

专题 01 因式分解 压轴题

题型归纳

题型一：利用因式分解简便运算

题型二：求值问题

题型三：十字相乘法的分类讨论

题型四：新定义题

题型五：最值问题

题型六：分组分解法；添项法

题型七：十字相乘法的应用

题型八：因式分解的几何应用

题型专练

题型一：利用因式分解简便运算

1. 已知 $a = -\frac{2017 \times 2017 - 2017}{2016 \times 2016 + 2016}$, $b = -\frac{2018 \times 2018 - 2018}{2017 \times 2017 + 2017}$, $c = -\frac{2019 \times 2019 - 2019}{2018 \times 2018 + 2018}$, 则 $abc = (\quad)$

A. -1 B. 3 C. -3 D. 1

2. 计算：
$$\frac{(10^4 + 64)(18^4 + 64)(26^4 + 64)(34^4 + 64)}{(6^4 + 64)(14^4 + 64)(22^4 + 64)(30^4 + 64)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

题型二：求值问题

3. 已知 x, y, z 满足 $x - z = 12$, $xz + y^2 = -36$, 则 $x + 2y + z$ 的值为 ()

A. 4 B. 1 C. 0 D. -8

4. 已知 $a - b = b - c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 11$, 则 $ab + bc + ac = (\quad)$

A. 22 B. 1 C. 7 D. 11

5. 已知正数 a, b 满足 $a^3b + ab^3 - 2a^2b + 2ab^2 = 7ab - 8$, 则 $a^2 - b^2 = (\quad)$

A. 1 B. 3 C. 5 D. 不能确定

6. 若 $a = 2019x + 2020, b = 2019x + 2021, c = 2019x + 2022$, 则代数式 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ 的值是 ()
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

题型三：十字相乘法的分类讨论

7. 若 $x^2 + ax + 18$ 能分解成两个因式的积, 则整数 a 的取值可能有 ()
- A. 4 个 B. 6 个 C. 8 个 D. 无数个
8. 已知二次三项式 $x^2 - kx - 15$ 能分解成系数为整数的两个一次因式的积, 则整数 k 的取值有 ()
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
9. 已知 $x^2 - ax - 24$ 在整数范围内可以分解因式, 则整数 a 的值有_____个

题型四：新定义题

10. 如果一个正整数能表示为两个连续偶数的平方差, 那么称这个正整数为“神秘数”. 如 $4 = 2^2 - 0^2$, $12 = 4^2 - 2^2$, $20 = 6^2 - 4^2$, 因此 4, 12, 20 都是“神秘数”, 则下面哪个数是“神秘数” ()
- A. 56 B. 60 C. 62 D. 88

11. 定义: 如果一个正整数能表示为两个连续正奇数的平方差, 那么称这个正整数为“登高数”, 例如:
- $8 = 3^2 - 1^2$, $16 = 5^2 - 3^2$, $24 = 7^2 - 5^2$, 因此 8, 16, 24 都是“登高数”.

(1) 特例感知: 判断 40 是否为“登高数”, 说明理由.

(2) 规律探究: 根据“登高数”的定义, 设两个连续正奇数为 $2k-1$ 和 $2k+1$, 其中 k 是正整数, 那么“登高数”都能被 8 整除吗? 如果能, 说明理由; 如果不能, 举例说明.

(3) 拓展应用: 求不超过 2000 的所有“登高数”的和.

12. 19 世纪的法国数学家苏菲·热门给出了一种分解因式 $x^4 + 4$ 的方法: 他抓住了该式只有两项, 而且属于平方和 $(x^2)^2 + 2^2$ 的形式, 要使用公式就必须添一项 $4x^2$, 随即将此项 $4x^2$ 减去, 即可得

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2),$$

人们为了纪念苏菲·

热门给出这一解法, 就把它叫做“热门定理”.

