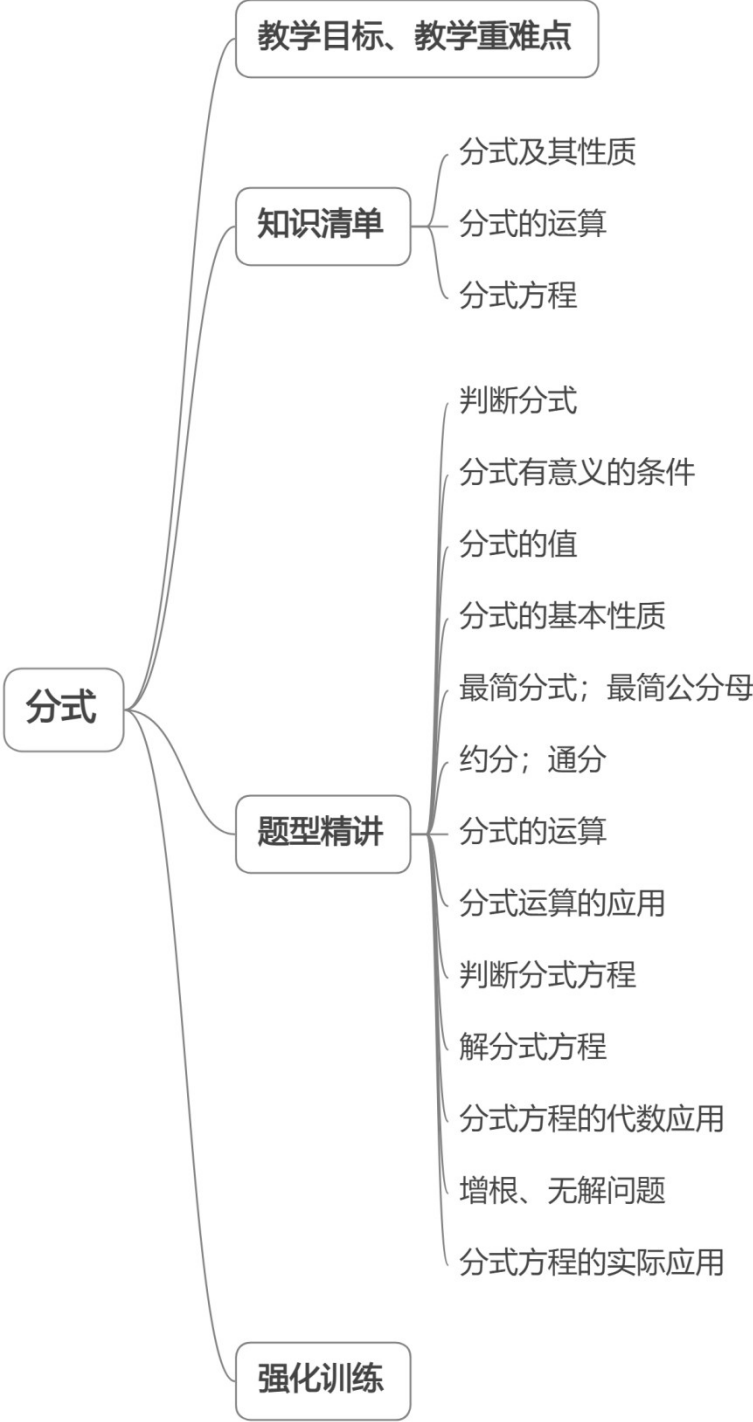


第 13 章 分式

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 知道分式的概念及有意义的条件； 2. 掌握分式的基本性质、最简分式、约分等； 3. 会进行分式的运算；整数指数幂的概念及其应用； 4. 分式方程的概念、解法、及其应用。
教学重难点	1.重点 (1) 分式的概念，分式的基本性质； (2) 分式的运算，整数指数幂； (3) 分式方程及其应用。 2.难点 (1) 分式运算有关化简、变形、求值等； (2) 分式、分式方程的综合应用； (3) 分类讨论思想。

知识清单

知识点 1 分式及其性质

一、分式的概念

一般地，对于两个整式 A 、 B (B 是非零整式)， $A \div B$ 可以表示为 $\frac{A}{B}$ 的形式， $\frac{A}{B}$ 叫作分式，也称为有理式，其中 A 称为分子， B 称为分母。本章主要讨论分母中含有字母的分式。

