

专题 03 期中解答压轴题

考点归纳

考点 01 有理数的运算

考点 02 新定义题

考点 03 数轴的综合应用

考点 04 数的整除

考点 05 实际应用题；幻方问题

考点 06 综合应用题

考点专练

考点 01 有理数的运算

1. 阅读理解：

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{1 \times 2} - \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1 \times 2} ;$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{2 \times 3} - \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{2 \times 3} ;$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{3 \times 4} - \frac{3}{3 \times 4} = \frac{1}{3 \times 4} ;$$

.....

试运用上述方法计算：

$$(1) \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10} ;$$

$$(2) \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{99 \times 101} .$$

$$2. \text{ 阅读理解：} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2+3}{2 \times 3} = \frac{5}{6} ; \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3+4}{3 \times 4} = \frac{7}{12} ; \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{4+5}{4 \times 5} = \frac{9}{20} ;$$

(1)请在理解上面计算方法的基础上填空： $\frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} = \frac{(\quad) + (\quad)}{(\quad) \times (\quad)} = \frac{13}{42}$ ；

$$\frac{17}{72} = \frac{(\quad) + (\quad)}{(\quad) \times (\quad)} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}；$$

(2)利用以上所得的规律计算： $\frac{3}{2} - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42} + \frac{15}{56} - \frac{17}{72}$ 。

3. 阅读理解

阅读 $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{3-2}{2 \times 3} = \frac{3}{2 \times 3} - \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

以上过程，是逆用异分母分数减法的方法得到： $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ (*)

(1)根据以上材料，请你把 $\frac{1}{3 \times 4}$ 表示出两个最简分数的差： $\frac{1}{3 \times 4} = \underline{\hspace{2cm}}$ (必须写出推导过程)

(2)根据(*)式直接计算 $\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10}$

(3)计算 $\frac{3}{10} + \frac{3}{40} + \frac{3}{88} + \frac{3}{154} + \frac{3}{238} + \frac{3}{340}$

4. 阅读材料一：等式性质1：等式两边加(或减)同一个数，等式仍成立。

等式性质2：等式两边乘同一个数，或除以同一个不为0的数，等式仍成立。

阅读材料二：求 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{2013}$ 的值，

解：令 $S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{2013}$ ①，

等式两边同时乘以2，得 $2S=2+2^2+2^3+\cdots+2^{2013}+2^{2014}$ ②，

由②式-①式得： $2S-S=2^{2014}-1$ ，

从而 $S=2^{2014}-1$ ，即 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{2013}=2^{2014}-1$ 。仿照以上推理，计算：

(1) $1+5+5^2+5^3+\cdots+5^{2024}$

(2) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots+\frac{64}{729}$ 。

5. 我们把分子为1的分数称为单位分数。早在三千多年前，古埃及人就利用单位分数进行书写和计算。将

一个单位分数分拆为几个不同的单位分数之和也是一个很有意义的问题。

例如，将 $\frac{1}{4}$ 分拆为2个不同的单位分数之和。有如下的方式：

首先找到分母 4 的因数 1、2、4，然后将 $\frac{1}{4}$ 的分子、分母分别乘以分母 4 的两个不同因数之和，

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times (1+2)}{4 \times (1+2)} = \frac{1}{4 \times (1+2)} + \frac{2}{4 \times (1+2)} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} ; \text{或者 } \frac{1}{4} = \frac{1 \times (1+4)}{4 \times (1+4)} = \frac{1}{4 \times (1+4)} + \frac{4}{4 \times (1+4)} = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} .$$

(1) 仿照上例，把 $\frac{1}{9}$ 分拆成两个不同的单位分数之和。

$$\frac{1}{9} = \underline{\hspace{2cm}} ;$$

$$\frac{1}{9} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

(2) 小明受此启发，根据这样的思路，也可以把一个单位分数分拆为两个不同的单位分数之差 $\frac{1}{7}$ 分拆成两个

不同的单位分数之差。 $\frac{1}{7} = \underline{\hspace{2cm}} ;$

(3) 小海受此启发，如果将 $\frac{1}{4}$ 的分子与分母同乘以分母 4 的三个不同的因数之和 $\frac{1}{4}$ 分拆为三个不同的单位分

$$\text{数之和，} \frac{1}{4} = \frac{1 \times (1+2+4)}{4 \times (1+2+4)} = \frac{1}{4 \times 7} + \frac{2}{4 \times 7} + \frac{4}{4 \times 7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} .$$

请你把 $\frac{1}{6}$ 分拆成两个以上的不同单位分数之和。

$$\frac{1}{6} = \underline{\hspace{2cm}} ;$$

$$\frac{1}{6} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

考点 02 新定义题

6. 对于一个正整数 n ，若存在正整数 a 、 b ，使得 $n = ab + a + b$ ，则称 n 是一个“兰生数”，例如 $3 = 1 \times 1 + 1 + 1$ ，故 3 为一个“兰生数”。