根据以上方法, 把下列各式因式分解:

(1) $4x^4 + y^4$;

$$(2) a^2 - 4am - n^2 + 4mn .$$

13 . 阅读理解：

条件①：无论代数式 A 中的字母取什么值， A 都不小于常数 M ；条件②：代数式 A 中的字母存在某个取值，使得 A 等于常数 M ；我们把同时满足上述两个条件的常数 M 叫做代数式 A 的下确界。

例如：

$$x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 5 = (x+1)^2 + 4 ,$$

$$\because (x+1)^2 \geq 0 ,$$

$$\therefore x^2 + 2x + 5 \geq 4 \text{ (满足条件①)}$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } x^2 + 2x + 5 = 4 \text{ (满足条件②)}$$

$$\therefore 4 \text{ 是 } x^2 + 2x + 5 \text{ 的下确界 .}$$

又例如：

$$x^2 + 2|x| + 5 = |x|^2 + 2 \cdot |x| \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 5 = (|x|+1)^2 + 4 , \text{ 由于 } |x| \neq -1 , \text{ 所以 } x^2 + 2|x| + 5 \neq 4 , \text{ (不满足条件②)}$$

$$\text{故 } 4 \text{ 不是 } x^2 + 2|x| + 5 \text{ 的下确界 .}$$

请根据上述材料，解答下列问题：

$$(1) \text{求 } x^2 - 6x + 4 \text{ 的下确界 .}$$

$$(2) \text{若代数式 } 2x^2 + mx + 3 \text{ 的下确界是 } 1 , \text{ 求 } m \text{ 的值 .}$$

$$(3) \text{求代数式 } \frac{3}{2}x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y + 10 \text{ 的下确界 .}$$

题型五：最值问题

14 . 若一个数是一个整数的平方，则称这个数是完全平方数，类似地，整式 $a^2 + 2ab + b^2$ 及 $a^2 - 2ab + b^2$ 称做完全平方式。如果一个整式不是完全平方式，我们常做如下变形：先添加一个适当的项，使式子中出现完全平方式，再减去这个项，使整个式子的值不变，这种方法叫做配方法。配方法是一种重要的解决问题的数学方法，不仅可以将一个看似不能分解的整式分解因式，还能解决一些与非负数有关的问题或求代数式最大值，最小值等。

$$\text{例如：分解因式 } x^2 + 2x - 3 .$$

$$\text{原式} = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x + 1)^2 - 2^2 = (x + 1 + 2)(x + 1 - 2) = (x + 3)(x - 1) ;$$

例如：求代数式 $2x^2 + 4x - 6$ 的最小值 .

$$\text{原式} = 2x^2 + 4x - 6 = 2(x^2 + 2x - 3) = 2(x + 1)^2 - 8 . \text{ 可知当 } x = -1 \text{ 时, } 2x^2 + 4x - 6 \text{ 有最小值, 最小值是 } -8 .$$

(1) 用配方法分解因式： $a^2 + 2a - 8$;

(2) 当 x 为何值时，整式 $-2x^2 - 8x + 5$ 有最大值，并求出这个最大值 .

(3) 求使得 $m^2 + m + 7$ 是完全平方数的所有整数 m 的积 .

15 . 我们把整式 $a^2 + 2ab + b^2$ 及 $a^2 - 2ab + b^2$ 叫做完全平方式，如果一个整式不是完全平方式，我们常做如下变形：先添加一个适当的项，使式子中出现完全平方式，再减去这个项，使整个式子的值不变，这种方法叫做配方法，配方法是一种重要的解决问题的数学方法，不仅可以将一个看似不能分解的整式分解因式，还能解决一些与非负数有关的问题或求代数式最大值，最小值等 .

$$\text{例如：分解因式 } x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x + 1)^2 - 4 = (x + 1 + 2)(x + 1 - 2) = (x + 3)(x - 1)$$

$$\text{例如：求代数式 } 2x^2 + 4x - 6 \text{ 的最小值 } 2x^2 + 4x - 6 = 2(x^2 + 2x - 3) = 2(x + 1)^2 - 8 . \text{ 可知}$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } 2x^2 + 4x - 6 \text{ 有最小值, 最小值是 } -8 .$$

根据阅读材料用配方法解决下列问题：

(1) 分解因式： $m^2 - 6m - 16 = \underline{\hspace{1cm}}$;

(2) 若 a, b 满足 $a^2 + b^2 - 4a + 6b + 13 = 0$ ，求 b^a 的值；

(3) 已知 $P = \frac{7}{15}m - 1, Q = m^2 - \frac{8}{15}m$ (m 为任意实数)，比较 P, Q 的大小；

(4) 当 x, y 为何值时，整式 $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 10y + 29$ 有最小值，并求出这个最小值 .