二、分式有意义，无意义或等于零的条件

1. 分式有意义的条件：分母不等于零。
2. 分式无意义的条件：分母等于零。
3. 分式的值为零的条件：分子等于零且分母不等于零。

三、分式的基本性质

分式的分子和分母乘(或除以)同一个整式，当该整式的值不为 0 时，分式的值不变，即

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M} \quad (M \neq 0), \quad \frac{A}{B} = \frac{A \div N}{B \div N} \quad (N \neq 0).$$

这个性质叫做分式的基本性质。

四、分式的变号法则

对于分式中的分子、分母与分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变；改变其中任何一个或三个，分式成为原分式的相反数。

要点：根据分式的基本性质有 $-\frac{b}{a} = \frac{b}{-a}$ ， $\frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}$ 。根据有理数除法的符号法则有 $\frac{-b}{a} = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$ 。分式 $\frac{a}{b}$

$-\frac{a}{b}$ 与 $\frac{a}{b}$ 互为相反数.分式的符号法则在以后关于分式的运算中起着重要的作用.

五、分式的约分，最简分式

1.约分

$\frac{-6xy^2}{10x^2y}$ 分子、分母的一个公因式，运用分式的基本性质，可以把分子、分母中的 $2xy$ 约去.像这样，把一个分式的分子与分母中的公因式约去的过程，叫作约分.

2.最简分式

分式 $\frac{2x}{3y}$ 、 $\frac{7}{x-y}$ 、 $\frac{1}{x-2}$ 的分子与分母没有一次及以上的公因式，这样的分式叫作最简分式. $\frac{6x}{9y}$ 与 $\frac{2x}{3y}$ 都是最简分式，习惯上，在结果中将 $\frac{6x}{9y}$ 化为 $\frac{2x}{3y}$.

注意：如无特殊说明，本章出现的分式的变形与运算，总是在分式有意义的前提下进行.

3.约分可以化简分式.如果分式的分子和分母是几个因式的积的形式，可约去相同因式.有时，需要先对分子、分母因式分解，再约分.分式的约分一般要使结果成为最简分式.

要点：

- (1) 约分的实质是将一个分式化成最简分式，即约分后，分式的分子与分母再没有公因式.
- (2) 约分的关键是确定分式的分子与分母的公因式.分子、分母的公因式是分子、分母的系数的最大公约数与相同因式最低次幂的积；当分式的分子、分母中含有多项式时，要先将其分解因式，使之转化为分子与分母是不能再分解的因式积的形式，然后再进行约分.

【即学即练】

1. 下列式子是分式的是 ()

- A. $\frac{1}{m}$ B. $\frac{x-2y}{16}$ C. $-\frac{1}{5}x + \frac{1}{7}xy$ D. $\frac{7}{5}$

2. 下列各式是最简分式的是 ()

- A. $\frac{a}{8}$ B. $\frac{a^2b}{a}$ C. $\frac{1}{x-y}$ D. $\frac{b-a}{b^2-a^2}$

3. 如果把分式 $\frac{3xy}{x+y}$ 中的 x ， y 都扩大到原来的 2 倍，那么分式的值 ()

- A. 不变 B. 扩大到原来的 2 倍
C. 缩小到原来的 $\frac{1}{2}$ D. 扩大到原来的 4 倍

4. 若分式 $\frac{x^2-16}{x+4}$ 的值为 0，则 x 的值为 ()

A . 4

B . -4

C . 4 或 -4

D . 3

知识点 2 分式的运算

一、分式的乘除法

1. 分式的乘法法则：分式乘分式，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母. 用字母表示为：

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

2. 分式的除法法则：分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘. 用字母表示为：

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

注：在本章中做分式除法时，总是默认除式的值不为 0.

二、分式的乘方

分式的乘方运算法则：分式的乘方是把分子、分母分别乘方，用字母表示为：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (n \text{ 为正整数}).$$

要点：

(1) 分式乘方时，一定要把分式加上括号. 不要把 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ 写成 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b}$

(2) 分式乘方时，要首先确定乘方结果的符号，负数的偶次方为正，负数的奇次方为负.

