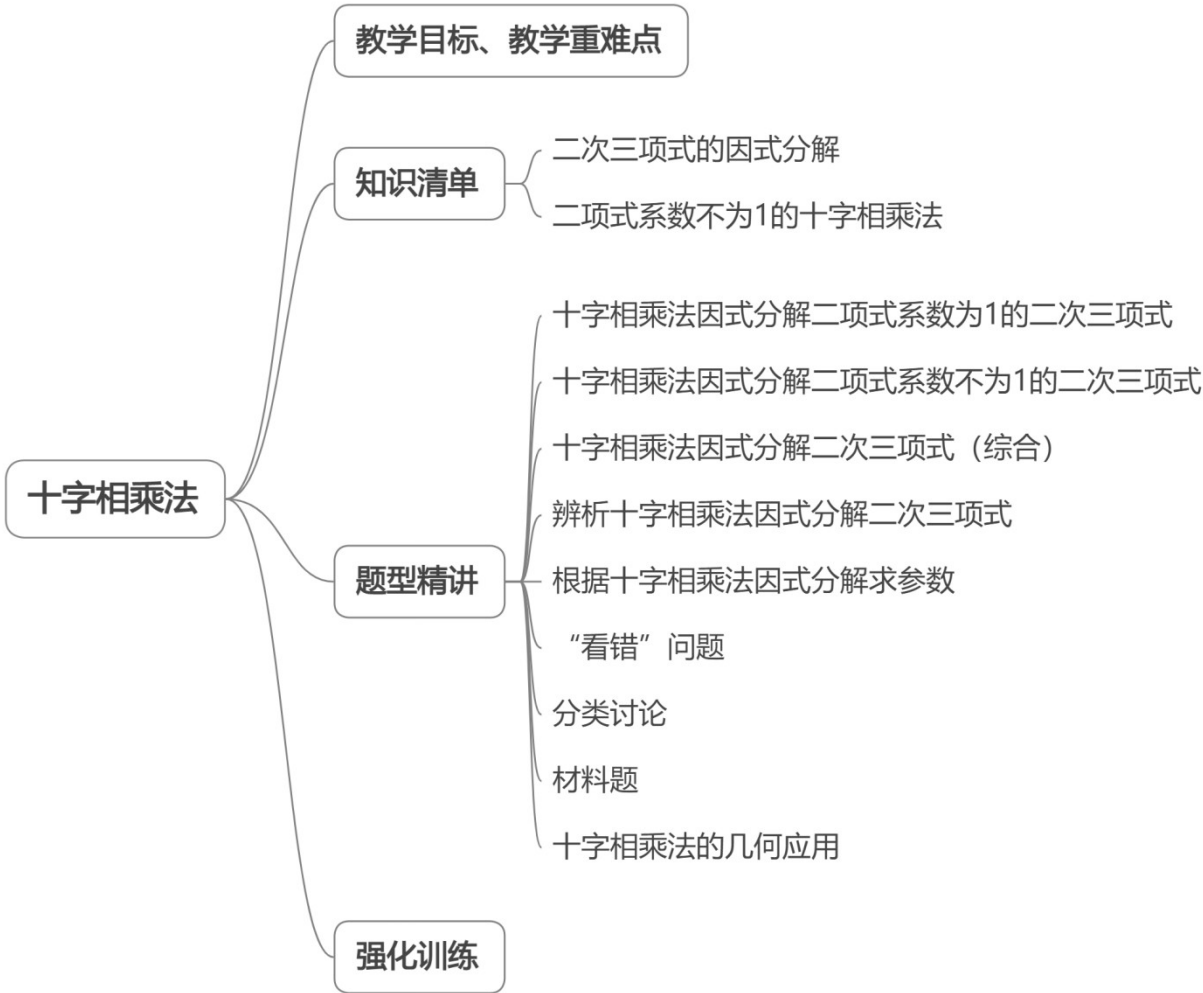


专题 12.3 十字相乘法

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 熟练掌握首项系数为 1 的形如型的二次三项式的因式分解； 2. 进一步掌握首项系数不为 1 的简单的整系数二次三项式的因式分解； 3. 会解十字相乘法因式分解有关应用题。
教学重难点	1.重点 (1) 利用十字相乘法进行因式分解； (2) 利用十字相乘法因式分解求参数； (3) 十字相乘法因式分解的应用。 2.难点

