

专题 01 中考压轴题思维培养I-平行篇

题型归纳

题型一：压轴过渡题I（三角形中位线；构造平行初步）

题型二：压轴过渡题II（三角形一边平行线的性质的初步应用）

题型三：构造多重平行

题型四：截长补短+构造平行综合

题型五：梯形中构造平行

题型六：三角形一边的平行线的综合应用

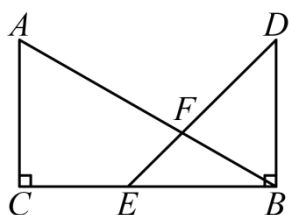
题型七：填空压轴题（新定义+动态几何）

注：共 16 题；学习背景——三角形一边的平行线

题型专练

题型一：压轴过渡题I（三角形中位线；构造平行初步）

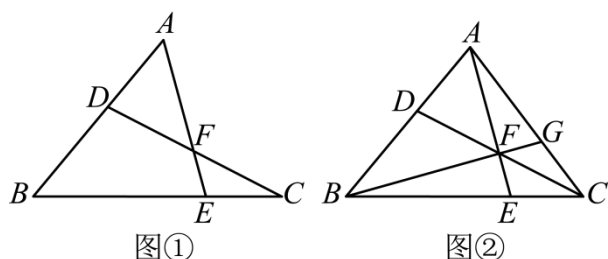
1. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， E 是 CB 上一动点，以 BE 为直角边构造等腰直角 $\triangle EBD$ ， $\angle DBE = 90^\circ$ ， DE 交 AB 于点 F 。



(1) AC 与 DB 的位置关系是_；

(2) 若 $AC = 2$ ，当 F 为 AB 的中点时，求 CE 的长。

2. 定义：如图①满足 $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$ 的几何图为“梅氏三角”。



图①

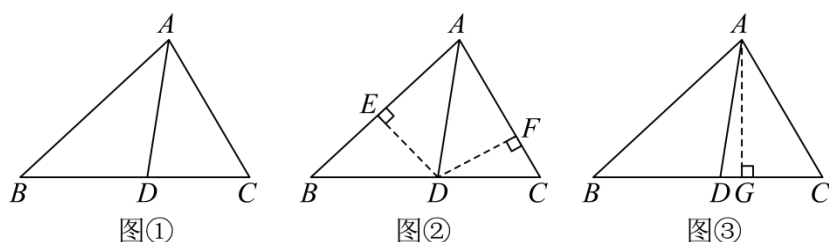
图②

(1) 如图①，证明 $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$ 的几何图称为梅氏三角。

(2) 如图②，证明 $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CG}{GA} = 1$ 。

题型二：压轴过渡题II（三角形一边平行线的性质的初步应用）

3. 阅读填空：如图① $\triangle ABC$ 中， AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，它具有一些和边有关的特殊性质，下面我们一块来研究。



图①

图②

图③

(1) 如图②，作 $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，垂足分别为 E 、 F ，易得 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot DE}{\frac{1}{2} AC \cdot DF} = \frac{AB}{AC}$ 。

如图③，作 $AG \perp BC$ ，垂足为 G ，易得 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} BD \cdot AG}{\frac{1}{2} CD \cdot AG} = \frac{BD}{CD}$ 。

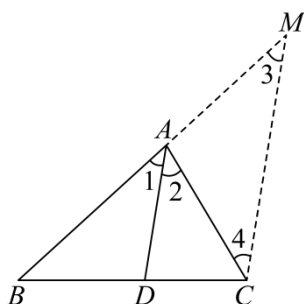
综合图②图③可得 $\triangle ABC$ 中，当 AD 平分 $\angle BAC$ 时， $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ 。

(2) 如图④， $\angle 1 = \angle 2$ ，作 $CM \parallel AD$ 交 BA 延长线于 M ，请你利用图④，填空

$\because AD \parallel CM$ ， $\therefore \angle 1 = \angle 3$ ， $\angle 2 = \angle 4$ ，又 $\because \angle 1 = \angle 2$

$\therefore \angle 3 = \angle 4$ ， $\therefore AC = \underline{\quad\quad}$ ， $\therefore AD \parallel CM$ ，

