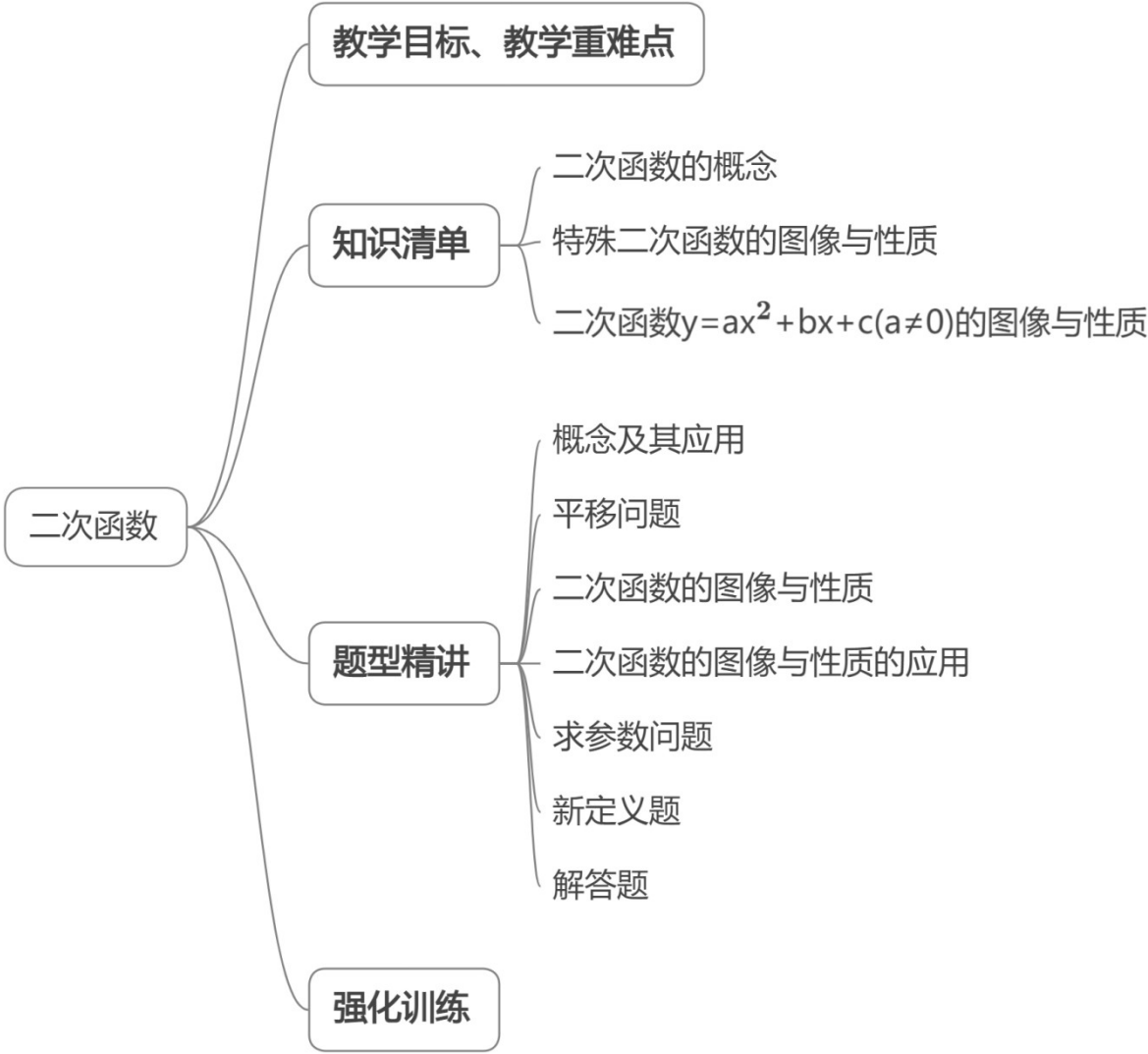


第 26 章 二次函数

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 二次函数的概念； 2. 特殊二次函数的图像与性质； 3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) 的图像与性质； 4. 二次函数的应用。
教学重难点	1.重点 (1) 二次函数的有关概念及其应用；

	(2) 数形结合研究二次函数的图像与性质； (3) 解决二次函数有关的实际问题与几何应用。 2. 难点 (1) 二次函数的图像与性质含参数问题； (2) 二次函数的综合应用；分类讨论思想。
--	---

知识清单

知识点1 二次函数的概念

1. 二次函数的概念

一般地，形如 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 的函数是二次函数。

若 $b=0$ ，则 $y=ax^2+c$ ；若 $c=0$ ，则 $y=ax^2+bx$ ；若 $b=c=0$ ，则 $y=ax^2$ 。

以上三种形式都是二次函数的特殊形式，而 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 是二次函数的一般式。

二次函数由特殊到一般，可分为以下几种形式：

① $y=ax^2$ ($a \neq 0$)；② $y=ax^2+k$ ($a \neq 0$)；③ $y=a(x-h)^2$ ($a \neq 0$)；④ $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0$)，其中

$h=-\frac{b}{2a}$, $k=\frac{4ac-b^2}{4a}$ ；⑤ $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)。

要点：如果 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$)，那么 y 叫做 x 的二次函数。这里，当 $a=0$ 时就不是二次函数了，但 b, c 可分别为零，也可以同时都为零。 a 的绝对值越大，抛物线的开口越小。

2. 二次函数解析式的表示方法

- 一般式： $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$)；
- 顶点式： $y=a(x-h)^2+k$ (a, h, k 为常数, $a \neq 0$)；
- 两根式： $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ ($a \neq 0$, x_1, x_2 是抛物线与 x 轴两交点的横坐标) (或称交点式)。

要点：任何二次函数的解析式都可以化成一般式或顶点式，但并非所有的二次函数都可以写成交点式，只有抛物线与 x 轴有交点，即 $b^2-4ac \geq 0$ 时，抛物线的解析式才可以用交点式表示。二次函数解析式的这三种形式可以互化。