(3) 在一个算式中同时含有分式的乘方、乘法、除法时，应先算乘方，再算乘除，有多项式时应先分解因式，再约分.

(4) 分式乘方时，应把分子、分母分别看作一个整体. 如 $\left(\frac{a-b}{b}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{b^2} \neq \frac{a^2-b^2}{b^2}$.

三、同分母分式的加减

同分母分式的加减：

同分母分式相加减，分母不变，把分子相加减；

上述法则可用式子表为：

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

四、分式的通分

异分母分数相加减，先将它们转化为分母相同的分数，再利用同分母分数的加减法法则进行计算. 异分母分式的加减与之类似. 将几个异分母分式分别化为与原来分式的值相等的同分母分式的过程叫作通分..

五、异分母分式的加减

异分母分式相加减，先通分，变为同分母的分式，再加减.

上述法则可用式子表为：

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

要点：(1) 异分母的分式相加减，先通分是关键. 通分后，异分母的分式加减法变成同分母分式的加减法.

(2) 异分母分式加减法的一般步骤：①通分，②进行同分母分式的加减运算，③把结果化成最简分式。

六、零指数幂

任何不等于零的数的零次幂都等于 1，即 $a^0 = 1 (a \neq 0)$ 。

要点：同底数幂的除法法则可以推广到整数指数幂。即 $a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0, m, n \text{ 为整数})$ 当 $m = n$ 时，得到 $a^0 = 1 (a \neq 0)$ 。

七、负整数指数幂

任何不等于零的数的 $-n$ (n 为正整数) 次幂，等于这个数的 n 次幂的倒数，即 $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0, n \text{ 是正整数})$ 。

引进了零指数幂和负整数指数幂后，指数的范围已经扩大到了全体整数，以前所学的幂的运算性质仍然成立。

要点： $a^{-n} (a \neq 0)$ 是 a^n 的倒数， a 可以是不等于 0 的数，也可以是不等于 0 的代数式。例如 $(2xy)^{-1} = \frac{1}{2xy} (xy \neq 0)$ ， $(a+b)^{-5} = \frac{1}{(a+b)^5} (a+b \neq 0)$ 。

八、整数指数幂在幂的运算的应用

1. 同底数幂相除

当 m, n 是正整数且 $m < n$ 时，

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m \div a^m}{a^n \div a^m} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{m-n}.$$

因此，

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} (a \neq 0, m, n \text{ 是正整数}).$$

2. 同底数幂相乘

思考：当 $a \neq 0$ 时， $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 是否对任意整数 m, n 都成立？

下面我们先讨论 m 是任意整数且 n 是负整数的情况：

(1) 当 $m > 0$ 时，由 $-n$ 是正整数，得

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n};$$

(2) 当 $m=0$ 时，

$$a^m \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^{0+n} = a^{m+n};$$

(3) 当 $m < 0$ 时，由 $-m, -n$ 是正整数，得

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

综上所述，当 m 是任意整数且 n 是正整数或 0 时，也可以验证 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 是成立的.

3. 幂的运算综合

随着指数的取值范围由正整数扩大到全体整数，前面学过的正整数指数幂的运算性质也推广到了整数指数幂.

当 a 、 b 不为 0 时，对于整数指数幂，有

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$(2) (ab)^n = a^n b^n;$$

$$(3) (a^m)^n = a^{mn}.$$

【即学即练】

1. 化简 $\frac{4}{x+2} + x - 2$ 的结果是 ()

- A. 1 B. $\frac{x^2}{x^2-4}$ C. $\frac{x}{x+2}$ D. $\frac{x^2}{x+2}$

2. 将 $2x^2y^{-3}$ 表示成只含有正整数指数幂的形式： $2x^2y^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 计算： $(x^{-2} + y^{-2})^2 - (x^{-2} - y^{-2})^2$

4. 计算： $\frac{x^2+6x+9}{x^2+x-6} \div \left(\frac{5}{x-2} - x - 2\right)$

5. 按要求计算下列各题：

(1) 化简： $\left(\frac{2m}{m+2} - \frac{m}{m-2}\right) \div \frac{m}{m^2-4}$.

