

## 第 21 章 一元二次方程 单元测试卷·强化卷

(考试时间：100 分钟 试卷满分：150 分)

一、选择题：(本大题共 10 题，每题 4 分，共 40 分.下列各题四个选项中，有且只有一个选项是正确的.)

1. 下列方程是一元二次方程的是 ( )

A.  $ax^2 + bx + c = 0$

B.  $3x^4 - 2x^2 = 1$

C.  $x^3 - 2x - 4 = 0$

D.  $(x-1)^2 - 1 = 0$

2. 一元二次方程  $(x-3)^2 = 25$  的根是 ( )

A.  $x_1 = 8, x_2 = -2$

B.  $x_1 = -5, x_2 = 5$

C.  $x_1 = -8, x_2 = -2$

D.  $x_1 = -8, x_2 = 2$

3. 用配方法解一元二次方程  $x^2 - 6x + 8 = 0$  配方后得到的方程是 ( )

A.  $(x+6)^2 = 28$

B.  $(x-6)^2 = 28$

C.  $(x+3)^2 = 1$

D.  $(x-3)^2 = 1$

4. 若关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + 2x + m + 1 = 0$  有一个根为  $-2$ ，则  $m$  的值为 ( )

A.  $-2$

B.  $-1$

C.  $1$

D.  $2$

5. 下列一元二次方程的解法中，正确的是 ( )

A.  $(x-3)(x-5) = 10 \times 2, \therefore x-3 = 10, x-5 = 2, \therefore x_1 = 13, x_2 = 7$

B.  $(2-5x) + (2-5x)^2 = 0, \therefore (5x-2)(5x-3) = 0, \therefore x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{3}{5}$

C.  $(x+2)^2 + 4x = 0, \therefore x_1 = 2, x_2 = -2$

D.  $x^2 = x$  两边同除以  $x$ ，得  $x = 1$

6. 某超市一月份的营业额为 200 万元，第一季度的营业额共 1000 万元，如果平均每月增长率为  $x$ ，则由

题意列方程应为 ( )

A.  $200(1+x)^2 = 1000$

B.  $200 + 200 \times 2 \cdot x = 1000$

C.  $200 + 200 \times 3 \cdot x = 1000$

D.  $200[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 1000$

7. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $(k-1)x^2 + 2x + 1 = 0$  有实数根，则  $k$  的取值范围是 ( )

A.  $k \leq 2$  且  $k \neq 1$

B.  $k < 2$  且  $k \neq 1$

C.  $k \leq 2$

D.  $k < 2$

8. 已知  $x_1, x_2$  是一元二次方程  $x^2 - x - 2 = 0$  的两个根，则  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  的值是 ( )

A. 1

B.  $\frac{1}{2}$

C. -1

D.  $-\frac{1}{2}$

9. 已知  $\triangle ABC$  为等腰三角形，已知它的两条边的长度分别是方程  $2x^2 - 7x + 5 = 0$  的两个根，那么该三角形

的周长是 ( )

A.  $\frac{9}{2}$  或 6

B.  $\frac{9}{2}$

C. 5

D. 6

10. 关于  $x$  的一元二次方程  $a_1(x-m)^2 + n = 0$  与  $a_2(x-m)^2 + n = 0$  称为“同族二次方程”. 如

$2(x-3)^2 - 4 = 0$  与  $3(x-3)^2 - 4 = 0$  就是“同族二次方程”. 现有关于  $x$  的一元二次方程  $2(x-1)^2 - 1 = 0$  与

$(a+1)x^2 + (b-2)x - 2 = 0$  是“同族二次方程”，那么代数式  $ax^2 + bx + 2024$  能取的最大值是 ( )

A. 2023

B. 2024

C. 2025

D. 2026

二、填空题（本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。）

11. 关于  $x$  的方程  $(a+1)x^{a^2+1} + x - 5 = 0$  是一元二次方程，则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$  .

12. 一元二次方程  $x^2 - 2x - 5 = 0$  的判别式的值是  $\underline{\hspace{2cm}}$  .