16 . 我们把整式 $a^2 + 2ab + b^2$ 和 $a^2 - 2ab + b^2$ 叫作完全平方式 . 如果一个整式不是完全平方式，我们常做如下变形：先添加一个适当的项，使式子中出现完全平方式，再减去这个项，使整个式子的值不变，这种方法叫作配方法 . 配方法是一种重要的解决问题的数学方法，不仅可以将一个看似不能分解的整式分解因式，还能解决一些与非负数有关的问题或求代数式的最大值、最小值等 .

$$\text{例如：分解因式 } x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x + 1)^2 - 4 = (x + 1 + 2)(x + 1 - 2) = (x + 3)(x - 1) .$$

$$\text{例如：求整式 } 2x^2 + 4x - 6 \text{ 的最小值, 由 } 2x^2 + 4x - 6 = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 6 = 2(x + 1)^2 - 8 \text{ 可知, 当 } x = -1 \text{ 时,}$$

整式 $2x^2 + 4x - 6$ 有最小值，最小值是 -8 .

根据阅读材料用配方法解决下列问题：

(1) 分解因式： $m^2 - 4m - 5 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 当 a, b 为何值时，整式 $a^2 + b^2 - 4a + 6b + 18$ 有最小值？并求出这个最小值 .

(3) 当 a, b 为何值时，整式 $a^2 - 2ab + 2b^2 - 4b + 27$ 有最小值？并求出这个最小值 .

题型六：分组分解法；添项法

17 . 八年级课外兴趣小组活动时，老师提出了如下问题：将 $2a - 3ab - 4 + 6b$ 因式分解 .

【观察】经过小组合作交流，小明得到了如下的解决方法：

解法一：原式 $= (2a - 3ab) - (4 - 6b) = a(2 - 3b) - 2(2 - 3b) = (2 - 3b)(a - 2)$;

解法二：原式 $= (2a - 4) - (3ab - 6b) = 2(a - 2) - 3b(a - 2) = (a - 2)(2 - 3b)$.

【感悟】对项数较多的整式无法直接进行因式分解时，我们可以将整式分为若干组，再利用提公因式法、公式法达到因式分解的目的，这就是因式分解的分组分解法 . 分组分解法在代数式的化简、求值及方程、函数等学习中起着重要的作用 . (温馨提示：因式分解一定要分解到不能再分解为止)

【类比】(1) 请用分组分解法将 $x^2 - a^2 + x + a$ 因式分解；

【挑战】(2) 请用分组分解法将 $ax + a^2 - 2ab - bx + b^2$ 因式分解；

(3) 若 $a^2 + b^2 = 9$, $a - b = 2$, 请用分组分解法先将 $a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + b^4$ 因式分解，再求值 .

18 . 阅读下列文字与例题，并解答：

将一个整式分组进行因式分解后，可用提公因式法或公式法继续分解的方法称作分组分解法 .