(1) 写出 10 以内的“兰生数”的等式，例如： $3 = 1 \times 1 + 1 + 1$

(2) 在 1, 2, 3, ……100 中，有多少个“兰生数”？为什么？

7. 一个两位数的十位上的数为 a ，个位上的数为 b ，这个两位数记作 $\overline{ab}$ ；一个三位数的百位上的数为 x ，十位上的数为 y ，个位上的数为 z ，这个三位数记作 $\overline{xyz}$ 。

(1) ($\overline{ab} + \overline{ba}$) 能被 11 整除吗？请说明理由；

(2)小明发现：如果 $(x+y+z)$ 能被3整除，那么 $\overline{xyz}$ 就能被3整除．请补全小明的证明思路．

小明的证明思路：

因为 $\overline{xyz} = \text{①}$

$= \text{②} + (x+y+z)$ ，

又因为代数式②， $(x+y+z)$ 都能被3整除，

所以 $\overline{xyz}$ 能被3整除．

8．每个正整数都有因数，1有1个因数，素数有2个因数，合数可以通过分解素因数来计算因数的个数．

假设正整数 a 一共有 N 个因数，则 N 除以正整数 a 所有因数的倒数和，所得到的商就叫做正整数 a 的调和系数．

如13有2个因数1和13，则13的调和系数为 $2 \div \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{13} \right) = \frac{13}{7}$ ；

28有6个因数1、2、4、7、14和28，则28的调和系数为 $6 \div \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} \right) = 3$ ．

(1)分别计算15和98的调和系数；

(2)直接写出不小于2且不大于16的正整数中，调和系数为整数的数．

9．阅读与理解：

我们把形如 $\frac{1}{n}$ (n 是正整数， $n \geq 2$) 的分数叫做单位分数，如 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

(1)任何一个单位分数都可以拆成两个不同的单位分数之和，如 $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}, \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}, \dots$ ，观察上

述式子的规律，回答下面的问题：

①把 $\frac{1}{8}$ 写成两个单位分数之和： $\frac{1}{8} = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

②把 $\frac{1}{n}$ (n 是正整数， $n \geq 2$) 写成两个单位分数之和： $\frac{1}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

(2)某些单位分数也可以拆成两个分母是相邻自然数的单位分数的差，如 $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \dots$ ，

观察上述式子的规律，回答下面的问题：

①在单位分数 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{100}$ 中，能按上述要求拆分的有_____个．

②若在单位分数 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$ 中，能按上述要求拆分的有 30 个，则 n 的最大值为_____。

10. 规定：求若干个相同的有理数（均不等于 0）的除法运算叫做除方，如 $3 \div 3 \div 3$ ，

$(-2) \div (-2) \div (-2) \div (-2)$ 等。类比有理数的乘方，我们把 $3 \div 3 \div 3$ 记作 $3^{\textcircled{3}}$ ，读作“3 的圈 3 次方”，

$(-2) \div (-2) \div (-2) \div (-2)$ 记作 $(-2)^{\textcircled{4}}$ ，读作“-2 的圈 4 次方”。一般地，我们把 n 个 a ($a \neq 0$) 相除记作 $a^{\textcircled{n}}$ ，读作“ a 的圈 n 次方”。根据以上信息，完成下列问题。

(1) 列式： $5^{\textcircled{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\textcircled{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 负数的圈奇次方的结果是_____（填“正数”或“负数”）。

(3) 将运算结果直接写成乘方的形式： $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\textcircled{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) 计算： $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\textcircled{5}} \div 3^2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{\textcircled{4}}$ 。

11. 阅读下列材料，解决问题：

我们把一个能被 17 整除的自然数称为“节俭数”。“节俭数”的特征是：若把一个自然数的个位数字截去，再把剩下的数减去截去的那个个位数字的 5 倍，如果差是 17 的整数倍（包括 0），则原数能被 17 整除，如果差太大或心算不易看出是否是 17 的倍数，就继续上述的“截尾，倍尾，差尾，验差”的过程，直到能方便判断为止。例如：判断 1675282 是不是“节俭数”，判断过程： $167528 - 2 \times 5 = 167518$ ， $16751 - 8 \times 5 = 16711$ ， $1671 - 1 \times 5 = 1666$ ， $166 - 6 \times 5 = 136$ ，到这里如果你仍然观察不出来，就继续 $13 - 6 \times 5 = -17$ ，-17 是 17 的整数倍，所以 1675282 能被 17 整除，所以 1675282 是“节俭数”。

(1) 请用上述方法判断 7259 和 2098752 是否是“节俭数”，并说明理由。

(2) 一个五位节俭数 $\overline{ab213}$ ，其中千位上的数字为 b ，万位上的数字为 a ，且 $b = a - 1$ ，请利用上面方法求出这个数。