【即学即练】

1. 下列函数中， y 是 x 的二次函数的是 ()

- A. $y=3x$ B. $y=-\frac{2}{x}$ C. $y=\frac{1}{x}+5$ D. $y=x^2-3x+5$

2. 下面问题中， y 与 x 满足的函数关系是二次函数的是 ()

①面积为 10cm^2 的矩形中，矩形的长 y 与宽 x 的关系；②底面圆的半径为 5cm 的圆柱中，侧面积 $y(\text{cm}^2)$ 与圆柱的高 x 的关系；③某商品每件进价为 80 元，在某段时间内以每件 x 元出售，可卖出 $(100-2x)$ 件，利润 y (元)与每件进价 x (元)的关系

- A. ① B. ② C. ③ D. ①③

3. 若 $y = (a-2)x^2 - 3x + 2$ 是关于 x 的二次函数，则 a 的取值范围是()

- A. $a \neq 2$ B. $a > 0$ C. $a > 2$ D. $a \neq 0$

4. 二次函数 $y = (x-2)(5-2x)$ 的一次项系数是_____.

5. 若函数 $y = (k-2)x^{|k|} + 3x + 1$ 表示 y 是 x 的二次函数，则 k 的值为_____.

知识点 2 特殊二次函数的图像与性质

一、二次函数 $y=ax^2(a \neq 0)$ 的图象的性质

1. 二次函数 $y=ax^2(a \neq 0)$ 的图象

用描点法画出二次函数 $y=ax^2(a \neq 0)$ 的图象，如图，它是一条关于 y 轴对称的曲线，这样的曲线叫做抛物线.

2. 二次函数 $y=ax^2(a \neq 0)$ 的图象的画法

用描点法画二次函数 $y=ax^2(a \neq 0)$ 的图象时，应在顶点的左、右两侧对称地选取自变量 x 的值，然后计算出对应的 y 值，这样的对应值选取越密集，描出的图象越准确.

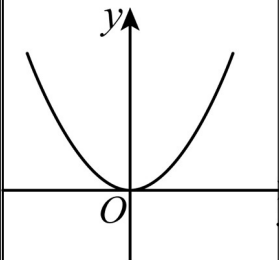
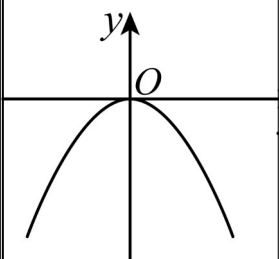
要点：二次函数 $y=ax^2(a \neq 0)$ 的图象. 用描点法画二次函数 $y=ax^2(a \neq 0)$ 的图象，该图象是轴对称图形，对称轴是 y 轴. $y=ax^2(a \neq 0)$ 是最简单的二次函数，把 $y=ax^2(a \neq 0)$ 的图象左右、上下平行移动可以得到 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的图象.

画草图时应抓住以下几点：开口方向，对称轴，顶点，与 x 轴的交点，与 y 轴的交点.

3. 二次函数 $y=ax^2(a \neq 0)$ 的图象的性质

二次函数 $y=ax^2(a \neq 0)$ 的图象的性质，见下表：

函数	图象	开口方向	顶点坐标	对称轴	函数变化	最大(小)值
----	----	------	------	-----	------	--------

$y=ax^2$	$a>0$		向上	$(0, 0)$	y 轴	$x>0$ 时, y 随 x 增大而增大; $x<0$ 时, y 随 x 增大而减小.	当 $x=0$ 时, $y_{\text{最小}}=0$
$y=ax^2$	$a<0$		向下	$(0, 0)$	y 轴	$x>0$ 时, y 随 x 增大而减小; $x<0$ 时, y 随 x 增大而增大.	当 $x=0$ 时, $y_{\text{最大}}=0$

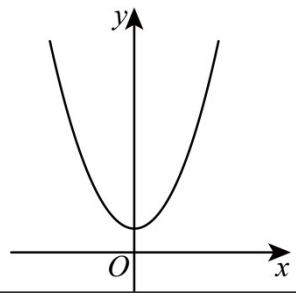
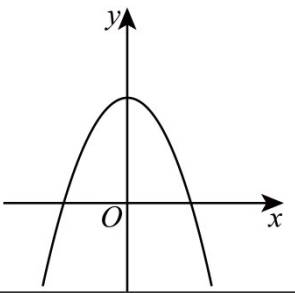
抛物线 $y=ax^2$ (其中 a 是常数, 且 $a \neq 0$) 的对称轴是 y 轴, 即直线 $x=0$; 顶点是原点. 抛物线的开口方向由 a 所取值的符号决定, 当 $a>0$ 时, 它的开口向上, 顶点是抛物线的最低点; 当 $a<0$ 时, 它的开口向下, 顶点是抛物线的最高点.

要点: 顶点决定抛物线的位置. 几个不同的二次函数, 如果二次项系数 a 相同, 那么抛物线的开口方向、开口大小完全相同, 只是顶点的位置不同. $|a|$ 相同, 抛物线的开口大小、形状相同.

$|a|$ 越大, 开口越小, 图象两边越靠近 y 轴, $|a|$ 越小, 开口越大, 图象两边越靠近 x 轴.

二、二次函数 $y=ax^2+c$ ($a \neq 0$) 的图象的性质

关于二次函数 $y=ax^2+c$ ($a \neq 0$) 的性质, 主要从抛物线的开口方向、顶点、对称轴、函数值的增减性以及函数的最大值或最小值等方面来研究. 下面结合图象, 将其性质列表归纳如下:

函数	$y = ax^2 + c (a > 0, c > 0)$	$y = ax^2 + c (a < 0, c > 0)$
图象		
开口方向	向上	向下
顶点坐标	$(0, c)$	$(0, c)$
对称轴	y 轴	y 轴
函数变化	当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.	当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大.
最大(小)值	当 $x = 0$ 时, $y_{\text{最小}} = c$	当 $x = 0$ 时, $y_{\text{最大}} = c$

抛物线 $y=ax^2+c$ (其中 a, c 是常数, 且 $a \neq 0$) 的对称轴是 y 轴, 即直线 $x=0$; 顶点坐标是 $(0, c)$. 抛物线的开口方向

由 a 所取值的符号决定，当 $a > 0$ 时，它的开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a < 0$ 时，它的开口向下，顶点是抛物线的最高点。

三、二次函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 与 $y = ax^2 + c (a \neq 0)$ 之间的关系；(上加下减) .