- | |
|--|
| <p>(1) 二次项系数不为 1 的二次三项式的因式分解；</p> <p>(2) 常数项的因数分解往往有多种情况；分类讨论思想。</p> |
|--|

知识清单

知识点 1 二次三项式的因式分解

1. 观察

关于 x 的整式 $x^2+(a+b)x+ab$ 有什么特征？

$x^2+(a+b)x+ab$ 是一个关于 x 的二次三项式，其中二次项系数为 1，常数项是两个数 a 与 b 的积，而一次项系数恰好是这两个数 a 与 b 的和。

由 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ ，可得 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ 。

这就将 $x^2+(a+b)x+ab$ 分解成两个整式的积。

如果关于 x 的二次三项式 x^2+px+q 的常数项 q 能分解成两个因数 a 与 b 的积，且一次项系数 p 又恰好等于 $a+b$ ，那么 x^2+px+q 就可以进行如下的因式分解：

$$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

2. 思考

如何将二次三项式 x^2+3x+2 因式分解？

观察 x^2+3x+2 的系数，它的二次项系数是 1，常数项 $2=1 \times 2$ ，一次项系数 $3=1+2$ ，所以 $x^2+3x+2=x^2+(1+2)x+1 \times 2=(x+1)(x+2)$ 。

上述将 x^2+3x+2 因式分解的过程，可以形象地表示为

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ & \times \\ 1 & 2 \end{array}$$

先分解二次项系数 $1=1 \times 1$ ，分别写在十字交叉线的左上角和左下角；再分解常数项 $2=1 \times 2$ ，分别写在十字交叉线的右上角和右下角；然后交叉相乘并求和，看它是否等于一次项系数 3。

一般地，如果二次三项式 $x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ ，

那么这样的因式分解的过程可以表示为

$$\begin{array}{cc} 1 & a \\ & \times \\ 1 & b \end{array}$$

像这样，通过适当地分解系数，把二次三项式因式分解的方法叫作十字相乘法。

要点：

常数项的因数分解往往有多种情况，此时选择的关键在于判断哪两个因数的和恰好等于一次项的系数。

【即学即练】

1. 十字相乘法分解因式：

(1) $x^2 + 3x + 2$

(2) $x^2 - 3x + 2$

(3) $x^2 + 2x - 3$

(4) $x^2 - 2x - 3$

(5) $x^2 + 5x + 6$

(6) $x^2 - 5x - 6$

(7) $x^2 + x - 6$

(8) $x^2 - x - 6$

(9) $x^2 - 5x - 36$

(10) $x^2 + 3x - 18$

2. 分解因式：

(1) $x^2 - 3x + 2$ ；

(2) $x^2 + 3x - 10$ 。

3. 因式分解 $x^2 - 5x + 6$ ，结果正确的是 ()

A. $(x+2)(x+3)$ B. $(x-2)(x-3)$ C. $(x-1)(x-6)$ D. $(x+1)(x-6)$

4. 因式分解： $x^2 - 6x + 8 =$ _____。

5. 把 $x^2 + 3x + c$ 分解因式得 $(x+1)(x+2)$ ，则 c 的值为 ()

A. 2 B. 3 C. 5 D. 6

知识点2 二次项系数不为1的十字相乘法

二次项系数不为1的十字相乘法

在二次三项式 $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 中，如果二次项系数 a 可以分解成两个因数之积，即 $a = a_1a_2$ ，常数项 c 可以分解成两个因数之积，即 $c = c_1c_2$ ，把 a_1, a_2, c_1, c_2 排列如下：

$$\begin{array}{cc} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \\ \hline a_1c_2 + a_2c_1 \end{array}$$

按斜线交叉相乘，再相加，得到 $a_1c_2 + a_2c_1$ ，若它正好等于二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 的一次项系数 b ，即 $a_1c_2 + a_2c_1 = b$ ，那么二次三项式就可以分解为两个因式 $a_1x + c_1$ 与 $a_2x + c_2$ 之积，即 $ax^2 + bx + c = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$ 。

要点：

- (1) 分解思路为“看两端，凑中间”
- (2) 二次项系数 a 一般都化为正数，如果是负数，则提出负号，分解括号里面的二次三项式，最后结果不要忘记把提出的负号添上。