考点 03 数轴的综合应用

12. 阅读下列材料：

我们给出如下定义：数轴上给定 A, B 两点以及一条线段 PQ 。若线段 AB 的中点 R 在线段 PQ 上（点 R 能与点 P 或 Q 重合），则称点 A 与点 B 关于线段 PQ 径向对称如图（a）所示为点 A 与点 B 关于线段 P 径向

对称的示意图．如图 (b) 所示，在数轴上，点 O 为原点，点 A 表示的数为 -1 ，点 M 表示的数为 2 ．

解答下列问题：

如在数轴上，点 H, K, L 表示的数分别是 $-5, -4, -3$ ，当点 H 以每秒 1 个单位长度的速度向正半轴方向移动时，线段 KL 同时以每秒 3 个单位长度的速度向正半轴方向移动，设移动的时间为 $t(t > 0)$ 秒，问当 t 在范围_____时，线段 KL 上至少存在一点与点 H 关于线段 OM 径向对称．

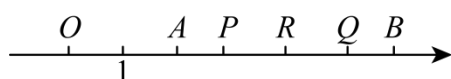


图 (a)

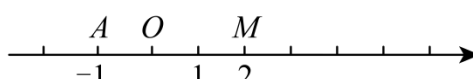


图 (b)

13. 对数轴上的点 P, Q ，我们把点 P 与点 Q 两点之间的距离记作 $d_{[PQ]}$ ，例如，在数轴上，点 P 表示的数是 5，点 Q 表示的数是 2，则点 P 与点 Q 两点之间的距离为 $d_{[PQ]} = 3$ ．已知点 O 为数轴原点，点 A 表示的数是 -1 ，点 B 表示的数为 5 ．

(1) $d_{[OA]} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $d_{[AB]} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

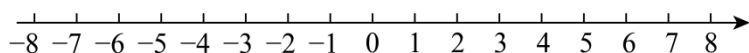
(2) 点 C 在数轴上表示的数为 x ，当满足 $d_{[AC]} = \frac{1}{2}$ 时，求 x 的值．

14. 【定义新知】

数轴是一个非常重要的工具，它使数和数轴上的点建立起一一对应的关系，揭示了数与点之间的内在联系，它是“数形结合”的基础：我们知道 $|4| = |4 - 0|$ ，它的几何意义是数轴上表示 4 的点与原点（即表示 0 的点）之间的距离，又如式子 $|7 - 3|$ ，它的几何意义是数轴上表示 7 的点与表示 3 的点之间的距离，也就是说，若点 A, B 在数轴上分别表示有理数 a, b ，则 A, B 两点之间的距离 $AB = |a - b|$ ．若点 P 表示的数为 x ，请根据数轴解决以下问题：

(1) 式子 $|x - (-5)|$ 在数轴上的几何意义是_____，若 $|x - (-5)| = 6$ ，则 x 的值为_____；

(2) 当 $|x + 3| + |x - 1|$ 取最小值时， x 可以取的所有整数是_____；



【解决问题】

(3) 如图，一条笔直的公路边有三个居民区 A, B, C 和市民广场 O ，居民区 A, B, C 分别位于市民广场左侧 5km ，右侧 1km ，右侧 3km ． A 小区有居民 1000 人， B 居民区有居民 2000 人， C 居民区有居民 3000 人，

现因物流需要，需要在该公路上建一个菜鸟驿站 P ，用于接收这 3 个小区的快递．若快递的运输成本为 1 元（千份·千米），那么菜鸟驿站 P 建在何处才能使总运输成本最低，最低成本是多少？



15. 数轴是一个非常重要的工具，它使数和数轴上的点建立起一一对应的关系，揭示了数与点之间的内在联系，它是“数形结合”的基础：我们知道 $|4| = |4 - 0|$ ，它的几何意义是数轴上表示 4 的点与原点（即表示 0 的点）之间的距离，又如式子 $|7 - 3|$ ，它的几何意义是数轴上表示 7 的点与表示 3 的点之间的距离，也就是说，在数轴上，如果点 A 表示的数记为 a ，点 B 表示的数记为 b ，则 A 、 B 两点间的距离就可记作 $|a - b|$ ．

回答下列问题：

(1) 几何意义是数轴上表示 2 的点与表示 -3 的点之间的距离的式子是_____；式子 $|a + 5|$ 的几何意义是_____．

(2) 根据绝对值的几何意义，当 $|x - 2| = 3$ 时， $x =$ _____；

(3) 当表示 x 的点在 -2 与 5 之间移动时， $|x - 5| + |x + 2|$ 的值为一个固定的值是_____；

(4) 探究： $|x + 1| + |x - 7|$ 的最小值是_____； $|x + 1| + |x - 7| + |x - 15|$ 的最小值为_____，此时 x 满足的条件是_____．

16. 【探究与发现】在一次数学探究活动中，数学兴趣小组通过探究发现可以通过用“两数的差”来表示“数轴上两点间的距离”如图 1，三条线段的长度可表示为： $AB = 4 - 2 = 2$ ， $CB = 4 - (-2) = 6$ ， $DC = -2 - (-4) = 2$ ，...