(2) 先化简，再求值： $\left(1 - \frac{1}{x}\right) \div \frac{x^2-2x+1}{x}$ ，其中 $x = -2$.

知识点 3 分式方程

一、分式方程、根与增根

1. 分式方程

分母里含有未知数的方程叫分式方程.

要点：(1) 分式方程的重要特征：①是等式；②方程里含有分母；③分母中含有未

知数.

(2) 分式方程和整式方程的区别就在于分母中是否有未知数(不是一般的字母系数).分母中含有未知数的方程是分式方程,分母中不含有未知数的方程是整式方程.

(3) 分式方程和整式方程的联系:分式方程可以转化为整式方程.

2.分式方程的根、增根及检验

分式方程的解也叫作分式方程的根.

在检验时只要把所求出的未知数的值代入最简公分母中,如果它使最简公分母的值不等于0,那么它是原分式方程的一个根;如果它使最简公分母的值等于0,那么它不是原分式方程的根,称它是原方程的增根.

要点: (1) 增根的产生的原因:对于分式方程,当分式中,分母的值等于零时,无意义,所以分式方程,不允许未知数取哪些使分母的值等于零的值,即分式方程本身就隐含着分母不为零的条件.当把分式方程转化为整式方程以后,这种限制取消了,换言之,方程中未知数的值范围扩大了,如果转化后的整式方程的根恰好是原方程未知数的允许值之外的值,那么就会出现增根.

(2) 检验增根的方法:把由分式方程化成的整式方程的解代入最简公分母,看最简公分母是否等于0,如果等于0,则是增根;如果不是0,则是原分式方程的根.

二、分式方程的解法

1.解分式方程的基本思想:将分式方程转化为整式方程.转化方法是方程两边都乘以最简公分母,去掉分母.在去分母这一步变形时,有时可能产生使最简公分母等于零的根,这种根叫做原方程的增根.因为解分式方程时可能产生增根,所以解分式方程时必须验根.

2.分式方程的一般步骤:

(1) 方程两边都乘以最简公分母,去掉分母,化成整式方程(注意:当分母是多项式时,先分解因式,再找出最简公分母);

(2) 解这个整式方程,求出整式方程的解;

(3) 检验:将求得的解代入最简公分母,若最简公分母不等于0,则这个解是原分式方程的解,若最简公分母等于0,则这个解不是原分式方程的解,原分式方程无解.

三、分式方程的应用

分式方程的应用主要就是列方程解应用题.

列分式方程解应用题按下列步骤进行:

(1) 审题了解已知数与所求各量所表示的意义,弄清它们之间的数量关系;

(2) 设未知数;

(3) 找出能够表示题中全部含义的相等关系,列出分式方程;

(4) 解这个分式方程;

(5) 验根,检验是否是增根;

(6) 写出答案.

要点: 1、列分式方程解应用题的一般步骤:设、列、解、验、答.必须严格按照这五步进行做题,规范解题步骤,另外还要注意完整性:如设和答叙述要完整,要写出单位等.

2、要掌握常见问题中的基本关系，如行程问题：速度=路程时间；工作量问题：工作效率=工作量
工作时间等等．列分式方程解应用题一定要审清题意，找相等关系是着眼点，要学会分析题意，提高理解能力．

【即学即练】

1．下列方程中，属于分式方程的是（ ）

A . $\frac{1}{x} = 2$ B . $\frac{x-9}{4} = \frac{x+5}{3}$ C . $\frac{x}{|x|-1}$ D . $xy-1=0$

2．解分式方程：

(1) $\frac{4}{x} = \frac{6}{x+2}$ ；

(2) $\frac{3-2x}{x-2} = \frac{x}{2-x} - 2$ ；

(3) $\frac{7}{x^2+x} - \frac{6}{x^2-1} = \frac{3}{x-x^2}$

3．关于 x 的方程 $\frac{2x}{x-2} + \frac{3+m}{2-x} = 3$ 有增根，那么 m 的值为（ ）

A . 2 B . 1 C . 0 D . -1

4．小明乘出租车去体育场，有两条路线可供选择：路线一的全程是 20 千米，但交通比较拥堵；路线二的全程是 27 千米，平均车速比走路线一的平均车速能提高 60% ，因此比走路线一少用 10 分钟到达．设走路线一的平均车速为 x 千米/小时，那么根据题意得（ ）