例如：以下式子的分解因式的方法就称为分组分解法 .

$$a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc$$

$$\text{原式} = (a^2 + 2ab + b^2) + (ac + bc)$$

$$= (a + b)^2 + c(a + b)$$

$$= (a + b)(a + b + c)$$

(1) 试用“分组分解法”因式分解： $x^2 - y^2 + xz - yz$

(2) 已知四个实数 a, b, c, d , 满足 $a \neq b, c \neq d$, 并且 $a^2 + ac = 12k, b^2 + bc = 12k, c^2 + ac = 24k$,

$d^2 + ad = 24k$ ，同时成立。

①当 $k=1$ 时，求 $a+c$ 的值；

②当 $k \neq 0$ 时，用含 a 的代数式分别表示 b 、 c 、 d （直接写出答案即可）。

19. 阅读理解：

添项法是代数变形中非常重要的一种方法，在整式运算和因式分解中使用添项法往往会起到意想不到的作用，例如：

例 1：计算 $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$

解：原式 $= \frac{1}{2} (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$

$= \frac{1}{2} (3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$

$= \frac{1}{2} (3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$

.....

$= \frac{3^{64}-1}{2}$

例 2：因式分解： x^4+x^2+1

解：原式 $= x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2$

$= (x^2+1)^2 - x^2$

$= (x^2+1+x)(x^2+1-x)$

根据材料解决下列问题：

(1) 计算： $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})(1+\frac{1}{2^8})\cdots(1+\frac{1}{2^{512}})$ ；

(2) 小明在作业中遇到了这样一个问题，计算 $\frac{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4)\cdots(49^4+4)}{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)\cdots(51^4+4)}$ ，通过思考，他发现计算式

中的式子可以用代数式之 x^4+4 来表示，所以他决定先对 x^4+4 先进行因式分解，最后果然发现了规律；轻松解决了这个计算问题。请你根据小明的思路解答下列问题：

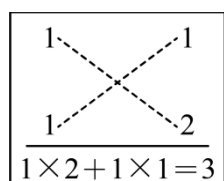
①分解因式： x^4+4 ；

②计算：
$$\frac{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4)\cdots(49^4+4)}{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)\cdots(51^4+4)}.$$

题型七：十字相乘法的应用

20. 材料1：将一个形如 $x^2 + px + q$ 的二次三项式因式分解时，如果能满足 $p = m + n$ 且 $q = mn$ ，则可以把 $x^2 + px + q$ 因式分解成 $(x+m)(x+n)$ 。例如 $x^2 + 3x + 2$ ，具体做法是先分解二次项系数，分别写在十字交叉线的左上角和左下角，再分解常数项，分别写在十字交叉线的右上角和右下角，然后交叉相乘，求代数和，使其等于一次项系数，这种方法称为“十字相乘法”。

这样，我们可以得到： $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ 。



材料2：分解因式： $(x+y)^2 + 2(x+y) + 1$

解：将“ $x+y$ ”看成一个整体，令 $x+y = K$ ，则原式 $= K^2 + 2K + 1 = (K+1)^2$ ，再将“ K ”还原，得：原式 $= (x+y+1)^2$

上述解题用到“整体思想”和“换元思想”，整体思想和换元思想是数学解题中常见的两种思想方法。

【迁移运用】

(1) 利用上述的十字相乘法，将下列整式分解因式：

① $x^2 + 5x + 6$ ；② $2x^2 + 2x - 12$

(2) 结合材料1和材料2，对下面小题进行因式分解：

① $(x-y)^2 + 4(x-y) + 3$ ；② $(2a+3b)^2 - 4(2a+3b) - 12$ 。

21. 【阅读与思考】：

整式乘法与因式分解是方向相反的变形。如何把二次三项式 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 分解因式呢？我们已经知道：

$$(a_1x + c_1)(a_2x + c_2) = a_1a_2x^2 + a_1c_2x + a_2c_1x + c_1c_2 = a_1a_2x^2 + (a_1c_2 + a_2c_1)x + c_1c_2. \text{ 反过来，就得到：}$$

$$a_1a_2x^2 + (a_1c_2 + a_2c_1)x + c_1c_2 = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2).$$

我们发现，二次三项式 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的二次项的系数 a 分解成 a_1a_2 ，常数项 c 分解成 c_1c_2 ，并且把 a_1 ，

a_2, c_1, c_2 如图 1 所示摆放，按对角线交叉相乘再相加，就得到 $a_1c_2 + a_2c_1$ ，如果 $a_1c_2 + a_2c_1$ 的值正好等于 $ax^2 + bx + c$ 的一次项系数 b ，那么 $ax^2 + bx + c$ 就可以分解为 $(a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$ ，其中 a_1, c_1 位于图的上一行， a_2, c_2 位于下一行。