结论：数轴上任意两点表示的数为分别 a ， b ($b > a$)，则这两个点间的距离为 $b - a$ （即：用较大的数减去较小的数）

【理解与运用】

(1) 如图 2，数轴上 E 、 F 两点表示的数分别为 -2，-5，点 A 表示的点为 2，试计算： $EF =$ _____， $AF =$ _____．

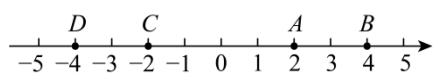


图1

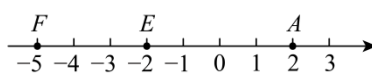


图2

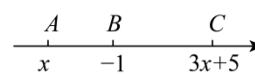


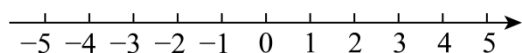
图3

【拓展与延伸】

(2) 如图 3，点 A 表示数 x ，点 B 表示 -1 ，点 C 表示 $3x+5$ ，且 $AB = \frac{1}{3}BC$ ，求点 A 和点 C 分别表示的数是多少？

(3) 在 (2) 条件下，图 3 的数轴上存在不与 A 、 B 、 C 重合的点 D ，使 $DA+DC=3DB$ ，则点 D 表示的数为_____ (直接写出答案)

17. 如图.



(1) 在数轴上标出数 -3.5 ， -1 ， 1.5 ， 2 所对应的点 A ， B ， C ， D 。

(2) 阅读材料：我们把数 a 在数轴上所对应的点到原点的距离叫作 a 的绝对值，记作 $|a|$ 。同样地，我们也把

数 m 在数轴上所对应的点 M 到数 n 在数轴上所对应的点 N 的距离叫作 $m-n$ 的绝对值，记作 $|m-n|$ 。例如：

第 (1) 题中，点 C 到点 D 的距离记作 $|1.5-2|$ ，化简得 0.5 ；点 C 到点 B 的距离记作 $|1.5-(-1)|$ ，化简得 2.5 ，

在 (1) 的条件下，回答下列问题：

① 点 A 到点 B 的距离是_____；

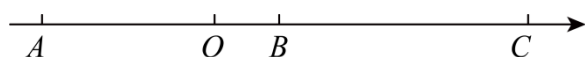
② 到点 B 的距离是 $1\frac{1}{3}$ 的点在数轴上所对应的数是_____；

③ 如果点 E 在数轴上所对应的数是 x ，那么当 $x=_____$ 时，点 E 到点 B 的距离 $|x-(-1)|$ 等于点 E 到点 D 的距离 $|x-2|$ 。

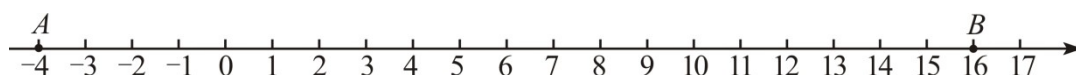
(3) 在纸上画一条数轴，点 A ， B ， C 在数轴上的位置如图所示，现将该纸沿过点 B 的一条直线对折，使得数轴上点 B 左右两侧的部分重合，此时数轴上的点 A 与点 C 恰好重合，原点 O 与数轴上的另一点 P 重合；

将白纸重新展平，此时点 P 到原点 O 的距离等于点 P 到点 C 的距离，如果点 C 在数轴上所对应的数是 $\frac{9}{2}$ ，

那么点 A 在数轴上所对应的数是_____。



18. 【背景知识】数轴是初中数学的一个重要工具，利用数轴可以将数与形完美地结合。研究数轴我们发现了许多重要的规律：若数轴上点 A 、点 B 表示的数分别为 a 、 b ，则 A ， B 两点之间的距离 $AB=|a-b|$ ，线段 AB 的中点表示的数为 $\frac{a+b}{2}$ 。



【问题情境】如图，数轴上点 A 表示的数为 -4 ，点 B 表示的数为 16 ，点 P 从点 A 出发，以每秒 3 个单位长度的速度沿数轴向右匀速运动，同时点 Q 从点 B 出发，以每秒 2 个单位长度的速度向左匀速运动。设运动时间为 t 秒 ($t > 0$)。

【综合运用】

(1) 填空：

① A 、 B 两点间的距离 $AB =$ _____，线段 AB 的中点表示的数为 _____；

② 当 t 为 _____ 秒时，点 P 与点 Q 相遇。

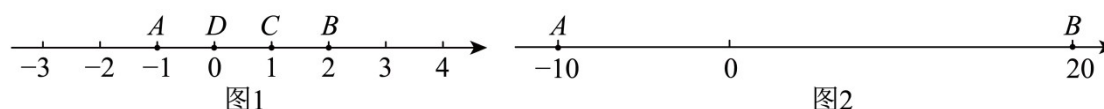
(2) ① 用含 t 的代数式表示： t 秒后，点 P 表示的数为 _____；点 Q 表示的数为 _____；