A . $\frac{27}{(1+60\%)x} - \frac{20}{x} = 10$ B . $\frac{20}{x} - \frac{27}{(1+60\%)x} = 10$

C . $\frac{27}{(1+60\%)x} - \frac{20}{x} = \frac{1}{6}$ D . $\frac{20}{x} - \frac{27}{(1+60\%)x} = \frac{1}{6}$

题型精讲

题型 01 判断分式

【典例 1】．下列各式是分式的是（ ）

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{x}{7}$ C. $\frac{x}{\pi}$ D. $\frac{5}{x}$

【变式 1】. 在 $\frac{1}{x}$, $\frac{a^2b}{2}$, $-3xy+y^2$, $\frac{m-n}{4}$, $\frac{b-c}{5+a}$, 分式的个数为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【变式 2】. 下列各式中, (1) $\frac{x}{2}$; (2) $\frac{3}{x}$; (3) $\frac{2xy}{x-y}$; (4) $\frac{3-y}{3}$; (5) $\frac{3x-1}{\pi}$ 属于分式的有

()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

题型 02 分式有意义的条件

【典例 1】. 使分式 $\frac{x+1}{x-2}$ 有意义的 x 的取值范围是 ()

- A. $x \neq 0$ B. $x \neq -1$ C. $x \neq 1$ D. $x \neq 2$

【变式 1】. 分式 $\frac{2}{4-2x}$ 有意义, 则 x 的取值范围为 ()

- A. $x > 2$ B. $x < 2$ C. $x = 2$ D. $x \neq 2$

题型 03 分式的值

【典例 1】. 若分式 $\frac{x}{3-x}$ 的值为 0, 则 x 的值为_____.

【变式 1】. 若分式 $\frac{x^2-4}{2-x}$ 的值为 0, 则 x 的取值是_____.

题型 04 分式的基本性质

【典例 1】. 分式 $\frac{3b}{a+b}$ (a 、 b 均为正数), 字母的值都扩大为原来的 2 倍, 则分式的值 ()

- A. 扩大为原来的 2 倍 B. 缩小为原来的 $\frac{1}{2}$
C. 不变 D. 缩小为原来的 $\frac{1}{4}$

【变式 1】. 下列分式从左到右变形正确的是 ()

$$A. \frac{-x+y}{2} = -\frac{x+y}{2}$$

$$B. \frac{a^2+4}{5a^2} = \frac{a+4}{5a}$$

$$C. \frac{3}{4a} = \frac{3+b}{4a+b}$$

$$D. \frac{x-y}{x+y} = \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$$

【变式2】. 下列化简运算不正确的是 ()

$$A. \frac{m-1}{m^2-1} = \frac{1}{m+1}$$

$$B. \frac{-1+n}{m} = -\frac{1+n}{m}$$

$$C. \frac{0.5a+b}{0.2a-0.3b} = \frac{5a+10b}{2a-3b}$$

$$D. \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} = \frac{x-y}{x+y}$$

题型 05 最简分式；最简公分母

【典例1】. 下列分式中是最简分式的是 ()

$$A. \frac{2x}{4x^2}$$

$$B. \frac{x-y}{x+y}$$

$$C. \frac{x^2+2x+1}{x+1}$$

$$D. \frac{1-x}{x-1}$$

【变式1】. 下列分式是最简分式的是 ()

$$A. \frac{a+b}{a^2+b^2}$$

$$B. -\frac{m^2}{mn^3}$$

$$C. -\frac{x^2-9y^2}{x^2-6xy+9y^2}$$

$$D. \frac{x^2-4}{x+2}$$

【变式2】. 分式 $\frac{b}{ax}$, $-\frac{c}{3bx}$, $\frac{a}{5x^3}$ 的最简公分母是_____.

【变式3】. 分式 $\frac{1}{x^2-9}$ 与 $\frac{1}{x^2-6x+9}$ 的最简公分母是_____.