【即学即练】

1. 运用十字相乘法分解因式：

- (1) $3x^2 - x - 2$ ；
- (2) $10x^2 + 21x + 8$ ；
- (3) $12x^2 - 11xy - 15y^2$ ；
- (4) $(x + y)^2 - 3(x + y) - 10$ 。

2. 用十字相乘法分解下列因式。

- (1) $x^2 - 7x + 6$
- (2) $y^2 - 2y - 15$
- (3) $3x^2 - 11x + 10$
- (4) $a^2 - ab - 6b^2$
- (5) $12x^2 - 11xy - 15y^2$
- (6) $(x + y)^2 - 3(x + y) - 10$

3. 整式 $4x^2 - 2x - 6$ 分解因式得

4. 小明把整式 $2x^2 - 13x + n$ 分解因式，有一个因式是 $(x - 5)$ ，则 n 的值为 ()

- A. -15 B. 40 C. -40 D. 15

题型精讲

题型 01 十字相乘法因式分解二次项系数为 1 的二次三项式

【典例 1】 . 用十字相乘法解方程：

$$(1) x^2 + 5x - 6 = 0 ;$$

$$(2) x^2 - 2x - 3 = 0 .$$

【变式 1】 . 分解因式：

$$(1) x^2 - 10x + 16 ;$$

$$(2) x^2 - 2x - 3 .$$

【变式 2】 . 将下列各式分解因式：

$$(1) x^2 - x - 56 ;$$

$$(2) x^2 - 10x + 16 ;$$

$$(3) 10 - 3x - x^2$$

题型 02 十字相乘法因式分解二次项系数不为 1 的二次三项式

【典例 1】 . 因式分解： $4x^2 - 5x - 6$.

【变式 1】 . 因式分解： $3x^2 - 4x + 1$.

题型 03 十字相乘法因式分解二次三项式 (综合)

【典例 1】 . 分解因式：

$$(1) x^2 + 9xy + 14y^2$$

$$(2) x^2 - xy - 12y^2$$

$$(3) 2x^2 + 9xy - 5y^2$$

$$(4) 3x^2 - 7xy - 6y^2$$

$$(5) 8x^2 + 10xy + 3y^2$$

$$(6) 10x^2 + 27xy + 5y^2$$

【变式 1】 . 分解因式：

$$(1) x^2 + 9x + 14$$

$$(2) x^2 - x - 12$$

$$(3) 2x^2 + 9x - 5$$

$$(4) 3x^2 - 7x - 6$$

$$(5) -8x^2 - 10x - 3$$

$$(6) -10x^2 - 27x - 5$$

【变式 2】 . 分解因式：

$$(1) x^2 + 9xy + 14y^2$$

$$(2) x^2 - xy - 12y^2$$

$$(3) 2x^2 + 9xy - 5y^2$$

$$(4) 3x^2 - 7xy - 6y^2$$

$$(5) 3x^2 - 2xy - 8y^2$$

$$(6) -5x^2 + 3xy + 14y^2$$

【变式 3】 . 用十字相乘法分解因式：

$$(1) a^2 + 2a - 3 ;$$

$$(2) 2x^2 - 6x - 8 ;$$

$$(3) (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 .$$

【变式 4】 . 用十字相乘法分解下列因式 .

$$(1) x^2 - 7x + 6$$

$$(2) y^2 - 2y - 15$$

$$(3) 3x^2 - 11x + 10$$

$$(4) a^2 - ab - 6b^2$$

$$(5) 12x^2 - 11xy - 15y^2$$

$$(6) (x+y)^2 - 3(x+y) - 10$$

题型 04 辨析十字相乘法因式分解二次三项式

【典例 1】 . 下列各式因式分解正确的是 ()

A. $x^2 - 6x - 16 = (x - 8)(x + 2)$

B. $x^2y^2 - 10xy + 16 = (xy + 2)(xy + 8)$

C. $x^2 + 13xy - 30y^2 = (x - 10y)(x - 3y)$

D. $x^2 - 5xy + 6y^2 = (x - 2)(x - 3)$

【变式1】 . 下列算式中，计算结果为 $x^2 + x - 12$ 的是 ()

A. $(x + 3)(x - 4)$

B. $(x - 3)(x - 4)$

C. $(x - 3)(x + 4)$

D. $(x + 3)(x + 4)$

【变式2】 . 下列不可利用 $x^2 + (p + q)x + pq = (x + p)(x + q)$ 分解因式的是 ()