$y = ax^2 (a \neq 0)$ 的图象向上 ($c > 0$) 【或向下 ($c < 0$) 】 平移 $|c|$ 个单位得到 $y = ax^2 + c (a \neq 0)$ 的图象.

要点：

① 抛物线 $y = ax^2 + c (a \neq 0)$ 的对称轴是 y 轴，顶点坐标是 $(0, c)$ ，与抛物线 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的形状相同 .

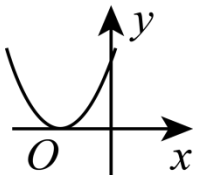
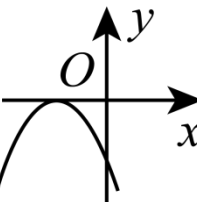
② 函数 $y = ax^2 + c (a \neq 0)$ 的图象是由函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的图象向上 (或向下) 平移 $|c|$ 个单位得到的，顶点坐标为 $(0, c)$.

③ 抛物线 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的对称轴、最值与顶点密不可分，其对称轴即为过顶点且与 x 轴垂直的一条直

四、二次函数 $y = a(x+m)^2 (a \neq 0)$ 的图象的性质

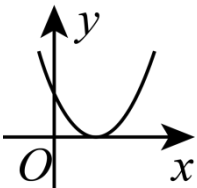
1. 二次函数 $y = a(x+m)^2 (a \neq 0)$ 的图象与性质 ($m > 0$)

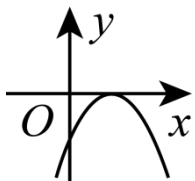
二次函数 $y = a(x+m)^2 (a \neq 0, m > 0)$ 的图象的性质，如下表：

函数		图象	开口方向	顶点坐标	对称轴	性质
$y = a(x+m)^2$ ($a \neq 0, m > 0$)	$a > 0$		向上	$(-m, 0)$	直线 $x = -m$	当 $x > m$ 时， y 随 x 的增大而增大； $x < m$ 时， y 随 x 的增大而减小； $x = m$ 时， y 有最小值 0 .
	$a < 0$		向下	$(-m, 0)$	直线 $x = -m$	$x > m$ 时， y 随 x 的增大而减小； $x < m$ 时， y 随 x 的增大而增大； $x = m$ 时， y 有最大值 0 .

2. 二次函数 $y = a(x+m)^2 (a \neq 0)$ 的图象与性质 ($m < 0$)

二次函数 $y = a(x+m)^2 (a \neq 0, m < 0)$ 的图象的性质，如下表：

函数		图象	开口方向	顶点坐标	对称轴	性质
$y = a(x+m)^2$ ($a \neq 0, m < 0$)	$a > 0$		向上	$(-m, 0)$	直线 $x = -m$	当 $x > m$ 时， y 随 x 的增大而增大； $x < m$ 时， y 随 x 的增大而减小； $x = m$ 时， y 有最小值 0 .

	$a < 0$		向下	$(-m, 0)$	直线 $x = -m$	$x > m$ 时, y 随 x 的增大而减小; $x < m$ 时, y 随 x 的增大而增大; $x = m$ 时, y 有最大值 0 .
--	---------	---	----	-----------	-------------	---

抛物线 $y = a(x+m)^2$ (其中 a, m 是常数, 且 $a \neq 0$) 的对称轴是过点 $(-m, 0)$ 且平行(或重合)于 y 轴的直线, 即直线 $x = -m$; 顶点坐标是 $(-m, 0)$. 当 $a > 0$ 时, 抛物线开口向上, 顶点是抛物线的最低点; 当 $a < 0$ 时, 抛物线开口向下, 顶点是抛物线的最高点.

要点: 一般地, 抛物线 $y = a(x+m)^2$ (其中 a, m 是常数, 且 $a \neq 0$) 可以通过将抛物线 $y = ax^2$ 向左($m > 0$) 或向右($m < 0$) 平移 $|m|$ 个单位得到.

四、二次函数 $y = a(x+m)^2 + k$ ($a \neq 0$) 的图象的性质

1. 二次函数 $y = a(x+m)^2 + k$ ($a \neq 0$) 的图象与性质, 如下表

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	性质
$a > 0$	向上	$(-m, k)$	直线 $x = -m$	当 $x > m$ 时, y 随 x 的增大而增大; $x < m$ 时, y 随 x 的增大而减小; $x = m$ 时, y 有最小值 k .
$a < 0$	向下	$(-m, k)$	直线 $x = -m$	当 $x > m$ 时, y 随 x 的增大而减小; $x < m$ 时, y 随 x 的增大而增大; $x = m$ 时, y 有最大值 k .

【即学即

练】

1. 二次函数 $y = 2(x-1)^2 + 3$ 的图象的顶点坐标是 ()

- A. $(1, 3)$ B. $(-1, 3)$ C. $(1, -3)$ D. $(-1, -3)$

2. 关于二次函数 $y = -(x-2)^2$ 的图象, 下列说法正确的是 ()

- A. 图象经过原点 B. 开口向上
C. 对称轴是直线 $x = -2$ D. 最高点是 $(2, 0)$

3. 已知点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 在抛物线 $y = -x^2 - 2$ 上, 且 $0 < x_1 < x_2$, 则 y_1 _____ y_2 (填“<”、“>”或“=”).