13. 在实数范围内因式分解： $-2x^2 - 2x + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$  .

14. 如果  $3x^2 + 6x - 8$  的值与  $2x^2 - 1$  的值相等，则  $x = \underline{\hspace{2cm}}$  .

15. 在解一元二次方程  $x^2 + px + q = 0$  时，小明看错了系数  $p$ ，解得方程的根为  $1$  和  $3$ ；小红看错了系数  $q$ ，解得方程的根为  $4$  和  $2$ ，则  $p = \underline{\hspace{2cm}}$  .

16. 某班“课后服务”开设数学兴趣班，参与学生人数  $x$  满足方程  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+30} = 0.07$ ，则  $x = \underline{\hspace{2cm}}$  .

17. “六一”儿童节上，某小队建议每位同学向其他同学赠送  $1$  句祝福语，结果小队内共收到  $210$  句祝福语，设小队共有  $x$  人，那么根据题意所列方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$  .

18. 如果关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有两个实数根，且其中一个根为另外一个根的  $2$  倍，则称这样的方程为“倍根方程”，以下关于“倍根方程”的说法，正确的有  $\underline{\hspace{2cm}}$ （填序号）.

①方程  $x^2 - x - 2 = 0$  是“倍根方程”；

②若  $(x-2)(mx+n) = 0$  是“倍根方程”，则  $4m^2 + 5mn + n^2 = 0$ ；

③若  $p, q$  满足  $pq = 2$ ，则关于  $x$  的方程  $px^2 + 3x + q = 0$  是“倍根方程”；

④若方程  $ax^2 + bx + c = 0$  是“倍根方程”，则必有  $2b^2 = 9ac$  .

三、解答题：（本大题共 11 题，共 78 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

19. 已知关于  $x$  的方程  $(m^2 - 1)x^2 - (m + 1)x + m = 0$ .

(1)  $m$  为何值时，此方程是一元一次方程？

(2)  $m$  为何值时，此方程是一元二次方程？并写出一元二次方程的二次项系数及常数项.

20. 解方程： $\frac{2}{x-3} = \frac{5}{x^2-9} - 1$ .

21. 用适当方法解下列方程：

(1)  $(2x-1)^2 = 9$  ;

(2)  $12x^2 - 45x - 525 = 0$  ;

(3)  $(3x-1)^2 - (x+1)^2 = 0$  ;

(4)  $(x-2)^2 + x(x-2) = 0$  ;

(5)  $\frac{1}{2}x^2 - 5\sqrt{2}x + 1 = 0$  ;

(6)  $0.3x^2 + 0.5x = 0.3x + 2.1$  .

22. 已知  $x_1$  ,  $x_2$  是方程  $2x^2 - 5x + 1 = 0$  的两实数根，求下列各式的值.

(1)  $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$  ;

(2)  $|x_1 - x_2|$  .

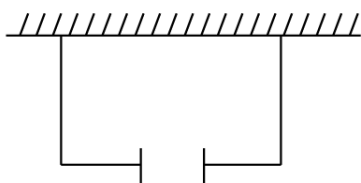
23. 已知：关于  $x$  的一元二次方程  $(m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0 (m > 1)$  .

( 1 ) 求证：方程总有两个不相等的实数根 .

(2)  $m$  为何整数时，此方程的两个实数根都为正整数。

24. 某工程队接到一道路改建任务，需为盲人修建一条长  $3000$  米的盲道。根据要求，该工程队在实际施工时增加了施工人员，每天修建的盲道比原来计划多  $250$  米，结果提前  $2$  天完成工程。问实际每天修建盲道多少米。

25. 如图，小明家要建一个面积为  $150$  平方米的养鸡场，养鸡场的一边靠墙，另三边（门除外）用竹篱笆围成。这堵墙长  $18$  米，在与墙平行的一边，要开一扇  $2$  米宽的门。已知围建养鸡场的竹篱笆总长为  $33$  米（没有剩余材料，接头忽略不计），那么小明家养鸡场的长和宽应分别为多少米？