A. $x^2 - 3x + 2$

B. $x^2 + 3x + 2$

C. $x^2 - 2x - 3$

D. $x^2 + 2x + 3$

【变式3】 . 将 $3x^2 - 5x + 2$ 在实数范围内因式分解，正确的结果是 ()

A. $(x + 1)(x + \frac{2}{3})$

B. $(x - 1)(x - \frac{2}{3})$

C. $3(x - 1)(x + \frac{2}{3})$

D. $(3x - 2)(x - 1)$

题型 05 根据十字相乘法因式分解求参数

【典例1】 . 若 $x^2 + x - 12 = (x + p)(x + q)$ ，则 p, q 的值分别为 ()

A. $p = 3, q = 4$

B. $p = -3, q = 4$

C. $p = 3, q = -4$

D. $p = -3, q = -4$

【变式1】 . 若分解因式 $x^2 + mx - 15 = (x - 3)(x - n)$ 则 m 的值为 ()

A. -5

B. 5

C. -2

D. 2

【变式2】 . 若 $x^2 - 2x + 1$ 与 $x^2 + 2x - 3$ 的公因式为 $x - c$ ，则 c 之值为何？ ()

A. -3

B. -1

C. 1

D. 3

【变式3】 . 已知 $m^2 + n^2 + 3(m + n) = 10 - 2mn$ ，则 $m + n =$ _____ .

题型 06 “看错”问题

【典例1】 . 两位同学将一个二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 分解因式时，其中一位同学因看错了一次项系数而分

解成 $3(x-1)(x+2)$ ，另一位同学因看错了常数项而分解成 $3(x+2)(x-3)$ ，则原来的整式为

【变式1】 . 因式分解 x^2+ax+b ，甲看错了 a 的值，分解的结果是 $(x+6)(x-2)$ ，乙看错了 b 的值，分解的结果为 $(x-8)(x+4)$ ，那么 x^2+ax+b 分解因式正确的结果为 ()

- A . $(x+3)(x-4)$ B . $(x+4)(x-3)$
C . $(x+6)(x-2)$ D . $(x+2)(x-6)$

【变式2】 . 在对整式 x^2+ax+b 进行因式分解时， M 同学看错了 b ，分解为 $(x+2)(x+4)$ ； N 同学看错了 a ，分解为 $(x-1)(x-9)$. (两人后面因式分解没有错误)，则 $a=_____$ ， $b=_____$.

题型 07 分类讨论

【典例1】 . 已知二次三项式 $x^2-kx-15$ 能分解成系数为整数的两个一次因式的积，则整数 k 的取值有 ()

- A . 1个 B . 2个 C . 3个 D . 4个

【变式1】 . 若 $x^2+ax+18$ 能分解成两个因式的积，则整数 a 的取值可能有 ()

- A . 4个 B . 6个 C . 8个 D . 无数个

【变式2】 . 已知 $x^2-ax-24$ 在整数范围内可以分解因式，则整数 a 的值有_____个

题型 08 材料题

【典例1】 . 阅读下列材料，回答问题 . (¹) 形如 $x^2+(p+q)x+pq$ 型的二次三项式，有以下特点：①二次项系数是¹；②常数项是两个数之积；③一次项系数是常数项的两个因数之和 .

把这个二次三项式进行因式分解，可以这样来解：

$$\begin{aligned} x^2+(p+q)x+pq &= x^2+px+qx+pq = (x^2+px)+(qx+pq) = x(x+p)+q(x+p) \\ &= (x+p)(x+q) . \end{aligned}$$

因此，可以得 $x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$.

利用上面的结论，可以直接将某些二次项系数为¹的二次三项式分解因式；

(1) $m^2+7m-18=_____$ ；

(2) $x^2-2x-8=_____$ ；

(3) 分解因式： $x^2y^2 - 7xy + 10$

(4) 分解因式： $(x-y)^2 + 4(x-y) + 3$ ；

【变式 1】 . 仔细阅读下面例愿，并解答问思：已知二次三项式 $x^2 + 5x + m$ 有一个因式是 $x + 2$ ，求另一个因式以及 m 的值 .