② 若将数轴翻折，使点 A 与数轴上表示 6 的点重合，则此时点 B 与数轴上表示数 _____ 的点重合。

(3) 若点 M 为 PA 的中点，点 N 为 PB 的中点，点 P 在运动过程中，线段 MN 的长度是否发生变化？若变化，请说明理由；若不变，请求出线段 MN 的长。

19. 阅读理解：

若 A 、 B 、 C 为数轴上三个点，点 C 到 A 的距离是点 C 到点 B 距离的 2 倍，我们就称点 C 是 $[A, B]$ 的赞点。



(1) 如图 1，点 A 表示的数为 -1 ，点 B 表示的数为 2 ，表示 1 的点 C 到点 A 的距离是 2 ，到点 B 的距离是 1 ，那么点 C 是 $[A, B]$ 的赞点；又如表示 0 的点 D 到点 A 的距离是 1 ，到点 B 的距离是 2 ，那么点 D _____ $[A, B]$ 的赞点，但点 D _____ $[B, A]$ 的赞点；(横线上填写“是”或“不是”)

(2) 若 M 、 N 为数轴上两点，点 M 所表示的数是 -2 ，点 N 所表示的数是 4 ，则数 _____ 所表示的点是 $[M, N]$ 的赞点；

(3) 如图 2， A 、 B 为数轴上两点，点 A 所表示的数为 -10 ，点 B 所表示的数是 20 。现在有一辆电动小汽车 P 从点 B 出发前往点 A ，以 2 个单位每秒的速度向左运动，到达点 A 停止。当经过 _____ 秒时， P 、 A 和 B 中恰有一个点是其中两个点的赞点？

20. 在数轴上，把表示数 1 的点称为基准点，记作点 $\bar{0}$ ，对于两个不同的点 P 和 Q ，若点 P 、点 Q 到基准点 $\bar{0}$ 的距离相等，则称点 P 与点 Q 互为基准变换点。例如，点 P 表示数 -1 ，点 Q 表示数 3 ，它们与基准点

$\bar{0}$ 的距离都是两个单位长度，点 P 与点 Q 互为基准变换点。

(1) 已知点 A 表示数 a ，点 B 表示数 x ，点 A 与点 B 互为基准变换点。

① 若 $a = 0$ ，则 $x = \underline{\quad}$ ；若 $a = 4$ ，则 $x = \underline{\quad}$ ；

② 用含 a 的一次代数式表示 x ，则 $x = \underline{\quad}$ ；

(2) 点 M 在点 N 的左边 8 个单位长度处，对点 M 做如下操作：点 M 沿数轴向右移动 k ($k > 0$) 个单位长度得到 M_1 ， M_2 为 M_1 的基准变换点，点 M_2 沿数轴向右平移移动 k 个单位长度得到 M_3 ， M_4 为 M_3 的基准变换点，... 依此顺序不断地重复，得到 $M_5, M_6, \dots, M_n$ 。若无论 k 为何值， M_n 与 N 两点间的距离都是 2024，则此时 $M_n = \underline{\quad}$ 。

21. 已知在数轴上点 A_1 所对应的数为 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，点 A_2 所对应的数为 $a_2 = \frac{2}{3}$ ，...，点 A_n 所对应的数为 $a_n = \frac{n}{n+1}$

(n 为正整数)。请解答下列问题：

(1) 试写出点 A_3 和 A_4 所对应的数并比较它们的大小：

$a_3 = \underline{\quad}$ ， $a_4 = \underline{\quad}$ ，比较大小： $a_3 \underline{\quad} a_4$ 。（填入“>”或者“<”）。

(2) 如果我们把数轴上的点 A_1 和点 A_2 的距离记为 $|A_1A_2|$ 且 $|A_1A_2| = |a_1 - a_2|$ ，点 A_2 和点 A_3 的距离记为 $|A_2A_3|$ 且 $|A_2A_3| = |a_2 - a_3|$ ，...，点 A_{n-1} 和点 A_n 的距离记为 $|A_{n-1}A_n|$ 且 $|A_{n-1}A_n| = |a_{n-1} - a_n|$ ($n > 1$)。请根据理解以下回答

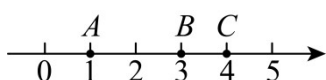
(直接写出结果)：

① $|A_1A_2| + |A_2A_3| + \dots + |A_{2024}A_{2025}| = \underline{\quad}$ ；

② 使 $|A_{n-1}A_n| > \frac{1}{2024}$ 成立的正整数 n 共有 $\underline{\quad}$ 个。

22. 对于数轴上的 A ， B ， C 三点，给出如下定义：若其中一个点与其它两个点的距离恰好满足 2 倍的数量关系，则称该点是其它两个点的“联盟点”。

例如数轴上点 A ， B ， C 所表示的数分别为 1，3，4，此时点 B 是点 A ， C 的“联盟点”。



(1) 若点 A 表示数 -2，点 B 表示数 3，点 M 是点 A ， B 的“联盟点”，点 M 在 A 、 B 之间，且表示一个负数，则点 M 表示的数为 $\underline{\quad}$ ；