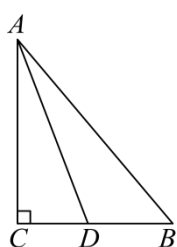
$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$ ， $\therefore \frac{BD}{DC} = \underline{\quad\quad}$ 。



图④

(3)应用如图⑤：

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ， $AC = 8$ ， $AB = 10$ ，则 $CD = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $BD = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

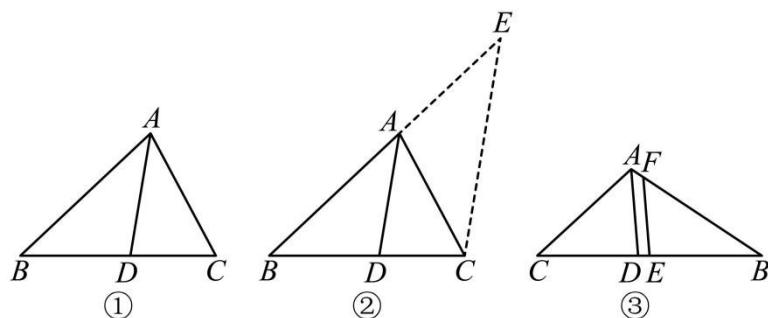


图⑤

4. 阅读与计算：请阅读以下材料，并完成相应的问题。角平分线分线段成比例定理：三角形内角平分线

定理：三角形任意两边之比等于它们夹角的平分线分对边之比。如图①，在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ ，

则 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ 。下面是这个定理的部分证明过程。



证明：如图②，过点 C 作 $CE \parallel DA$ ，交 BA 的延长线于点 E 。

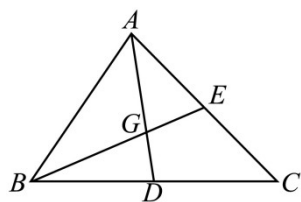
$\therefore \angle BAD = \angle E$ ， $\angle CAD = \angle ACE$ ，……

(1)请按照上面的证明思路，写出该证明过程的剩余部分；

(2)如图①，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是角平分线， $AB = 5\text{cm}$ ， $AC = 4\text{cm}$ ， $BC = 7\text{cm}$ 。求 BD 的长。

(3)如图③， $\triangle ABC$ 中， E 是 BC 中点， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线， $EF \parallel AD$ 交 AB 于 F ，若 $AB = 11$ ， $AC = 9$ ，直接写出线段 FB 的长。

5. 小明同学在学习相似三角形时遇到这样一个问题：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 BC 的中点，点 E 是 AC 中点．连结 AD ， BE 交于点 G ，求 $\frac{AG}{DG}$ 的值．



(1) 小明发现，过点 D 作 $DH \parallel BE$ 交 AC 于 H ，根据平行线分线段成比例即可得到问题的答案．下面是小明的部分证明过程：

解：如图1，过点 D 作 $DH \parallel BE$ 交 AC 于 H ，

$\because D$ 是 BC 的中点，

$\therefore BD = CD$ ，

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{CH}{EH} = 1,$$

请你补全余下的证明过程．

【尝试应用】

- (2) 如图2，在 $\square ABCD$ 中， E 、 F 分别是 AB 、 CD 的中点，连接 AC 分别交 DE 、 BF 于 M 、 N ，求证： $AM = MN = NC$ ．

【拓展提高】

- (3) 如图3，点 D 、 E 分别是 BC 、 AC 边的中点， AD 、 BE 交于 F ， $AD = 6$ ， $BE = 9$ ， $AD \perp BE$ ，求四边形 $CDFE$ 的面积．