解：设另一个因式为 $x + n$ ，得 $x^2 + 5x + m = (x + 2)(x + n)$ ，则 $x^2 + 5x + m = x^2 + (n + 2)x + 2n$ ，解得：

$n = 3, m = 6$. $\therefore$ 另一个因式为 $x + 3, m = 6$.

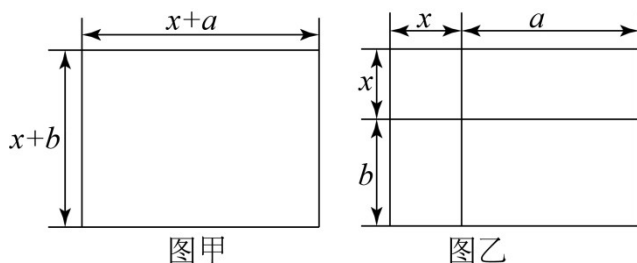
(1) 若二次三项式 $x^2 - x - 12$ 可分解为 $(x + 3)(x - a)$ ，则 $a = \underline{\quad}$ ；

(2) 若二次三项式 $2x^2 - bx - 6$ 可分解为 $(2x + 3)(x - 2)$ ，则 $b = \underline{\quad}$ ；

(3) 已知二次三项式 $6x^2 - 7x - k$ 有一个因式是 $3x - 2$ ，求另一个因式以及 k 的值 .

题型 09 十字相乘法的几何应用

【典例 1】 . 做一做计算：探究归纳，如图甲、图乙是两个长和宽都相等的长方形，其中长为 $(x + a)$ ，宽为 $(x + b)$.



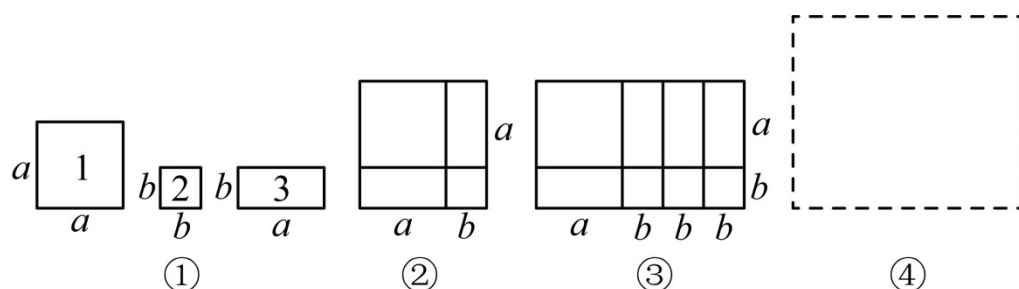
(1) 根据图甲、图乙的特征用不同的方法计算长方形的面积，得到关于字母 x 的系数是 1 的两个一次式相乘的计算规律，用数学式表达式为 $\underline{\quad}$.

(2) 尝试运用，利用因式分解与整式乘法的关系，我们可以利用上述表达式得到一些二次三项式的因式分解 .

若 $x^2 - 7x + m = (x - 9)(x + 2)$ ，则 $m = \underline{\quad}$.

(3) 若 $x^2 + px - 4$ 可以分解成关于 x 的两个一次式乘积的形式，则整数 p 的值一定是 $\underline{\quad}$.

【变式 1】 . 小刚同学动手剪了如图①所示的正方形与长方形纸片若干张 . 他用 1 张 1 号、1 张 2 号和 2 张 3 号卡片拼出一个新的图形 (如图②) . 根据图②的面积关系可得等式： $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ，即使用拼图将 $a^2 + 2ab + b^2$ 分解因式 .



(1) 如果要拼成一个长为 $(a+2b)$ ，宽为 $(a+b)$ 的大长方形，则需要 2 号卡片——张，3 号卡片——张；

(2) 当他拼成如图③所示的长方形，根据图③的拼图可以把整式 $a^2 + 4ab + 3b^2$ 分解因式，其结果是——；

(3) 动手操作，请依照小刚的方法，在④的方框中画出面积为 $a^2 + 5ab + 6b^2$ 的长方形拼图，并利用拼图分解因式 $a^2 + 5ab + 6b^2$ 。

【变式 2】 我国著名数学家华罗庚先生曾经说过：“数缺形时少直观，形少数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休。”可见，数形结合思想在解决数学问题，理解数学本质上发挥着重要的作用。在一节数学活动课上，老师带领同学们在拼图活动中探寻整式的乘法的奥秘。

