}, \frac{b}{2b-2a};$$

$$(3) \frac{2}{9-3a}, \frac{a-1}{a^2-9}, \frac{9}{a^2-6a+9}.$$

21 . 计算 :

$$(1) \frac{5a+3b}{a+b} + \frac{3b-4a}{a+b} - \frac{a+3b}{a+b}$$

$$(2) \frac{5m-n}{n^2-mn} + \frac{n}{mn-n^2} - \frac{3m}{n^2-mn}$$

$$(3) \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x^2-4} + \frac{x-1}{x+2}$$

$$(4) a-b + \frac{2b^2}{a+b}$$

$$(5) \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4}.$$

$$22 . \text{先化简,再求值:} \left(\frac{2a+1}{a} + a \right) + \frac{a^2-1}{a}, \text{其中 } a=2.$$

23 . 老师所留的作业中有这样一个分式的计算题: $\frac{2}{x+1} + \frac{x+5}{x^2-1}$, 甲、乙两位同学完成的过程分别如下:

甲同学:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+1} + \frac{x+5}{x^2-1} \\ &= \frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+5}{(x+1)(x-1)} \quad \text{第一步} \\ &= \frac{2+x+5}{(x+1)(x-1)} \quad \text{第二步} \\ &= \frac{x+7}{(x+1)(x-1)} \quad \text{第三步} \end{aligned}$$

乙同学:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+1} + \frac{x+5}{x^2-1} \\ &= \frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+5}{(x+1)(x-1)} \quad \text{第一步} \\ &= 2x-2+x+5 \quad \text{第二步} \\ &= 3x+3 \quad \text{第三步} \end{aligned}$$

老师发现这两位同学的解答都有错误：甲同学的解答从第——步开始出现错误；乙同学的解答从第——步开始出现错误；请重新写出完成此题的正确解答过程。

24. 甲、乙两人同时在一个超市分两次购买同一种水果，甲每次都买了²⁰千克水果，乙每次都用²⁰元去买水果，两次水果的价格分别为 a 元/千克和 b 元/千克（ a 、 b 为正整数且 $a \neq b$ ），谁的购买方式更合算？请说明理由。

25. 【阅读理解】“作差法”是解决某些数学问题常用的方法之一：比较代数式 M 、 N 的大小，作差 $M-N$ ，若 $M-N > 0$ ，则 $M > N$ ；若 $M-N = 0$ ，则 $M = N$ ；若 $M-N < 0$ ，则 $M < N$ 。

【方法尝试】

(1) 试比较大小， $\frac{7}{8}$ —— $\frac{8}{9}$ （填“>”、“<”或“=”）；

(2) 若 $n > 0$ ，试比较 $\frac{n+1}{n}$ 与 $\frac{n+2}{n+1}$ 的大小；

【解决问题】

(3) 原有糖水 a 克，其中含糖 b 克（ $0 < b < a$ ），则原糖水的“甜度”可用 $\frac{b}{a}$ 表示，现向糖水中加入 n 克糖（ $n > 0$ ），糖水的“甜度”可用 $\frac{b+n}{a+n}$ 表示，请你用数学知识解释为什么“在一定质量的糖水中，加入一定质量的糖，糖水会变得更甜呢”？