4. 抛物线 $y = ax^2 + c$ ($a \neq 0$) 一定不经过第一、二象限, 那么下列说法正确的是 ()

- A. $a > 0$ 且 $c < 0$ B. $a < 0$ 且 $c \leq 0$
C. $a > 0$ 且 $c \leq 0$ D. $a < 0$ 且 $c > 0$

5. 沿着 x 轴的正方向看，如果抛物线 $y = (k-1)x^2 + 1$ 在 y 轴左侧的部分是上升的，那么 k 的取值范围是__

知识点3 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像与性质

一、二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 $y = a(x+m)^2 + k$ ($a \neq 0$) 之间的相互关系

1. 顶点式化成一般式

从函数解析式 $y = a(x+m)^2 + k$ 我们可以直接得到抛物线的顶点 $(-m, k)$ ，所以我们称 $y = a(x+m)^2 + k$ 为顶点式，将顶点式 $y = a(x+m)^2 + k$ 去括号，合并同类项就可化成一般式 $y = ax^2 + bx + c$ 。

2. 一般式化成顶点式

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

$$\text{对照 } y = a(x+m)^2 + k, \text{ 可知 } m = -\frac{b}{2a}, k = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

$$\therefore \text{ 抛物线 } y = ax^2 + bx + c \text{ 的对称轴是直线 } x = -\frac{b}{2a}, \text{ 顶点坐标是 } \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

要点：

1. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a}$ ，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ，可以当作公式加以记忆和运用。

2. 求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴和顶点坐标通常用三种方法：配方法、公式法、代入法，这三种方法都有各自的优缺点，应根据实际灵活选择和运用。

二、二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象的画法

1. 一般方法：列表、描点、连线；

2. 简易画法：五点定形法。

其步骤为：

(1) 先根据函数解析式，求出顶点坐标和对称轴，在直角坐标系中描出顶点 M ，并用虚线画出对称轴。

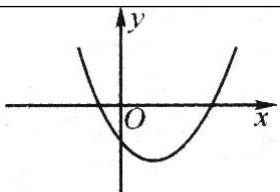
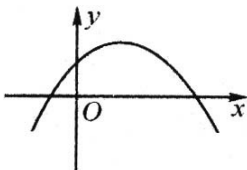
(2) 求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与坐标轴的交点，

当抛物线与 x 轴有两个交点时，描出这两个交点 A 、 B 及抛物线与 y 轴的交点 C ，再找到点 C 关于对称轴的对称点 D ，将 A 、 B 、 C 、 D 及 M 这五个点按从左到右的顺序用平滑曲线连结起来。

要点：当抛物线与 x 轴只有一个交点或无交点时，描出抛物线与 y 轴的交点 C 及对称点 D ，由 C 、 M 、 D 三点可粗略地画出二次函数图象的草图；如果需要画出比较精确的图象，可再描出一对对称点 A 、 B ，然后顺次用平滑曲线连结五点，画出二次函数的图象，

三、二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象与性质

1. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图象与性质

函数	二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$)	
图象	$a > 0$	$a < 0$
		
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x = -\frac{b}{2a}$	直线 $x = -\frac{b}{2a}$
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$
增减性	在对称轴的左侧, 即当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小; 在对称轴的右侧, 即当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大. 简记: 左减右增	在对称轴的左侧, 即当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大; 在对称轴的右侧, 即当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小. 简记: 左增右减
最大(小)值	抛物线有最低点, 当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, y 有最小值, $y_{\text{最小值}} = \frac{4ac-b^2}{4a}$	抛物线有最高点, 当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, y 有最大值, $y_{\text{最大值}} = \frac{4ac-b^2}{4a}$

2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 图象的特征与 a, b, c 及 b^2-4ac 的符号之间的关系

项目字母	字母的符号	图象的特征
a	$a > 0$	开口向上
	$a < 0$	开口向下
b	$ab > 0$ (a, b 同号)	对称轴在 y 轴左侧
	$ab < 0$ (a, b 异号)	对称轴在 y 轴右侧
c	$c = 0$	图象过原点
	$c > 0$	与 y 轴正半轴相交
	$c < 0$	与 y 轴负半轴相交
b^2-4ac	$b^2-4ac = 0$	与 x 轴有唯一交点
	$b^2-4ac > 0$	与 x 轴有两个交点
	$b^2-4ac < 0$	与 x 轴没有交点

四、求二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的最大(小)值的方法

如果自变量的取值范围是全体实数，那么函数在顶点处取得最大（或最小）值，即当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时，
 $y_{\text{最值}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

要点：

如果自变量的取值范围是 $x_1 \leq x \leq x_2$ ，那么首先要看 $-\frac{b}{2a}$ 是否在自变量的取值范围 $x_1 \leq x \leq x_2$ 内，若在此范围内，则当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时， $y_{\text{最值}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ，若不在此范围内，则需要考虑函数在 $x_1 \leq x \leq x_2$ 范围内的增减性，如果在此范围内，y 随 x 的增大而增大，则当 $x = x_2$ 时， $y_{\text{最大值}} = ax_2^2 + bx_2 + c$ ；当 $x = x_1$ 时， $y_{\text{最小值}} = ax_1^2 + bx_1 + c$ ，如果在此范围内，y 随 x 的增大而减小，则当 $x = x_1$ 时， $y_{\text{最大值}} = ax_1^2 + bx_1 + c$ ；当 $x = x_2$ 时， $y_{\text{最小值}} = ax_2^2 + bx_2 + c$ ，如果在此范围内，y 值有增有减，则需考察 $x = x_1$ ， $x = x_2$ ， $x = -\frac{b}{2a}$ 时 y 值的情况。

五、列二次函数解应用题

列二次函数解应用题与列整式方程解应用题的思路和方法是一致的，不同的是，学习了二次函数后，表示量与量的关系的代数式是含有两个变量的等式。对于应用题要注意以下步骤：

- (1) 审清题意，弄清题中涉及哪些量，已知量有几个，已知量与变量之间的基本关系是什么，找出等量关系(即函数关系)。
- (2) 设出两个变量，注意分清自变量和因变量，同时还要注意所设变量的单位要准确。
- (3) 列函数表达式，抓住题中含有等量关系的语句，将此语句抽象为含变量的等式，这就是二次函数。
- (4) 按题目要求，结合二次函数的性质解答相应的问题。
- (5) 检验所得解是否符合实际：即是否为所提问题的答案。
- (6) 写出答案。