情境一如下图，甲同学将 4 块完全相同的等腰梯形木片拼成如下两个图形，请你用含 a 、 b 的式子分别表示图 1 和图 2 中阴影部分的面积，并说明由此可以得到什么样的乘法公式；

情境一

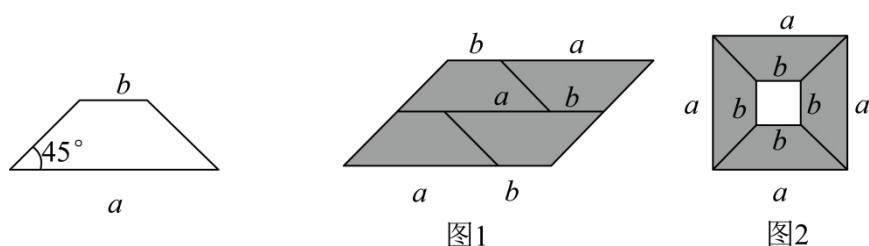
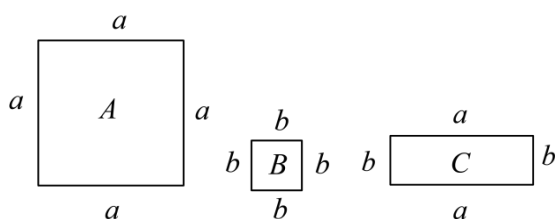


图1

图2

情境二乙同学用 1 块 A 木片、4 块 B 木片和若干块 C 木片拼成了一个正方形，请直接写出所拼正方形的边长（用含 a 、 b 的式子表示），并求所用 C 木片的数量；

情境二



情境三丙同学声称自己用以上的 A , B , C 三种木片拼出了一个面积为 $2a^2 + 7ab + 4b^2$ 的长方形；丁同学认为丙同学的说法有误，需要从中去掉一块木片才能拼出长方形。

你赞同哪位同学的说法，请求出该情况下所拼长方形的长和宽，并画出相应的图形。（要求：所画图形的长、宽与图样一致，并标注每一小块的长与宽）。

强化训练

一、单选题

1. 不能用十字相乘法分解的是 () .

A . $x^2 + x - 2$

B . $3x^2 - 10x^2 + 3x$

C . $x^2 - 3x + 2$

D . $x^2 - 6xy - 7y^2$

2. 下列各式因式分解正确的是 ()

A . $x^2 - 6x - 16 = (x - 8)(x + 2)$

B . $x^2y^2 - 10xy + 16 = (xy + 2)(xy + 8)$

C . $x^2 + 13xy - 30y^2 = (x - 10y)(x - 3y)$

D . $x^2 - 5xy + 6y^2 = (x - 2)(x - 3)$

3. 把整式 $x^2 + 3x - 54$ 分解因式，其结果是 ()

A . $(x + 6)(x - 9)$

B . $(x - 6)(x + 9)$

C . $(x + 6)(x + 9)$

D . $(x - 6)(x - 9)$

4. 把整式 $x^2 + ax + b$ 分解因式，得 $(x + 1)(x - 3)$ ，则 $a + b$ 的值是 ()

A . 1

B . -1

C . 5

D . -5

5. 要使 $x^2 + mx - 6$ 能在有理数的范围内因式分解，则整数 m 的值有 ()

A . 2 个

B . 3 个

C . 4 个

D . 5 个

6. 对于一个正整数 n ，若能找到正整数 a , b 使得 $n = a + b + ab$ ，则称 n 为一个“好数”，例如：

$3 = 1 + 1 + 1 \times 1$ ，则 3 就是一个“好数”，那么从 1 到 10 这 10 个正整数中“好数”有 ()

A . 3 个

B . 4 个

C . 5 个

D . 6 个

二、填空题

7. 分解因式： $x^2 + 6x - 7 =$ _____.

8. $p^2 - 5p - 36 =$ __

9. 因式分解： $x^2 - 2x - 35 =$ _____.

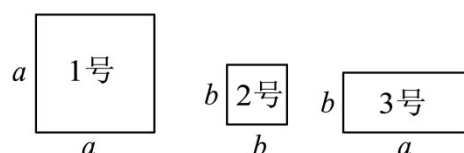
10. 分解因式：(1) $3a^2 - 6a + 3 =$ _____；(2) $x^2 + 7x + 10 =$ _____.