- (2)若点 A 表示数 -2 ，点 B 表示数 2 ，下列各数 $-\frac{2}{3}$ ， 0 ， 4 ， 6 所对应的点分别为 C ， D ， E ， F ，其中是点 A ， B 的“联盟点”的是_____；
- (3)点 A 表示数 -15 ，点 B 表示数 25 ， P 为数轴上一点，且点 P 在点 B 的右侧，点 P ， A ， B 中，有一个点恰好是其它两个点的“联盟点”，直接写出此时点 P 表示的数_____。

考点 04 数的整除

23．小丽是个爱思考的学生，最近，她发现一些特殊的两位数乘法，
如： $21 \times 29 = 609$ $23 \times 27 = 621$

$31 \times 39 = 1209$ $52 \times 58 = 3016$

- (1)根据上述算式的规律请计算： $87 \times 83 =$ _____
- (2)试写出一个与上述算式具有同样特征的算式：
- (3)为了反映上述规律，如果设其中一个因数十位上的数字为 m ，个位上的数字为 n ，那么该因数可表示为：_____，另一个因数可表示为_____，计算结果可表示为_____。

24．阅读以下材料并回答问题：

要写出一个整数的因数，我们可以用试除的方法一个个试算出来，也可以按照规律一对一对地写出来。但对于数字较大的合数，这样求因数既费时，又容易漏掉。有没有更好的办法呢？有人提出，可以先将合数 N 分解素因数，然后把每个素因数的个数加 1，连乘起来的乘积就是这个合数的所有因数的个数。

例如， $30 = 2 \times 3 \times 5$ ，30 的素因数有 1 个 2，1 个 3，1 个 5，那么 30 的因数个数为 $(1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 8$ 个。

用材料中提到的方法，回答下列问题：

- (1) $M = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ ，则 M 的因数个数为_____个。
- (2) $N = a \times a \times b \times b \times b \times c \times d$ (a, b, c, d 为互不相同的素数)，则 N 的因数个数为_____个。
- (3)求出 2160 的所有因数个数。

25．晓风在学习《数的整除》这一章节后，对于找一个合数的因数进行了研究（如下表所示）：

整 数	分解素因数	素因数	所有因数	素因 数个	因数 个数
--------	-------	-----	------	----------	----------

				数	
4	$4 = 2 \times 2$	2、2	1、2、4	2	3
6	$6 = 2 \times 3$	2、3	1、2、3、6	2	4
8	$8 = 2 \times 2 \times 2$	2、2、2	1、2、4、8	3	4
12	$12 = 2 \times 2 \times 3$	2、2、3	1、2、3、4、6、12	3	6
90	$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$	2、3、 3、5	1、2、3、5、6、9、10、15、 18、30、45、90	4	12
216	$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$	2、2、 2、3、 3、3	1、2、3、4、6、8、9、12、 18、24、27、36、54、72、 108、216	6	16

(1)观察表格，晓风发现：如果要找到一个整数的所有因数，可以先对其进行分解质因数，

例如： $75 = 3 \times 5 \times 5$ ，它有_____个因数，分别是_____；

$3q = 3 \times q$ ($q \neq 3$ 且 q 是素数)，它有_____个因数，分别是_____；

(2)进一步观察因数的个数和素因数个数之间的关系，填空：

若 $a = p \times p$ (其中 p 为素数)，则 a 的因数个数为_____；

若 $b = \underset{m\text{个}p\text{连乘}}{p \times p \times p \times \cdots \times p} \times p$ (其中 p 为素数， m 为正整数)。则 b 的因数个数为_____；(用含字母 m 的式子表示)

若 $c = \underset{7\text{个}p\text{连乘}}{p \times p \times p \times \cdots \times p} \times \underset{8\text{个}q\text{连乘}}{p \times q \times q \times q \times \cdots \times q}$ (其中 p 、 q 为不同大小的素数)，则 c 的因数个数为_____。

考点 05 实际应用题；幻方问题

26．我国的个人所得税中的工资、薪金所得，适用超额累进 7 级税率，税率情况见下表

税率表：工资、薪金所得适用个人所得税累进税率表

级数	全月应纳税所得额	税率	速算扣除数 (元)

1	不超过 1500 元的	3%	0
2	超过 1500 元至 4500 元的部分	10%	105
3	超过 4500 元至 9000 元的部分	20%	a
4	超过 9000 元至 35000 元的部分	25%	1005
6	超过 35000 元至 55000 元的部分	30%	2755
6	超过 55000 元至 80000 元的部分	35%	5505
7	超过 80000 元的部分	45%	13505