题型 06 约分；通分

【典例1】. (1) 约分：

$$\textcircled{1} \frac{-24x^2y^3z}{8y^2z} ;$$

$$\textcircled{2} \frac{a^2-2a+1}{a^2-1} .$$

(2) 通分： $\frac{1}{x^2-y^2}$, $\frac{1}{x^2+xy}$.

【变式1】. 通分：

$$(1) \frac{3}{4a^2b}, \frac{1}{6b^2c}$$

$$(2) \frac{1}{x^2-x}, \frac{-1}{x^2-2x+1}.$$

题型 07 分式的运算

【典例 1】 . 计算：

$$(1) \frac{5x+3y}{x^2-y^2} - \frac{2x}{x^2-y^2};$$

$$(2) \left(m+2 + \frac{5}{2-m} \right) \cdot \frac{2m-4}{3-m}.$$

【变式 1】 . 下列计算不正确的是 ()

$$A. \frac{xy}{x^2-2xy+y^2} \div \frac{xy^2+x^2y}{x^2-y^2} = \frac{1}{x-y} \quad B. \left(\frac{3x}{-2y} \right)^2 \cdot \left(\frac{2y}{-3x} \right)^3 = -\frac{2y}{3x}$$

$$C. \frac{x^2+x}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x-1} = x \quad D. \frac{y}{x^2} \div \frac{(-y)^2}{x^2} = \frac{1}{xy}$$

【变式 2】 . 将代数式 $2^{-1}x^{-3}y^2$ 化为只含有正整数指数幂的形式_____.

【变式 3】 . 计算： $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)^{-3} \div (ab)^{-2}$

【变式 4】 . 化简： $(x^{-1}-y^{-1}) \div (x^{-2}-y^{-2}) - xy(x+y)^{-1}$

【变式 5】 . 先化简，再求值： $\left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \div \frac{x^2-4x+4}{x-1}$ ，其中 $x = -1$.

题型 08 分式运算的应用

【典例 1】 . 若 $\frac{5x-7}{x^2-4x-5} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-5}$ (其中 A, B 为常数)，则 $A =$ _____， $B =$ _____ .

【变式 1】 . 试卷上一个正确的式子 $\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b}\right) \cdot \text{①} = \left(\frac{2}{a+b}\right)$ 被小明同学不小心滴上墨汁，被墨汁遮住部

分★处的代数式为 ()

$$A. \frac{-b}{a-b}$$

$$B. \frac{b-a}{b}$$

$$C. \frac{a-b}{b}$$

$$D. \frac{-a}{a+b}$$

【变式2】 . 如果 $x = 3 - \frac{1}{x}$, 则 $\frac{x^2}{2x^4 + x^2 + 2}$ 的值等于_____ .

题型 09 判断分式方程

【典例1】 . 下列方程是分式方程的是 ()

- A . $\frac{x-1}{5} + \frac{3}{4} = 1$ B . $\frac{3}{\pi} + 2x = 3$ C . $\frac{1}{x} = 2$ D . $\frac{x+2}{x} - \frac{x+3}{3}$

【变式1】 . 下列方程不是分式方程的是 ()

- A . $\frac{x}{3} = \frac{6}{x}$ B . $\frac{10}{x} = \frac{5}{x-1}$ C . $\frac{3x}{x+1} = 2$ D . $\frac{x}{3} = \frac{x}{6} - 3$

【变式2】 . 在下列方程中 , 关于 x 的分式方程的个数有 ()

- ① $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + 4$; ② $\frac{x}{\pi} = 4$; ③ $\frac{\pi}{x} = 4$; ④ $\frac{x^2-9}{x+3} = 1$; ⑤ $\frac{1}{x+2}$; ⑥ $\frac{x-1}{\pi} + \frac{x-1}{\pi} = 2$.

- A . 2个 B . 3个 C . 4个 D . 5个

题型 10 解分式方程

【典例1】 . 解下列方程 :

(1) $\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x} = 0$;

(2) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{3}{x^2-1} = 1$.

【变式1】 . 解方程 :

(1) $\frac{3x+2}{x-1} = \frac{5}{x-1}$

(2) $\frac{2x}{x+3} + 1 = \frac{7}{2x+6}$

【变式2】 . 解方程 :

(1) $\frac{1-x}{x-2} = \frac{x}{2x-4} - 1$;

(2) $\frac{x}{x-3} + \frac{3}{x^2-9} = 1$.