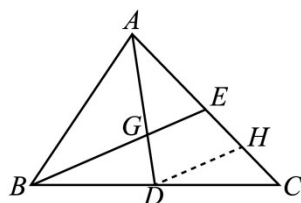


图1

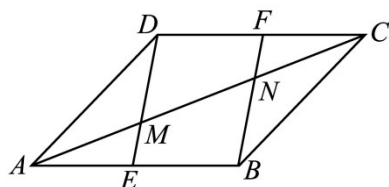


图2

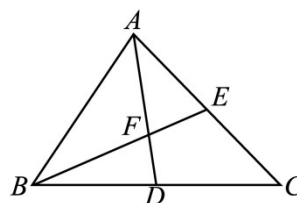


图3

题型三：构造多重平行

6. 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形， D 是直线 AB 上的一点．

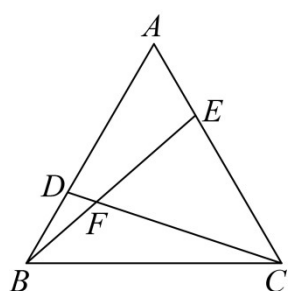


图1

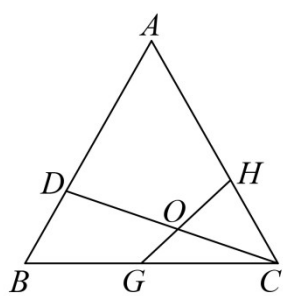


图2

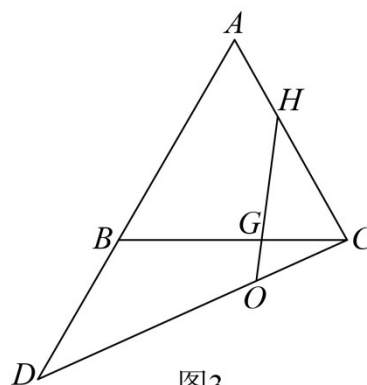


图3

(1) 问题背景：如图1，点D，E分别在边AB，AC上，且 $BD = AE$ ，CD与BE交于点F，求证：

$$\angle EFC = 60^\circ ;$$

(2) 点G，H分别在边BC，AC上，GH与CD交于点O，且 $\angle HOC = 60^\circ$.

① 尝试运用：如图2，点D在边AB上，且 $\frac{OH}{OG} = \frac{4}{3}$ ，求 $\frac{AB}{BD}$ 的值；

② 类比拓展：如图3，点D在AB的延长线上，且 $\frac{OH}{OG} = \frac{25}{6}$ ，直接写出 $\frac{AB}{BD}$ 的值 .

7. 综合与探究

【问题呈现】

(1) 如图1，当 $AE = CE$ ， $\frac{AD}{BD} = \frac{1}{2}$ 时，求证： $BC = CF$.

【拓展延伸】

(2) 如图2，当 $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$ ， $\frac{BC}{CF} = 3$ 时，求 $\frac{AE}{CE}$ 的值 .

【深入探究】

(3) 如图3，在 $\triangle ABC$ 中，直线MN分别与AB，AC，BC的延长线交于点D，E，F， $\frac{AD}{BD} = \frac{1}{m}$ ，

$\frac{CF}{BC} = \frac{1}{n}$ ，直接写出 $\frac{AE}{CE}$ 的值（用含m，n的式子表示） .

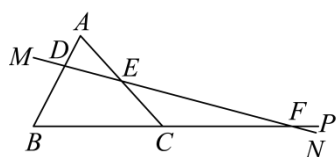


图1

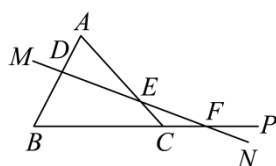


图2

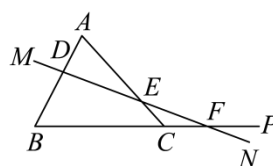


图3

题型四：截长补短+构造平行综合

8. 【问题背景】一次数学综合实践活动课上，小慧发现并证明了关于三角形角平分线的一个结论．已知

AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线．求证： $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ ．

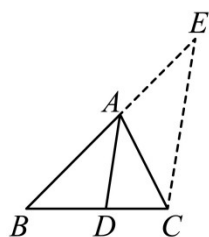


图1

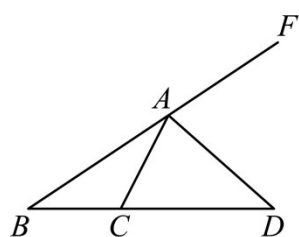


图2

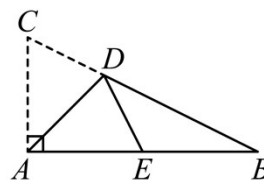


图3

(1) 【初步探究】小慧想到了构造角平分线的平行线来解决问题，所以她给出的证明思路是：如图¹，过点 C 作 $CE \parallel AD$ ，交 BA 的延长线于点 E ，……就可以运用所学知识予以证明．请你沿着小慧提供的思路写出下面的证明过程；