11. 分解因式： $a^3 - 4a^2 + 3a =$ _____.

12. 因式分解 $x^2 + ax + b$, 甲看错了 a 的值, 分解的结果是 $(x+6)(x-2)$, 乙看错了 b 的值, 分解的结果为 $(x-8)(x+4)$, 那么 $x^2 + ax + b$ 分解因式正确的结果为_____.

13. 已知 $x + y = 4$, $x - 3y = 3$, $xy = 2$, 则代数式 $x^3y - 2x^2y^2 - 3xy^3$ 的值是_____.

14. 如图所示, 若用 2 张 1 号正方形卡片, 2 张 2 号正方形卡片, 5 张 3 号长方形卡片拼成一个大的长方形, 则这个大的长方形的长和宽可分别表示为_____, _____.



三、解答题

15. 分解因式

(1) $m^2 - 4m - 5$.

(2) $x^2 + 2x - 3$

(3) $x^2 - 2x - 8$

16. 分解因式

(1) $x^2 - 4x - 12$;

(2) $x^2 - 4x - 5$;

(3) $-2x^3 - 6x^2y + 20xy^2$;

(4) $3x^2 - 19x - 14$.

17. 在因式分解的学习中我们知道对二次三项式 $x^2 + (a+b)x + ab$ 可用十字相乘法方法得出

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$, 用上述方法将下列各式因式分解:

(1) $x^2 + 5xy - 6y^2 =$ _____.

$$(2) x^2 - (4a + 2)x + 3a^2 + 6a = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$(3) x^2 - b(5x - a - 6b) - a^2 = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$(4) (2018x)^2 - 2017 \times 2019x - 1 = \underline{\hspace{2cm}} .$$

18. 阅读下面的材料，解答提出的问题：

已知：二次三项式 $x^2 - 4x + m$ 有一个因式是 $(x + 3)$ ，求另一个因式及 m 的值．

解：设另一个因式为 $(x + n)$ ，由题意，得

$$x^2 - 4x + m = (x + 3)(x + n) ,$$

$$x^2 - 4x + m = x^2 + (n + 3)x + 3n ,$$

$$\text{所以} \begin{cases} n + 3 = -4 \\ m = 3n \end{cases} , \text{解得} \begin{cases} m = -21 \\ n = -7 \end{cases} .$$

所以另一个因式为 $(x - 7)$ ， m 的值为 -21 ．

提出问题：

(1) 已知二次三项式 $x^2 - 5x - p$ 有一个因式是 $(x - 1)$ ，另一个因式是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 已知二次三项式 $3x^2 + 2x - k$ 有一个因式是 $(x - 5)$ ，求另一个因式及 k 的值．

19. 阅读理解：用“十字相乘法”分解因式 $2x^2 - x - 3$ 的方法（如图）．

第一步：二次项 $2x^2 = x \cdot 2x$ ；

第二步：常数项 $-3 = -1 \times 3 = 1 \times (-3)$ ，画“十字图”验算“交叉相乘之和”；

$\begin{array}{r} x \quad \quad -1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2x \quad \quad 3 \\ \hline (-1) \times 2x + 3 \cdot x = x \end{array}$ ①	$\begin{array}{r} x \quad \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2x \quad \quad -1 \\ \hline 3 \times 2x + (-1) \cdot x = 5x \end{array}$ ②
$\begin{array}{r} x \quad \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2x \quad \quad -3 \\ \hline 1 \times 2x + (-3) \cdot x = -x \end{array}$ ③	$\begin{array}{r} x \quad \quad -3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2x \quad \quad 1 \\ \hline -3 \times 2x + 1 \cdot x = -5x \end{array}$ ④

第三步：发现第③个“交叉相乘之和”的结果等于一次项 $-x$ ．

$$\text{即 } 2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3) .$$

像这样，通过画“十字图”，把二次三项式分解因式的方法，叫做“十字相乘法”。

运用结论：

(1)将整式 $x^2 - x - 2$ 进行因式分解，可以表示为 $x^2 - x - 2 =$ _____；

(2)若 $3x^2 + px + 5$ 可分解为两个一次因式的积，请画好“十字图”，并求整数 p 的所有可能值。