题型 11 分式方程的代数应用

【典例1】 . 代数式 $\frac{x+1}{x}$ 与代数式 $\frac{1}{x-2}$ 的和为 1, 则 $x =$ _____ .

【变式1】 . 当 $x =$ _____ 时, 分式 $\frac{1}{x-2}$ 与 $\frac{1}{x+2}$ 的值互为相反数 .

【变式2】 . 小明同学解方程 $\frac{x}{x-2} - \frac{x-4}{2-x} = 1$ 的过程如下:

方程两边都乘 $x-2$, 得 $x+x-4=x-2$,

解得 $x=2$,

$\therefore x=2$ 是原方程的根,

你认为小明的解法对吗? 如果不对, 请写出正确的解题过程 .

【变式3】 . 小明准备完成题目: 解方程 $\frac{2}{*} + \frac{1}{x+2} = 0$. 发现分母的位置“*”处印刷不清, 查阅答案后得知

这个方程的解是 $x=-1$, 请你帮助小明推断印刷不清的位置可能是 ()

A . $x-1$

B . $-x-1$

C . $x+1$

D . x^2-1

题型12 增根、无解问题

【典例1】 . 若关于 x 的方程 $\frac{m-1}{x-1} - \frac{x}{x-1} = 0$ 有增根, 则 m 的值是_____ .

【变式1】 . 如果关于 x 的方程 $\frac{1}{x-3} = 3 - \frac{k}{3-x}$ 有增根, 那么 $k =$ _____ .

【变式2】 . 若关于 x 方程 $\frac{x-2}{x-3} = \frac{m}{x-3} + 2$ 无解, 则 m 的值是_____ .

题型13 分式方程的实际应用

【典例1】 . 某学生计划每天平均看书若干页, 则在预定日期可看完 300 页的书, 读了 15 天后, 改变计划每天多读 6 页, 结果比预定日期提前 2 天读完, 设该学生原计划每天读 x 页, 则可列方程: _____ .

【变式1】 . 某学校为了响应“绿色校园”倡议, 计划在若干个月内种植一定数量的树木, 使校园绿化总面积达到 180 平方米. 实际在种植时, 第一个月比原计划每个月多种植 10 平方米, 并且按照这个进度继续推进, 结果可以提前 3 个月完成目标. 求实际执行中每月种植的绿化面积是多少平方米?

【变式2】 . “半马苏河步道”是上海市普陀区依托苏州河岸线打造的城市滨水景观廊道, 全长 21 千米. 小普和小陀两位同学沿着该步道行走健身, 如果小普的平均步行速度比小陀的平均步行速度快 1 千米/时, 并

且小普比小陀提前⁴²分钟走完全程，请你分别求出小普和小陀的平均步行速度。

强化训练

一、单选题

- 如果将分式 $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ 中的 x 和 y 都扩大到原来的³倍，那么分式的值()
 - 扩大到原来的³倍
 - 扩大到原来的⁹倍
 - 不变
 - 无法确定
- 下列各式中是最简分式的是()
 - $\frac{x+y}{x^2+y^2}$
 - $\frac{a^2-4b^2}{a+2b}$
 - $-\frac{ab^3}{b}$
 - $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$
- 计算 $a+1+\frac{1}{a-1}$ 的结果是()
 - $\frac{a^2}{a-1}$
 - $\frac{a}{a-1}$
 - $a-1$
 - a^2
- 解分式方程 $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{6}{x^2-1}$ ，分以下四步，其中，错误的一步是()
 - 方程两边分式的最简公分母是 $(x-1)(x+1)$
 - 方程两边都乘以 $(x-1)(x+1)$ ，得整式方程 $2(x-1)+3(x+1)=6$
 - 解这个整式方程，得 $x=1$
 - 原方程得解为 $x=1$
- 某学校用⁴²⁰元到商场去购买“⁸⁴”消毒液，经过还价，每瓶便宜^{0.5}元，结果比原来多买了²⁰瓶，若设原价每瓶 x 元，则可列出方程()。
 - $\frac{420}{x-0.5}-\frac{420}{x}=20$
 - $\frac{420}{x}-\frac{420}{x-0.5}=20$
 - $\frac{420}{x}-\frac{420}{x-20}=0.5$
 - $\frac{420}{x-20}-\frac{420}{x}=0.5$
- 若 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a-b}$ ，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2$ 的值是()