26. 在国家积极政策的鼓励下，环保意识日渐深入人心，新能源汽车的市场需求逐年上升。

(1) 某汽车企业  $2020$  年到  $2022$  年这两年新能源汽车的销售总量增长了  $96\%$ 。求该汽车企业这两年新能源汽车销售总量的平均年增长率；

(2) 某汽车企业下属的一个专卖店经销一款进价为  $15$  万元/辆的新能源汽车，经销一段时间后发现：当该款汽车售价定为  $25$  万元/辆时，平均每周售出  $8$  辆；售价每降低  $0.5$  万元，平均每周多售出  $1$  辆。若该店计划下调售价使平均每周的销售利润为  $96$  万元，并且尽量让利于顾客，求下调后每辆汽车的售价。

27. 在数学学习中，运用整体思想能将运算变得简单。

例如，在计算 $(x-y-3)(x-y+3)$ 时就可以将 $x-y$ 看成一个整体，式子转化为：

$$(x-y)^2 - 3^2 = x^2 - 2xy + y^2 - 9$$

．请借助整体思想完成：

(1)  $(x+y-3)(x-y+3) =$  \_\_\_\_\_ ；

(2)  $(x^2+y^2+2)(x^2+y^2-2) = 77$  ，求  $x^2+y^2 =$  \_\_\_\_\_ ；

(3) 已知  $(x+2024)^2 + (x+2026)^2 = 100$  ，求  $x+2025$

28．阅读下列材料，完成相应任务：

我们已经学习过利用“配方法、公式法、因式分解法”解一元二次方程，对于关于 $x$ 的一元二次方程

$$x^2 + px + q = 0$$

，还可以利用下面的方法求解．

将方程整理，得  $x(x+p) = -q$  . . . . . 第 1 步

变形得  $\left(x + \frac{p}{2} - \frac{p}{2}\right)\left(x + \frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right) = -q$  . . . . . 第 2 步

得  $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q$  . . . . . 第 3 步

于是得  $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  ，即  $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4}$  . . . . . 第 4 步

当  $p^2 - 4q \geq 0$  时，得  $x + \frac{p}{2} = \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$  . . . . . 第 5 步

得  $x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$  ,  $x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$  . . . . . 第 6 步

当  $p^2 - 4q < 0$  时，该方程无实数解 . . . . . 第 7 步

学习任务：

(1) 上述材料的第2步到第3步依据的一个数学公式是——；以第4步到第5步将一元二次方程“降次”

为两个一元一次方程，体现的数学思想主要是——。

(2) 请用材料中提供的方法，解下列方程：

$$\textcircled{1} x^2 + 10x + 9 = 0 ; \quad \textcircled{2} 2x^2 + 6x - 3 = 0 .$$

29. 阅读材料：

材料1：一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ,  $b^2 - 4ac \geq 0$ ) 的两根  $x_1, x_2$  有如下的关系 (韦达定理)：

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

材料2：有些数学问题虽然表面与一元二次方程无关，但是我们能够通过构造一元二次方程，并利用一元

二次方程的有关知识将其解决。下面介绍两种基本构造方法：

方法1：利用根的定义构造。例如，如果实数  $m, n$  满足  $m^2 - m - 1 = 0$ 、 $n^2 - n - 1 = 0$ ，且  $m \neq n$ ，则可将  $m$ 、

$n$  看作是方程  $x^2 - x - 1 = 0$  的两个不相等的实数根。

方法2：利用韦达定理逆向构造。例如，如果实数  $a, b$  满足  $a + b = 3$ 、 $ab = 2$ ，则可以将  $a, b$  看作是方程

$x^2 - 3x + 2 = 0$  的两实数根。

根据上述材料解决下面问题：

(1) 已知实数  $m, n$  满足  $3m^2 - m - 2 = 0$ 、 $3n^2 - n - 2 = 0$ ，求  $\frac{n}{m} + \frac{m}{n}$  的值。

(2) 已知实数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  满足  $a+b=c-5$ 、 $ab=\frac{16}{5-c}$ ，且  $c<5$ ，求  $c$  的最大值。