说明：本表只含了由纳税人负担的工资、薪金所得部分

一般按照以下的原则计算税后工资、薪金收入；

应纳税所得额 = 应发工资、薪金 - 四金 - 起征点； 四金 = 应发工资、薪金 $\times$ 17.5%； 起征点 = 3500 元； 应纳税额有两种计算的方法： 方法一：按级数超额累进税率计算； 方法二：应纳税额 = 应纳税所得额 $\times$ 适用税率 - 速算扣除数。 税后工资、薪金 = 应发工资、薪金 - 四金 - 应纳税额	举例：应发工资、薪金为 8000 元。 四金 = $8000 \times 17.5\% = 1400$ (元) 应纳税所得额 = $8000 - 1400 - 3500 = 3100$ (元) 应纳税额 方法一： $1500 \times 3\% + (3100 - 1500) \times 10\% = 205$ (元) 方法二： $3100 \times 10\% - 105 = 205$ (元) 税后工资、薪金 = $8000 - 1400 - 205 = 6395$ (元)
--	---

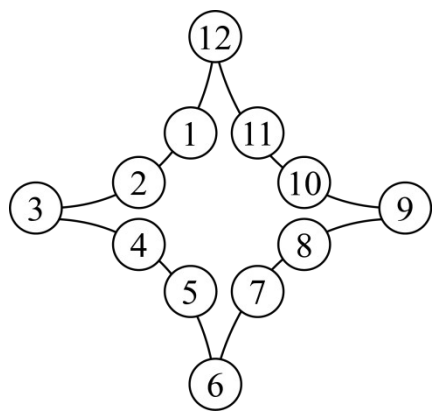
(1) 请根据表格所给的信息求出第 3 级的“速算扣除数” a ；

(2) 某公司小陈现在每月缴纳四金 1680 元，下月起应发工资、薪金将提高 10%，请求出下月起小陈每月的税后工资、薪金数额。

27. 如图，圆圈内分别标有 1、2、...、12，共 12 个数字，电子跳蚤每跳一步，可以从一个圆圈逆时针跳到相邻的圆圈，若电子跳蚤所在圆圈的数字为 n ，则电子跳蚤连续 $(3n-2)$ 步作为一次跳跃。

例如：电子跳蚤从标有数字 1 的圆圈需跳 $3 \times 1 - 2 = 1$ 步到标有数字 2 的圆圈内，完成一次跳跃，第二次则要连续跳 $3 \times 2 - 2 = 4$ 步到达标有数字 6 的圆圈。

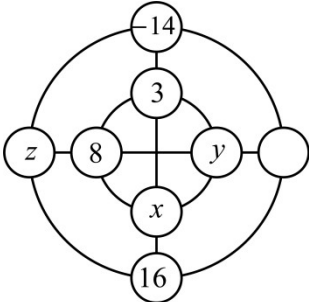
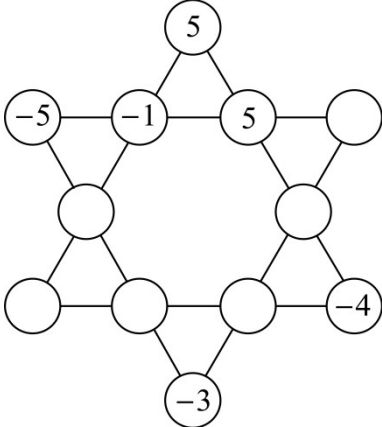
依次规律，若电子跳蚤从①开始：



- (1)第 3 次能跳到圆圈内所标的数字为_____；
- (2)第 2018 次电子跳蚤能跳到圆圈内所标的数字为_____。

28．阅读下列素材，完成探究任务：

探究“幻圆”、“幻星”之谜		
素材 1	我国南宋数学家杨辉在《续古摘奇算法》中的“攒九图”中提出“幻圆”的概念．如图是一个“二阶幻圆”模型，将 2、3、4、6、7、8、9、11 这八个数字填入图中的圆圈内，使横、竖以及内外两圈上的 4 个数字之和都相等，则它是一个“二阶幻圆”．	图1
素材 2	在一个“二阶幻圆”中，横、竖以及内外两圈上的 4 个数字之和都相等，我们把这个和叫做“二阶幻圆”的幻和．例如，图 1 中的“二阶幻圆”有 4 个幻和，它的幻和是 25．计算“二阶幻圆”幻和的方法是将图中所有数字之和的 2 倍，除以幻和的个数．例如，图 1 中幻和的计算方	

	式为： $2 \times (2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 11) \div 4 = 25$.	
问题解决		
任务1	如图 2，小明将 -2、4、-6、8、-10、12、-14、16 这八个数字分别填入圆圈内，使它成为一个“二阶幻圆”. 请完成下列问题： (1) 此“二阶幻圆”的幻和是 _____，x 处所填的数字是 _____； (2) y 与 z 两处所填的数字之和是 _____.	 图2
任务2	类似地，如图 3 是一个“六角幻星”模型，它有 6 条边，如果每条边上的 4 个数字之和都相等，那么它是一个“六角幻星”. 在一个“六角幻星”中，它的每条边上 4 个数字之和都相等，我们把这个和叫做“六角幻星”的幻和. 在图 3 中，小明将 -5、-4、-3、-2、-1、0、1、2、3、4、5、6 这十二个数字分别填入圆圈内，使它成为一个“六角幻星”. 请完成下列问题： (1) 此“六角幻星”的幻和是_____； (2) 将图 3 中的“六角幻星”的空缺部分补充完整. _____.	 图3

考点 06 综合应用题

29. 数形结合是解决数学问题的一种重要的思想方法. 阅读材料, 并完成下列相关问题.