要点：

常见的问题：求最大(小)值(如求最大利润、最大面积、最小周长等)、涵洞、桥梁、抛物体、抛物线的模型问题等。解决这些实际问题关键是找等量关系，把实际问题转化为函数问题，列出相关的函数关系式。

六、建立二次函数模型求解实际问题

一般步骤：

- (1) 恰当地建立直角坐标系；
- (2) 将已知条件转化为点的坐标；
- (3) 合理地设出所求函数关系式；
- (4) 代入已知条件或点的坐标，求出关系式；
- (5) 利用关系式求解问题。

要点：

(1) 利用二次函数解决实际问题，要建立数学模型，即把实际问题转化为二次函数问题，利用题中存在的公式、内含的规律等相等关系，建立函数关系式，再利用函数的图象及性质去研究问题。在研究实际问题时要注意自变量的取值范围应具有实际意义。

A . 1 或 3 B . 3 C . 1 D . 以上都不对

【变式 5】 . 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴分别交于 $A(3,0)$ 、 $B(1,0)$ ，则该抛物线的对称轴为_____ .

【变式 6】 . 抛物线 $y = x^2 + x$ 一定经过点 ()

A . $(1,0)$ B . $(-1,0)$ C . $(2,4)$ D . $(-2,-4)$

题型 02 平移问题

【典例 1】 . 将抛物线 $y = (x-2)^2 + 1$ 向左平移 4 个单位后得到的新抛物线的表达式为 ()

A . $y = (x-2)^2 + 5$ B . $y = (x-6)^2 + 1$ C . $y = (x-2)^2 - 3$ D . $y = (x+2)^2 + 1$

【变式 1】 . 抛物线 $y = x^2$ 先向右平移 1 个单位，再向上平移 3 个单位，得到新的抛物线解析式是 ()

A . $y = (x+1)^2 + 3$ B . $y = (x+1)^2 - 3$

C . $y = (x-1)^2 + 3$ D . $y = (x-1)^2 - 3$

题型 03 二次函数的图像与性质

【典例 1】 . 二次函数 $y = x^2 - 1$ 的图象在其对称轴右侧的部分是_____的 (填“上升”或“下降”) .

【变式 1】 . 沿着 x 轴正方向看，抛物线 $y = x^2 - 2$ 在 y 轴右侧的部分是_____的 (填“上升”或“下降”) .

【变式 2】 . 若 $A(-4, y_1)$ 、 $B(-2, y_2)$ 、 $C(1, y_3)$ 是二次函数 $y = 4(x+1)^2$ 图象上的三点，则 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小关系是_____ (用“<”表示) .

【变式 3】 . 如果二次函数 $y = a(x-2)^2$ ($a < 0$) 的图像上有两点那么 $\left(\frac{9}{4}, y_1\right)$ 和 $\left(\frac{7}{3}, y_2\right)$ 那么 y_1 _____ y_2 .

(填“>”、“=”或“<”)

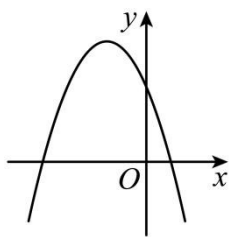
【变式 4】 . 若点 $(-3, y_1)$ 、 $(0, y_2)$ 、 $(1, y_3)$ 都在二次函数 $y = (x+2)^2$ 的图象上，则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是

()

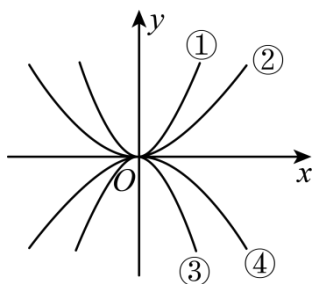
A . $y_1 > y_3 > y_2$ B . $y_1 < y_2 < y_3$ C . $y_1 > y_2 > y_3$ D . $y_1 < y_3 < y_2$

题型 04 二次函数的图像与性质的应用

【典例 1】 . 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 如图所示，那么点 $P(b, c)$ 在第_____象限 .

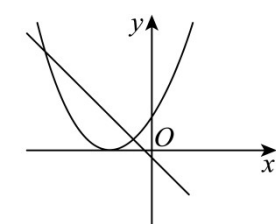
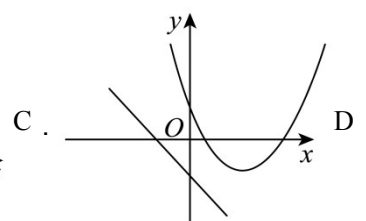
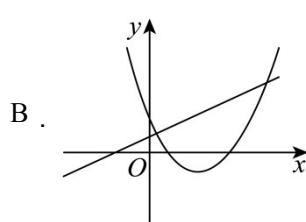
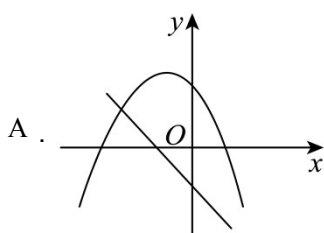


【变式 1】 . 如图所示，四个二次函数的图象对应的表达式分别是：① $y = ax^2$ ；② $y = bx^2$ ；③ $y = cx^2$ ；④ $y = dx^2$ ，则 a ， b ， c ， d 的大小关系为_____。（用“>”连接）



【变式 2】 . 如果二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图像对称轴的右侧部分上升，它的开口方向是_____。（填“向上”或“向下”）

【变式 3】 . 在同一直角坐标系中，函数 $y = mx + m$ 和 $y = -mx^2 + 2x + 2$ 的图像可能是（ ）



【变式 4】 . 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的变量 x 与变量 y 的部分对应值如下表：

x	...	-3	-2	-1	0	1	5	...
y	...	7	0	-5	-8	-9	7	...