(2) 【类比研究】小慧类比上面的思路继续研究，如图²，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 一个外角的平分线， $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ 是否还成立？请说明理由；

(3) 【应用拓展】直接利用上面的结论解决问题：如图³，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， D 是 BC 边上一点，连接 AD ，将 $\triangle ACD$ 沿 AD 所在直线折叠，点 C 恰好落在边 AB 上的 E 点处．若 $AC = 1$ ， $AB = 2$ ，请直接写出 DE 的长．

9. 【问题初探】

在数学活动课上，张老师给出如下问题：“如图¹，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，求证：

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ”，有两名同学给出了不同的解答思路：

①如图²，小丽同学从结论出发给出如下解题思路：过点 C 作 AB 的平行线交 AD 的延长线于点 E ，运用等腰三角形和相似等知识解决问题．

②如图³，小强同学从“ AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线”给出了另一种解题思路：在 AC 上截取 $AF = AB$ ，连接 DF ，过点 C 作 DF 的平行线交 AD 的延长线于点 G ，也是利用相似等知识解决问题．

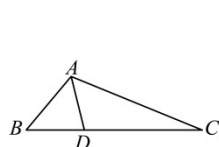


图1

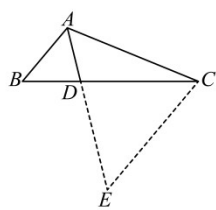


图2

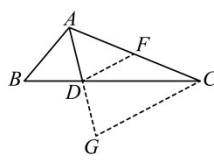


图3

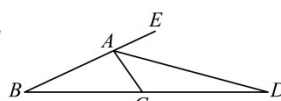


图4

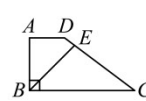


图5

(1) 请你选择一名同学的解答思路，写出证明过程。

【类比分析】

张老师发现之前两名同学都运用了转化思想，将两组线段比值问题转化为两三角形相似的对应边的比。为了帮助学生更好地领悟这种转化思想，张老师将问题进行了改编，提出下面问题，请你解答。

(2) 如图4，若 $\triangle ACB$ 的外角 $\angle CAE$ 平分线 AD 交 BC 的延长线于点 D ，求证： $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ 。

【学以致用】

(3) 如图5，在四边形 $ABCD$ 中， $AD = \frac{4}{3}$ ， $CB = 4$ ， $AB = 2$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ， BE 平分 $\angle ABC$ ，求 BE 的长。

题型五：梯形中构造平行

10. 如图1，梯形 $ABCD$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD = 2$ ， $AB = 3$ ， $CD = 3\sqrt{5}$ ，点 P 是 AD 延长线上一点， F 为 DC 的中点，连接 BP ，交线段 DF 于点 G 。

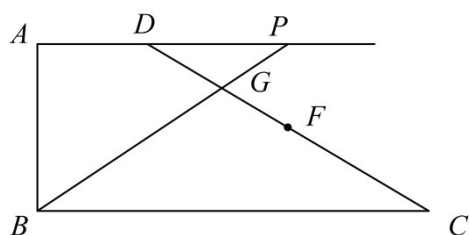


图1

(1) 当 $AB + DP = PB$ 时，求 DP 的长。

(2) 如图2，点 E 为 BP 中点，连接 EF 。

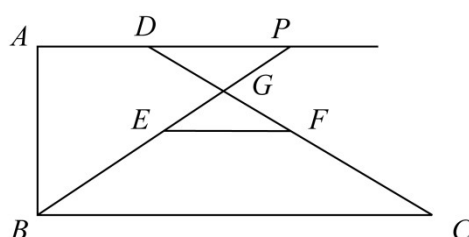
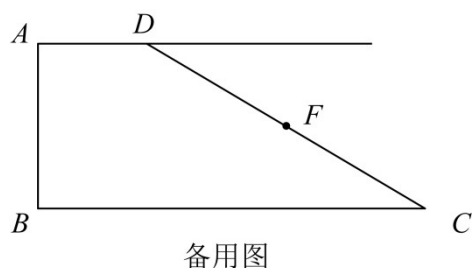