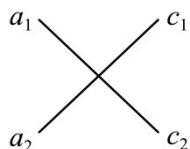


图1

像这种借助画十字交叉图分解系数，帮助我们把二次三项式分解因式的方法，通常叫做“十字相乘法”。

例如，将式子 $x^2 - x - 6$ 分解因式的具体步骤为：首先把二次项的系数 1 分解为两个因数的积，即 $1 = 1 \times 1$ ，把常数项 -6 也分解为两个因数的积，即 $-6 = 2 \times (-3)$ ；然后把 1, 1, 2, -3 按图 2 所示的摆放，按对角线交叉相乘再相加的方法，得到 $1 \times (-3) + 1 \times 2 = -1$ ，恰好等于一次项的系数 -1 ，于是 $x^2 - x - 6$ 就可以分解为 $(x+2)(x-3)$ 。

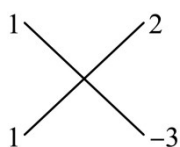


图2

(1) 请同学们认真观察和思考，用“十字相乘法”分解因式： $x^2 + x - 6 = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

【理解与应用】请你仔细体会上述方法并尝试对下面两个二次三项式进行分解因式：

(2) ① $2x^2 - 5x - 7 = \underline{\hspace{2cm}}$ ；② $12x^2 - 11xy + 2y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

【探究与拓展】

① 类比我们已经知道： $(a_1x + b_1)(a_2y + b_2) = a_1a_2xy + a_1b_2x + a_2b_1y + b_1b_2$ 。

反过来，就得到： $a_1a_2xy + a_1b_2x + a_2b_1y + b_1b_2 = (a_1x + b_1)(a_2y + b_2)$ 。

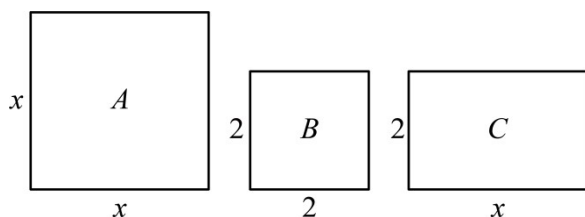
(3) 请你仔细体会上述方法并尝试下面进行分解因式：① $2xy + 3y + 2x + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

② 若 a, b 均为整数，且 a, b 满足 $6ab + 8b - 15a = 308$ ，求 $a + b$ 的值。

题型八：因式分解的几何应用

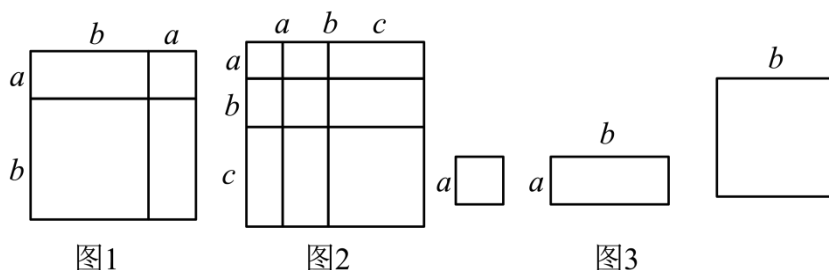
22. 如图，有 A 型，B 型，C 型三种不同的纸板。其中 A 型是边长为 x 的正方形，共有 1 块；B 型为边长

为 2 的正方形，共有 2 块；C 型是长为 x ，宽为 2 的长方形，共有 4 块。现用这 7 块纸板去拼出一个大的长方形（不重叠，不留空隙），则下列操作可行的是（ ）