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 1

D. -1

二、填空题

7. 当 x _____ 时，分式 $\frac{2}{5-x}$ 有意义。

8. 已知 $(2x-3)^{x+3} - 1 = 0$ ，则 $x =$ _____。

9. 已知分式 $\frac{x^2-1}{x-1}$ 的值为 0，则 x 的值为 _____。

10. 计算： $\frac{a}{5b} \div \frac{a^2}{b^3} =$ _____。

11. 将分式 $\frac{4x}{y(x+y)^2}$ 表示成不含分母的形式为 _____。

12. 已知 $a > 0, S_1 = \frac{1}{a}, S_2 = -S_1 - 1, S_3 = \frac{1}{S_2}, S_4 = -S_3 - 1, S_5 = \frac{1}{S_4} \dots$ 即当 n 为大于 1 的奇数时， $S_n = \frac{1}{S_{n-1}}$ ；当

n 为大于 1 的偶数时， $S_n = -S_{n-1} - 1$ 。则 $S_{2014} =$ _____。

三、解答题

13. 计算： $\frac{x^2-y^2}{x^2+6xy+5y^2} \cdot \frac{x+5y}{x^2-2xy+y^2}$ 。

14. 解方程： $\frac{1}{2x-1} + \frac{x-2}{3-6x} = \frac{1}{3}$ 。

15. (1) 计算： $\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x+2} \div \frac{x-2}{x+1}$

(2) 计算： $\frac{1}{2m} - \frac{1}{m-n} \left(\frac{m-n}{2m} - m+n \right)$

16. 先化简再求值： $\left(\frac{3a}{a^2-1} - \frac{1}{a-1} \right) \div \frac{2a-1}{a+1}$ ，其中 $a = \frac{1}{2}$ 。

17. 已知 $x + x^{-1} = 3$ 。

(1) 求 $x^2 + x^{-2}$ 的值。

(2) 求 $(x - x^{-1})^2$ 的值。

18. 某区为治理污水，需要铺设一段全长为 300 米的污水排放管道．铺设 120 米后，为了尽量减少施工对城市交通所造成的影响，以后每天铺设管道的长度比原计划增加 20%，结果共用 30 天完成这一任务．求原计划每天铺设管道的长度．

19. 随着虹桥综合交通枢纽的开工建设，“大虹桥”将成为上海“后世博”阶段重要的经济亮点，上海将形成东有“大浦东”，西有“大虹桥”的“双引擎”格局．现有一个工程，要整修一段全长为 1200 米的道路，为了尽量减少施工对城市交通造成的影响，实际工作效率比原来高了 20%，结果提前 4 小时完成任务，求原计划每小时修路的长度是多少米？

20. 在计算 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10}$ 的值时，大家可以利用裂项的思想方法，即

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

请你利用裂项的思路解决下列问题．

(1) 化简：
$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{(x+2004)(x+2005)}$$
；

(2) 解分式方程：
$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{2x} = 0$$
．

21. 如果两个分式的差为常数，我们称这两个分式互为“差离分式”，这个常数为差离值．如

$$\frac{3x+4}{x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{3x+3}{x+1} = 3, \text{ 所以 } \frac{3x+4}{x+1} \text{ 与 } \frac{1}{x+1} \text{ 互为“差离分式”，差离值为 } 3.$$

(1) 已知： $A = \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$ ， $B = \frac{1}{x-1}$ ，判断 A 与 B 是否互为“差离分式”．若是，求出差离值；若不是，请说明理由．

(2) 已知： $C = \frac{-2x+3}{2x-1}$ ， $D = \frac{E}{4x^2-1}$ ，若 C 与 D 互为“差离分式”，且差离值为 -1，求 E 所代表的代数式．

(3) 已知： $P = \frac{mx+12}{(x+2)^2}$ ， $Q = \frac{nx}{x+2}$ (m, n 为非零常数)，若 P 与 Q 互为“差离分式”，求 $\frac{n}{2n^2-m}$ 的值．