图2

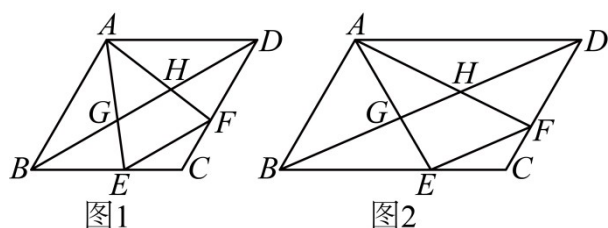
①若设 $DP = x$, $EF = y$, 求 y 与 x 的函数关系式并写出自变量 x 的取值范围 .

②连接 DE 和 PF , 若 $DE = PF$, 求 DP 长 .



题型六：三角形一边的平行线的综合应用

11. 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 、 F 两点分别在 BC 和 CD 边上, $EF \parallel BD$, 连接 AE 和 AF , 分别交 BD 于 G 、 H 两点 .



(1)如图 1, 若平行四边形 $ABCD$ 为菱形 .

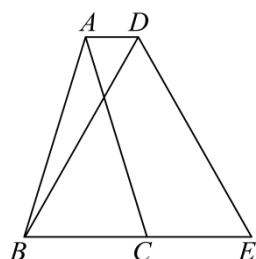
①求证 : $BG = DH$.

②若 $EF = BG$, $AB = 2$, 求 CF 的长 .

(2)如图 2, 分别记 $\triangle BEG$, $\triangle DFH$ 的面积为 S_1, S_2 , 求证 : $S_1 = S_2$.

12. (1) 数学张老师在数学活动课上出示了一道探究题 :

如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBE$ 中, $AB = AC$, $DB = DE$, B , C , E 三点在同一直线上, A , D 两点在 BE 同侧, 若 $AD \parallel BE$, 求证 : $CE = 2AD$.



张老师分别从问题的条件和结论出发分析这道探究题 :

①如图 1, 从条件出发 : 过 A 作 $AM \perp BE$ 交 BE 于 M , 过 D 作 $DN \perp BE$ 交 BE 于 N , 依据等腰三角形的性

质“三线合一”分析 BM 与 BN 之间的关系，可证得结论；

②如图 2，从结论出发：过 D 作 $DP \parallel AC$ 交 BE 于 P ，依据三角形全等的判定，证明 $PE = AD$ ，可证得结论；

请你运用其中一种方法，解决上述问题．

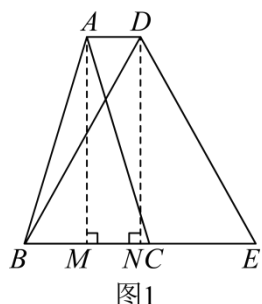


图1

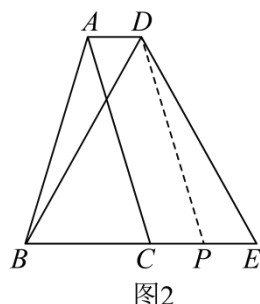


图2

(2) 小明同学经过对探究题及张老师分析方法的思考，提出以下问题：

如图 3，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，在 $\triangle DBE$ 中， $DB = DE$ ， B, C, E 三点在同一直线上， A, D 两点在 BE 同侧，且 A, D, E 三点在同一直线上，若 $AD = 3\sqrt{2}$ ， $\angle AEB = 45^\circ$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 7，求 BE 的长．

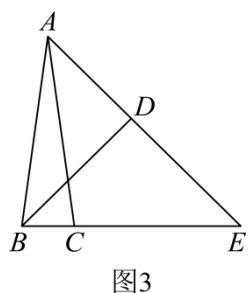


图3

(3) 在小明同学的问题得到解决后，张老师针对之前的解题思路提出了下面问题：

如图 4，在四边形 $ABCD$ 中， $BC \parallel AD$ ， $\angle B = 2\angle D$ ，点 E 为 CD 中点，连接 AE ，若 $AE \perp AB$ ，

$AD = 2AE = 2\sqrt{5}$ ， $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}$ ，求 CD 的长．