则该二次函数图像的对称轴是_____。

题型 05 求参数问题

【典例 1】 . 如果抛物线 $y = x^2 + x + m - 2$ 经过原点，那么 m 的值等于_____ .

【变式 1】 . 如果抛物线 $y = (m-1)x^2 + mx$ 的顶点是它的最高点，那么 m 的取值范围是 ()

- A . $m > 0$ B . $m < 0$ C . $m > 1$ D . $m < 1$

【变式 2】 . 如果抛物线 $y = ax^2 + bx$ 经过第一、二、三象限，那么常数 a 、 b 的符号是 ()

- A . $a > 0$, $b > 0$ B . $a > 0$, $b < 0$ C . $a < 0$, $b > 0$ D . $a < 0$, $b < 0$

【变式 3】 . 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象不经过第一、二象限，那么 a 的取值范围是_____ .

【变式 4】 . 将抛物线 $y = (x+m)^2$ 向右平移 3 个单位后，对称轴是 y 轴，那么 m 的值是_____ .

【变式 5】 . 已知抛物线 $y = (m-2)x^2 - 3x - 1$ 的开口向上，那么 m 的取值范围是_____ .

【变式 6】 . 抛物线 $y = (a+2)x^2$ 在对称轴左侧的部分是上升的，那么 a 的取值范围是_____ .

【变式 7】 . 已知二次函数 $y = x^2 + 3x + m - 2$ 的图像与 y 轴的交点在正半轴上，那么 m 的取值范围是_____ .

题型 06 新定义题

【典例 1】 . 如果两个二次函数 $y_1 = a_1(x+h_1)^2 + k_1$ 与 $y_2 = a_2(x+h_2)^2 + k_2$ 的图象的形状相同，开口方向相反，并且顶点关于原点对称，那么我们称这两个二次函数互为梦函数，则二次函数 $y = 2(x+2)^2 + 1$ 的梦函数解析式为_____ .

【变式 1】 . 一个二次函数的图象经过点 $(t, 0)$ ，则称 t 的值是这个函数的“零点”. 例如：二次函数 $y = a(x-3)(x+2) (a \neq 0)$ ，无论 a 取何值 $(3, 0)$ 和点 $(-2, 0)$ ，所以 3 和 -2 是这个函数的“零点”. 如果一个二次函数有且只有一个“零点”-1，那么这个二次函数的解析式可以是_____ . (写出一个符合要求的函数解析式即可)

题型 07 解答题

【典例 1】 . 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(3, 0)$, $B(0, -3)$.

(1)求抛物线表达式并写出顶点坐标；

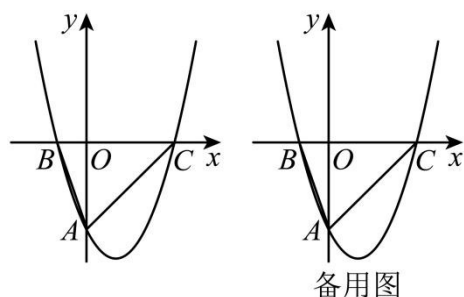
(2)联结 AB ，与该抛物线的对称轴交于点 P ，求点 P 的坐标 .

【变式 1】 . 在直角坐标平面内，二次函数 $y = ax^2 + bx - 3 (a \neq 0)$ 图象的顶点为 $A(1, -4)$.

(1)求该二次函数关系式；

(2)将该二次函数图象向上平移几个单位，可使平移后所得图象经过坐标原点？并直接写出平移后所得图象与 x 轴的另一个交点的坐标．

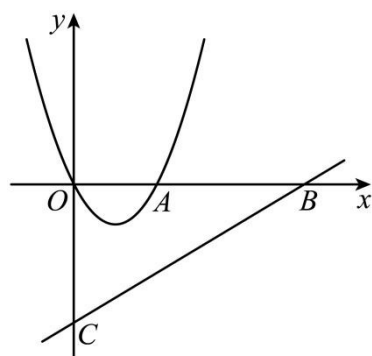
【变式2】．如图在直角坐标平面内，抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 与 y 轴交于点 A ，与 x 轴分别交于点 $B(-1, 0)$ 、点 $C(3, 0)$ ，点 D 是抛物线的顶点．



(1)求：抛物线的表达式及顶点 D 的坐标；

(2)点 P 在直线 DC 上，连接 OP ，若以 O 、 P 、 C 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，求点 P 的坐标．

【变式3】．已知：如图，二次函数 $y = x^2 + bx$ 的图像交 x 轴正半轴于点 A ，顶点为 P ，一次函数 $y = \frac{1}{2}x - 3$ 的图像交 x 轴于点 B ，交 y 轴于点 C ， $\frac{OA}{OC} = \frac{2}{3}$ ．



(1)求二次函数顶点 P 坐标；

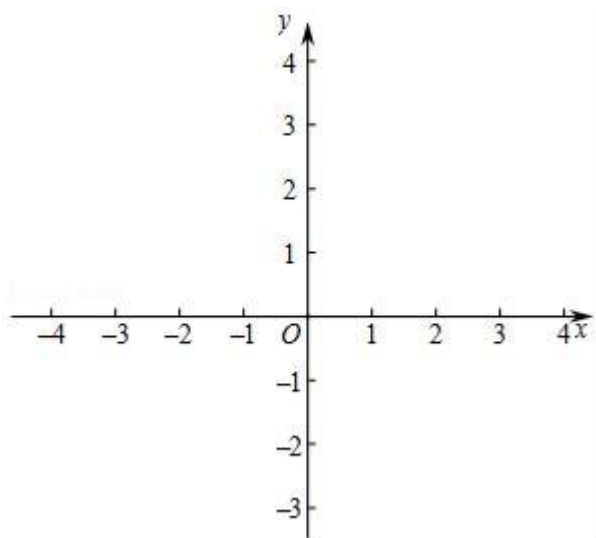
(2)将二次函数图像向下平移 $m(m > 0)$ 个单位，设平移后抛物线顶点为 P' ，若 $S_{\triangle ABP'} = S_{\triangle BCP'}$ ，求 m 的值．