- A. 用全部 7 块纸板 B. 加上 3 块 B 型纸板
C. 拿掉 2 块 C 型纸板 D. 加上 1 块 A 型纸板

23. 综合与实践：



【问题情境】（¹）对于一个图形，如图¹，通过两种不同的方法计算它的面积，可以得到一个数学等式——；

【探究实践】

（²）类比图¹，写出图²中所表示的数学等式——；

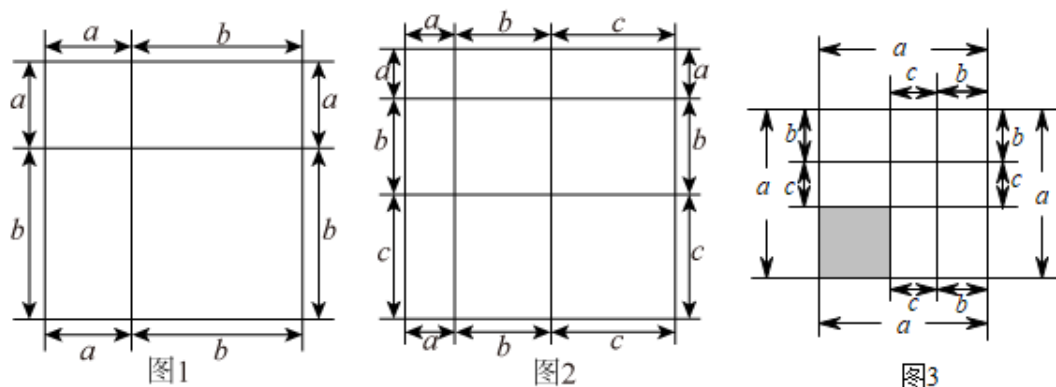
（³）利用（²）中得到的结论，解决问题：若 $a+b+c=8$ ， $ab+bc+ac=25$ ，求 $a^2+b^2+c^2$ 的值；

【拓展应用】

（⁴）用图³中 2 张边长为 a 的正方形，3 张边长为 b 的正方形， m 张边长分别为 a ， b 的长方形纸片拼出一个长方形或正方形，直接写出 m 的值。

24. 我们知道对于一个图形，通过不同的方法计算图形的面积可以得到一个数学等式。

例如：由图¹可得到 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



(1) 写出由图 2 所表示的数学等式：_____；

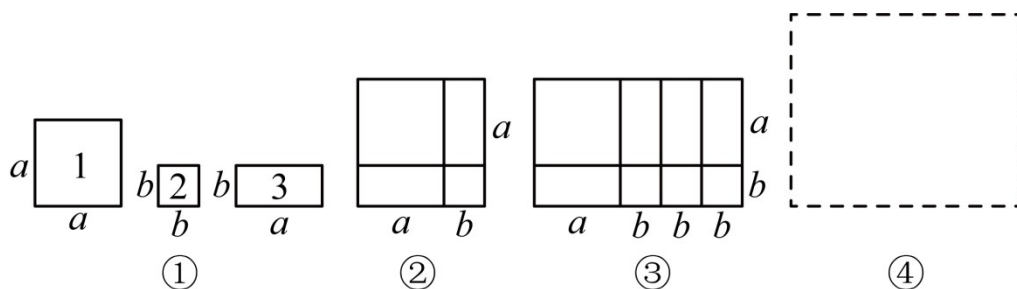
(2) 写出由图 3 所表示的数学等式 (利用阴影部分)：_____；

(3) 已知实数 a, b, c 满足 $a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=1$. 求：

① $ab+bc+ca$ 的值；

② $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的值 .

25. 小刚同学动手剪了如图①所示的正方形与长方形纸片若干张 . 他用 1 张 1 号、1 张 2 号和 2 张 3 号卡片拼出一个新的图形 (如图②) . 根据图②的面积关系可得等式： $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ，即使用拼图将 $a^2+2ab+b^2$ 分解因式 .



(1) 如果要拼成一个长为 $(a+2b)$ ，宽为 $(a+b)$ 的大长方形，则需要 2 号卡片_____张，3 号卡片_____张；

(2) 当他拼成如图③所示的长方形，根据图③的拼图可以把整式 $a^2+4ab+3b^2$ 分解因式，其结果是_____；

(3) 动手操作，请依照小刚的方法，在④的方框中画出面积为 $a^2+5ab+6b^2$ 的长方形拼图，并利用拼图分解因式 $a^2+5ab+6b^2$.