材料一: 如图 1, 将一个边长为 1 的正方形纸片分割成 7 个部分, 部分①的面积是正方形面积的一半, 部

分②的面积是①面积的一半, 部分③的面积是②面积的一半, 以此类推, 则阴影部分的面积是 $\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$,

空白部分的面积之和为: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} = 1 - \frac{1}{2^6}$.

材料二: 欲求 $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^{30}$ 的值, 可以按照如下步骤进行:

令 $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^{30}$ ①,

等式两边同时乘以 2, 得 $2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^{31}$ ②,

由②式减去①式, 得 $S = 2^{31} - 1$,

$\therefore 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^{30} = 2^{31} - 1$.

解决问题:

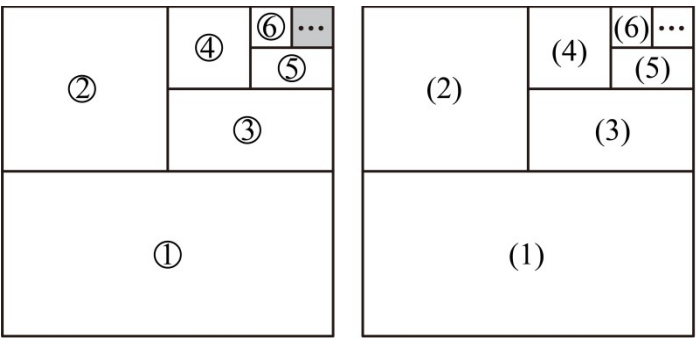


图1

图2

(1) 图 1 部分③的面积为_____.

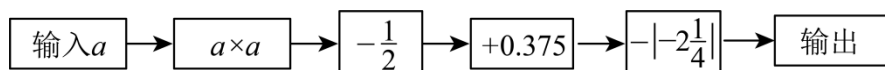
(2) 如图 2, 若按这样的方式继续分割下去, 受材料一的启发, 可求得 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2024}}$ 的值为_____.

(3) 利用材料二提供的方法, 请你求出 $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \cdots + 5^{20}$ 的值.

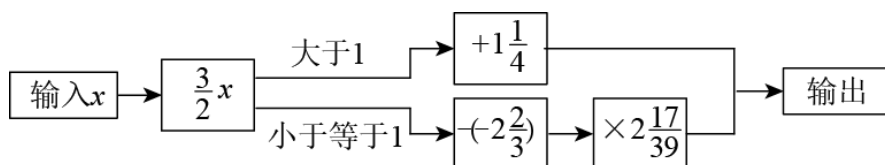
(4) 通过学习材料一、材料二, 选择你喜欢的方法解决问题: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^{100}}$ 的值为_____.

30. 计算机的运算编程与数学原理是密不可分的, 相对简单的运算编程就是数值转换机.

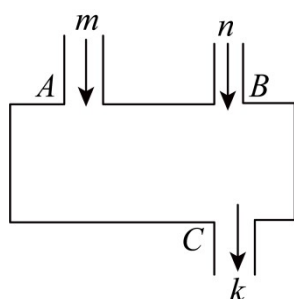
(1) 如图, A 同学设置了一个数值转换机, 若输入 a 的值为 2, 则输出的结果为_____.



(2) 如图， B 同学设置了一个数值转化机，如果输入的 x 分别为 $\frac{8}{15}$ 和 $1\frac{1}{6}$ ，那么输出的结果分别为_____和_____。



(3) C 同学也设置了一个计算装置示意图， A, B 是数据入口， C 是计算结果的出口，计算过程是由 A, B 分别输入自然数 m 和 n ，经过计算后的有理数 k 由 C 输出，此种计算装置完成的计算满足以下三个条件：



① 若 A, B 分别输入 1，则输出结果 1，记 $k = C(1, 1) = 1$ ；

② 若 B 输入 1， A 输入自然数增大 1，则输出结果为原来的 3 倍，记 $k = C(m, 1) = 3C(m-1, 1)$ ；

③ 若 A 输入任何固定自然数不变， B 输入自然数增大 1，则输出结果比原来增加 $\frac{2}{15}$ ，记

$k = C(m, n) = C(m, n-1) + \frac{2}{15}$ ，问：当 A 输入自然数 6， B 输入自然数 6 时， k 的值是多少？