【变式4】．在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + 2ax + c$ （其中 a 、 c 为常数，且 $a < 0$ ）与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ ，与 y 轴交于点 B ，此抛物线顶点 C 到 x 轴的距离为4．

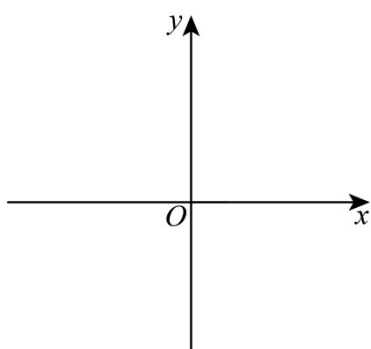
(1)求抛物线的表达式；

(2)求 $\angle CAB$ 的正切值；

(3) 如果点 P 是 x 轴上的一点，且 $\angle ABP = \angle CAO$ ，直接写出点 P 的坐标。



【变式5】 我们定义：如果一条抛物线的顶点 P 绕着它的对称轴上的另一个点 Q 逆时针旋转 90° ，顶点 P 的对应点 P' 也在这条抛物线上，那么称线段 PQ 的长为该抛物线的开口半径，点 Q 为该抛物线的开口中心。



(1) 已知一条抛物线的开口向上，开口半径为 1，开口中心为 $(-1, 0)$ ，求这条抛物线的表达式；

(2) 已知抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + c$ 顶点为点 A ，与 y 轴交于点 B ，开口中心点 C 。

① 求它的开口半径；

② 求 $\angle ACB$ 的余弦值。

强化训练

一、单选题

1. 下列函数一定是关于 x 的二次函数的是 ()

- A. $y = (x+1)^2 - x(1-x)$ B. $y = ax + bx$ C. $y = x^2 + x^{-2}$ D. $y = (m^2 - 1)x^2$

2. 将二次函数 $y = 2x^2 + 4x - 3$ 化成 $y = a(x+h)^2 + k$ 的形式，正确的是 ()

A. $y = 2(x+1)^2 - 1$

B. $y = 2(x+1)^2 - 5$

C. $y = 2(x-2)^2 - 11$

D. $y = 2(x+1)^2 - 4$

3. 将抛物线 $y = -0.5x^2$ 向左平移 2 个单位长度，再向下平移 5 个单位得到的抛物线是 ()

A. $y = -0.5(x-2)^2 - 5$

B. $y = -0.5(x-2)^2 + 5$

C. $y = -0.5(x+2)^2 + 5$

D. $y = -0.5(x+2)^2 - 5$

4. 已知点 $(-1, y_1), (2, y_2), (-3, y_3)$ 都在函数 $y = 3(x+1)^2 - m$ 的图象上，则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ()

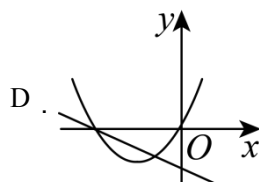
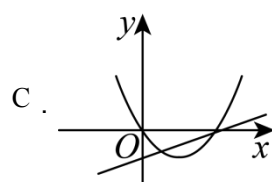
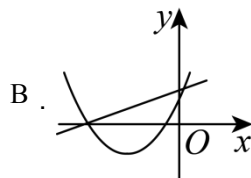
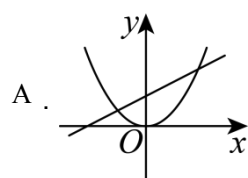
A. $y_2 > y_3 > y_1$

B. $y_2 > y_1 > y_3$

C. $y_1 > y_2 > y_3$

D. $y_3 > y_1 > y_2$

5. 函数 $y = ax^2 + bx$ 与 $y = ax + b$ 在同一平面直角坐标系中的图象大致是 ()



6. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的 y 与 x 的部分对应值如表：

x	...	-1	0	2	4	...
y	...	-1	2	2	-6	...

下列结论错误的是 ()

A. 该函数有最大值

B. 该函数图象的对称轴为直线 $x = 1$

C. 当 $x > 2$ 时，函数值 y 随 x 增大而减小

D. 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一个根大于 3

二、填空题

7. 抛物线 $y = -x^2 + 3$ 在 y 轴右侧部分呈现_____的趋势(填“上升”或者“下降”).

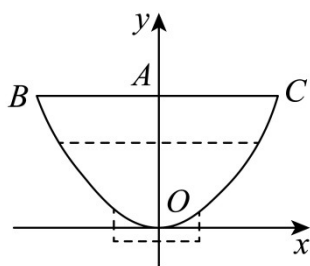
8. 顶点是 $(2, 0)$ ，且与抛物线 $y = -3x^2$ 的形状、开口方向都相同的抛物线的解析式为_____.

9. 抛物线 $y = 2x^2 + bx + c$ 经过 $A(0, 2)$ 和 $B(-3, 2)$ 两点，则该抛物线的对称轴为直线_____.

10. 已知点 $(-2, m)$ 、 $(-3, n)$ 在二次函数 $y = ax^2 - 2ax + c$ 的图像上，如果 $m > n$ ，那么 a _____ 0 (用“>”或“<”连接) .

11. 如果当 $a > 0$ 时，二次函数 $y = ax^2 + 2ax + 1$ 的图像一定不经过第_____象限 .

12. 如图，是一个面碗的截面图，碗身可近似看作抛物线，以碗底 O 为原点建立平面直角坐标系，已知碗口 BC 宽 28cm，碗深 $OA = 9.8$ cm，则当满碗汤面的竖直高度下降 6.6cm 时，碗中汤面的水平宽度为_____cm



13. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 a 、 b 、 c 是常数，且 $a \neq 0$) 的顶点为 P ，如果 A 是抛物线上一点，将 PA 绕点 P 旋转 90° 后，点 A 的对应点也在抛物线上，这时可以用 PA 的长表示该抛物线的“开口大小”，那么抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}$ 的“开口大小”是_____.