26. 【知识生成】用两种不同方法计算同一图形的面积，可以得到一个等式 .

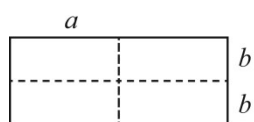


图1

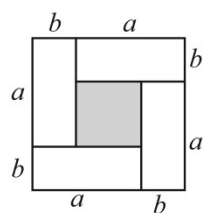


图2

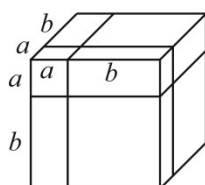


图3

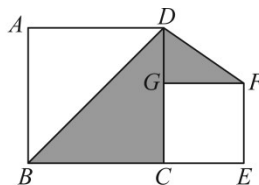


图4

(1) 【知识探究】如图 1，是用长为 $2a$ ，宽为 $2b$ 的长方形，沿图中虚线均分成四个小长方形，然后按照图 2 拼成一个正方形，可以得到 $(a-b)^2$ 、 $(a+b)^2$ 、 ab 三者之间的等量关系式：_____；

(2) 【知识迁移】类似的，用两种不同的方法计算同一个几何体的体积，也可以得到一个等式，如图 3，观察大正方体分割，写出可以得到的等式_____；若 $a+b=6$ ， $ab=7$ ，求 a^3+b^3 的值；

(3) 【拓展探究】如图 4，两个正方形 $ABCD$ 、 $CEFG$ 的边长分别为 x ， y ($x>y$) 若这两个正方形的面积之和为 34 ，且 $BE=8$ ，求图中阴影部分的面积。

27. 我国著名数学家华罗庚先生曾经说过：“数缺形时少直观，形少数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休。”可见，数形结合思想在解决数学问题，理解数学本质上发挥着重要的作用。在一节数学活动课上，老师带领同学们在拼图活动中探寻整式的乘法的奥秘。

情境一如下图，甲同学将 4 块完全相同的等腰梯形木片拼成如下两个图形，请你用含 a 、 b 的式子分别表示图 1 和图 2 中阴影部分的面积，并说明由此可以得到什么样的乘法公式；

情境一

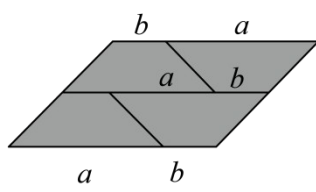
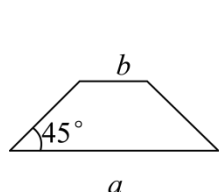


图1

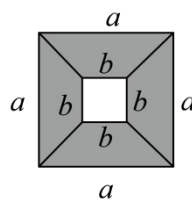
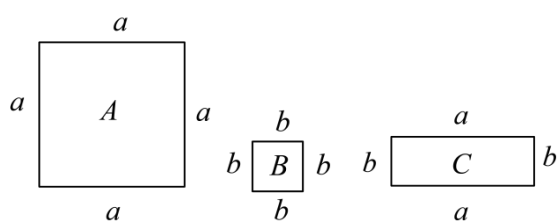


图2

情境二乙同学用 1 块 A 木片、4 块 B 木片和若干块 C 木片拼成了一个正方形，请直接写出所拼正方形的边长（用含 a 、 b 的式子表示），并求所用 C 木片的数量；

情境二



情境三丙同学声称自己用以上的 A , B , C 三种木片拼出了一个面积为 $2a^2 + 7ab + 4b^2$ 的长方形；丁同学认为丙同学的说法有误，需要从中去掉一块木片才能拼出长方形。

你赞同哪位同学的说法，请求出该情况下所拼长方形的长和宽，并画出相应的图形。（要求：所画图形的长、宽与图样一致，并标注每一小块的长与宽）。