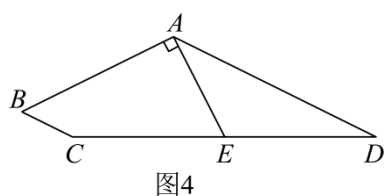


图4

13. 综合与实践

【问题提出】数学课上，老师给出了这样一道题：如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 是对角线 AC 上一动点，过点 D 作 DE 的垂线，过点 C 作 AC 的垂线，两垂线相交于点 F ，作射线 FE ，分别交边 AB ， CD 于点 G ， H ．试探究线段 EG 与 FH 的数量关系．

小明在解决这道题时，借助“从特殊到一般”的方法进行了探究，过程如下．

【观察猜想】

小明先对点 E 在特殊位置时的图形进行了探究．

(1) 如图¹，若 E 是对角线 AC 的中点，则线段 EG 与 FH 的数量关系为_____．

【推理验证】

(2) 小明认为当点 E 是对角线 AC 上任意一点时，(1) 中的结论仍然成立，请你就图²的情形判断他的说法是否正确，并说明理由．

【拓展应用】

(3) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 3，以点 E 为线段 AC 的三等分点时，请直接写出线段 GF 的长．

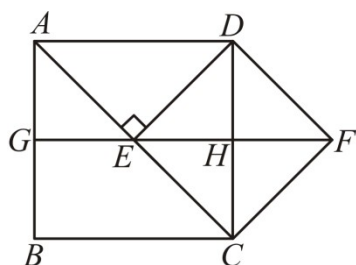


图1

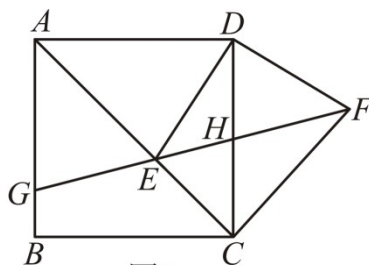
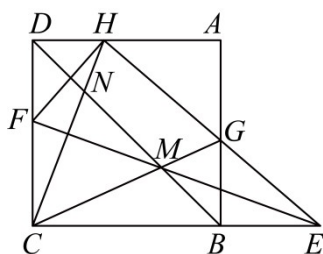


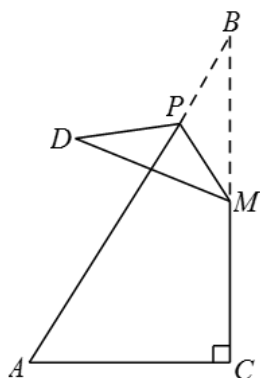
图2

题型七：填空压轴题（新定义+动态几何）

14. 如图，已知正方形纸片 $ABCD$ ， E 为 CB 延长线上一点， F 为边 CD 上一点，将纸片沿 EF 翻折，点 C 恰好落在 AD 边上的点 H ，连接 BD ， CH ， CG ． CH 交 BD 于点 N ， EF 、 CG 、 BD 恰好交于一点 M ．若 $DH = 2$ ， $BG = 3$ ，则线段 MN 的长度为_____．



15. 折纸游戏：小明剪出一个直角三角形的纸片 ABC ，其中， $\angle A = 60^\circ$ ， $AC = 1$ ，找出 BC 的中点 M ，在 AB 上找任意一点 P ，以 MP 为对称轴折叠 $\triangle MPB$ ，得到 $\triangle MPD$ ，点 B 的对应点为点 D ，小明发现，当点 P 的位置不同时， DP 与 $\triangle ABC$ 的三边位置关系也不同，请帮小明解决问题：当 $DP \perp BC$ 时， AP 的长为_____．



16. 阅读：对于线段 MN 与点 O (点 O 与 MN 不在同一直线上)，如果同一平面内点 P 满足：射线 OP 与线段 MN 交于点 Q ，且 $\frac{OQ}{OP} = \frac{1}{2}$ ，那么称点 P 为点 O 关于线段 MN 的“准射点”。问题：如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 3, AD = 4$ ，点 E 在边 AD 上，且 $AE = 1$ ，连接 BE 。设点 F 是点 A 关于线段 BE 的“准射点”，且点 F 在矩形 $ABCD$ 的内部或边上，如果点 C 与点 F 之间距离为 d ，那么 d 的取值范围为_____。