14. 定义：二次项系数之和为 1，对称轴相同，且图象与 y 轴交点也相同的两个二次函数互为友好同轴二次函数. 例如： $y = 2x^2 + 4x - 5$ 的友好同轴二次函数为 $y = -x^2 - 2x - 5$. 已知二次函数 $C_1: y = ax^2 + 4ax + 4$ (其中 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$)，其友好同轴二次函数记为 C_2 ，当 $-3 \leq x \leq 0$ 时，函数 C_2 的最大值与最小值的差为 8，则 a 的值为_____.

三、解答题

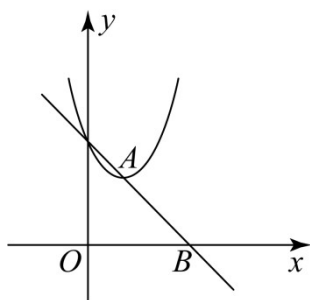
15. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的变量 x 与变量 y 的部分对应值如下表：

x	...	-3	-2	-1	0	1	5	...
y	...	7	0	-5	-8	-9	7	...

(1) 求此二次函数的解析式；

(2) 写出抛物线顶点坐标和对称轴.

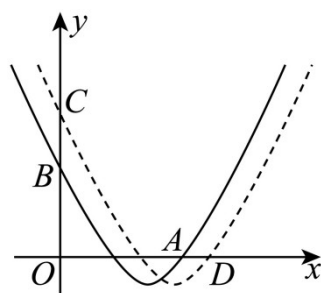
16. 已知抛物线 $y = x^2 - 2x + a$ 的顶点 A 在直线 $y = -x + 3$ 上，直线 $y = -x + 3$ 与 x 轴的交点为 B 点。



(1) 求点 B 的坐标与 a 的值；

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积。

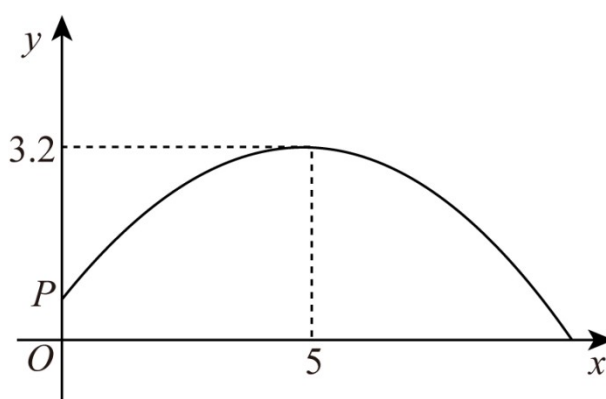
17. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{3}(x-4)^2 + h$ 与 x 轴交于点 $A(6,0)$ ，与 y 轴交于点 B 。



(1) 求 h 的值及点 B 的坐标；

(2) 将该抛物线向右平移 m ($m > 0$) 个单位长度后，与 y 轴交于点 C ，过点 B 作 x 轴的平行线交新抛物线于点 D ，若 $BC = 2BD$ ，求 m 的值。

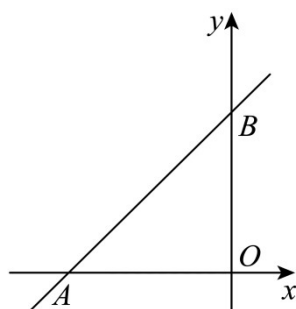
18. 小红看到一处喷水景观，喷出的水柱呈抛物线形状，她对此展开研究：测得喷水头 P 距地面 0.7m ，水柱在距喷水头 P 水平距离 5m 处达到最高，最高点距地面 3.2m ；建立如图所示的平面直角坐标系，并设抛物线的表达式为 $y = a(x-h)^2 + k$ ，其中 x (m) 是水柱距喷水头的水平距离， y (m) 是水柱距地面的高度。



(1)求抛物线的表达式 .

(2)爸爸站在水柱正下方，且距喷水头 P 水平距离 3m，身高 1.6m 的小红在水柱下方走动，当她的头顶恰好接触到水柱时，求她与爸爸的水平距离 .

19. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ，抛物线 L_1 ： $y = ax^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点，顶点为点 P ，对称轴是直线 $x = -3$.

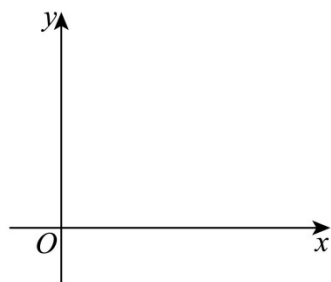


(1)求抛物线 L_1 的表达式；

(2)点 Q 在第二象限，且在抛物线的对称轴上，如果 $\angle POQ = 45^\circ$ ，求点 Q 的坐标；

(3)将抛物线 L_1 平移，得到抛物线 L_2 ，平移后，抛物线 L_1 上的点 A 、 P 落在点 M 、 N 处， $PN \parallel AB$ ， $PM \parallel AO$ ，求平移后的抛物线 L_2 的表达式 .

20. 在平面直角坐标系 xOy 中（如图），顶点为 $A(6, 6)$ 的抛物线 C_1 经过原点，直线 $y = 6$ 交 y 轴于点 B .



(1)求抛物线 C_1 的表达式；

(2)将抛物线 C_1 先向右平移 $m(m > 0)$ 个单位，再向下平移 $n(n > 0)$ 个单位，使得新抛物线 C_2 的顶点 D 恰好落在抛物线 C_1 上 . 抛物线 C_2 的对称轴交直线 AB 于点 E . 连接 BD .

①连接 AD ，当线段 BD 的中垂线经过点 A 时，求 $\sin \angle DAE$ 的值；

②线段 BD 交抛物线 C_1 的对称轴于点 F ，当 $\triangle ADF$ 与 $\triangle ADB$ 相似时，求代数式 $m^3 - 36m$ 的值 .