

## 第12章 因式分解 单元测试卷·提升卷

(考试时间：100分钟 试卷满分：150分)

一、选择题：(本大题共10题，每题4分，共40分.下列各题四个选项中，有且只有一个选项是正确的.)

1. 下列由左边到右边的变形，属于因式分解的是 ( )

A.  $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$       B.  $x^2 + xy = x^2 \left(1 + \frac{y}{x}\right)$

C.  $2\pi R - 2\pi r = 2\pi(R-r)$       D.  $x^2 - 4x + 3 = x(x-4) + 3$

2. 单项式  $8x^m y^{n-1}$  与  $12x^{5m} y^n$  的公因式是 ( )

A.  $x^m y^n$       B.  $x^m y^{n-1}$       C.  $4x^m y^n$       D.  $4x^m y^{n-1}$

3. 已知  $M = 5a^2 - 2b^2 + 4a - 4$ ， $N = 6a^2 - b^2 + 2b + 1$ ，则  $M$  和  $N$  的大小关系是 ( )

A.  $M > N$       B.  $M \leq N$       C.  $M < N$       D.  $M > N$

4. 已知多项式  $x + 81b^4$  可以分解为  $(4a^2 + 9b^2)(2a + 3b)(3b - 2a)$ ，则  $x$  的值是 ( )

A.  $16a^4$       B.  $-16a^4$       C.  $4a^2$       D.  $-4a^2$

5. 乐乐是一名密码翻译爱好者，在他的密码手册中有这样一条信息： $a-b$ ， $x-1$ ， $x+1$ ， $a+b$ ， $x^2-1$ ，

$a^2-b^2$  分别对应下列六个字：城、爱、我、新、丽、美，现将  $a^2(x^2-1) - b^2(x^2-1)$  因式分解，结果呈现的

密码信息可能是 ( )

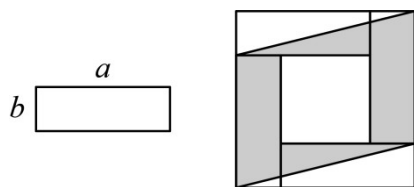
A. 美丽      B. 美丽新城      C. 我爱新城      D. 新城美

6. 对于任何整数  $k$ ，多项式  $(2k+3)^2 - 4k^2$  的值都能 ( )

A. 被2整除      B. 被3整除      C. 被4整除      D. 被5整除

7. 有 4 张长为  $a$ ，宽为  $b(a > b)$  的长方形纸片，按如图的方式拼成一个正方形，图中阴影部分的面积为  $S_1$ ，

空白部分的面积为  $S_2$ 。若  $S_1 = S_2$ ，则  $a, b$  满足 ( )



- A.  $a = 2b$       B.  $a = 3b$       C.  $a = 2.5b$       D.  $2a = 3b$

8. 若  $x^2 + ax + 18$  能分解成两个因式的积，则整数  $a$  的取值可能有 ( )

- A. 4 个      B. 6 个      C. 8 个      D. 无数个

9. 已知  $a = m + 2024$ ， $b = m + 2025$ ， $c = m + 2026$ ，则代数式  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$  的值为 ( )

- A. 5      B. 6      C. 3      D. 8

10. 已知三个实数  $a, b, c$  满足  $a - b + c = 0$ ， $ac - b + 1 = 0$ ，则下列结论一定正确的是 ( )

- A. 若  $a = 1$ ，则  $b^2 - 4c = 0$       B. 若  $b + c = 0$ ，则  $c < -1$   
C. 若  $c = 1$ ，则  $b^2 - 4a < 0$       D. 若  $a + b = 0$ ，则  $c > 2b$

二、填空题（本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。）

11. 因式分解： $-x^2 - 2xy - y^2 =$  \_\_\_\_\_； $x^2 + 2xy - 15y^2 =$  \_\_\_\_\_；

$2a(b-c)^3 - 6a^2(c-b)^2 =$  \_\_\_\_\_； $x^2 - ax - bx + ab =$  \_\_\_\_\_

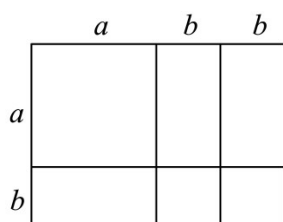
12. 因式分解： $x^4 - 5x^2 - 36 =$  \_\_\_\_\_；

13. 因式分解： $6x^2 - 5xy + y^2 + 17x - 7y + 12 =$  \_\_\_\_\_.

14. 如果  $x-2$  是  $ax^2-bx+2$  的一个因式，则  $2a-b$  的值为\_\_\_\_\_.

15. 通过计算几何图形的面积，可表示一些代数恒等式，如图所示，我们可以得到恒等式：

$$a^2 + 3ab + 2b^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$



16. 已知  $x-y=3$ ， $x^2+y^2=13$ ，则  $x^3y-8x^2y^2+xy^3$  的值为

17. 已知  $2x^2+10x+1=0$ ，那么多项式  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$  的值为\_\_\_\_\_.

18. 已知： $1+x+x(x+1)+x(x+1)^2=(1+x)\cdot[1+x+x(1+x)]=(1+x)\cdot[(1+x)\cdot(1+x)]=(1+x)^3$ ，因式分解

$1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots+x(x+1)^{2022}$ ，结果为\_\_\_\_\_.

三、解答题：（本大题共 10 题，共 78 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

19. 因式分解：

(1)  $a+b-ab-1$ ；

(2)  $(x^2-2x)^2-5(x^2-2x)-6$  .

20. 因式分解： $-2mnx^2+m^2x^2+n^2x^2-4(m-n)^2$ ；

21. 分解因式： $24xy^2z^2(x+y-z)-16xyz(z-x-y)^2+8xy^2(z-x-y)$  .

22. 正数  $a$ ， $b$ ， $c$  满足  $ab+2a+2b=bc+2b+2c=ac+2a+2c=12$ ，求  $(a+2)(b+2)(c+2)$  的值 .

23. 为治理污水，甲、乙两区都需要各自铺设一段污水排放管道，甲、乙两区八月份都各铺了  $x$  米，九月

份和十月份中，甲区的工作量平均每月增长率为  $a$ ，乙区则平均每月减少率为  $a$ 。

(1)求十月份甲、乙两区各铺设了多少米的排污管？(分别用含字母  $a$ 、 $x$  的代数式表示)；

(2)如果  $x = 300$ ，且  $a = 5\%$ ，那么十月份甲区比乙区多铺多少米排污管？

24. 读下列因式分解的过程，再回答所提出的问题：

$$1 + x + x(1 + x) + x(1 + x)^2$$

$$= (1 + x)[1 + x + x(1 + x)]$$

$$= (1 + x)^2(1 + x)$$

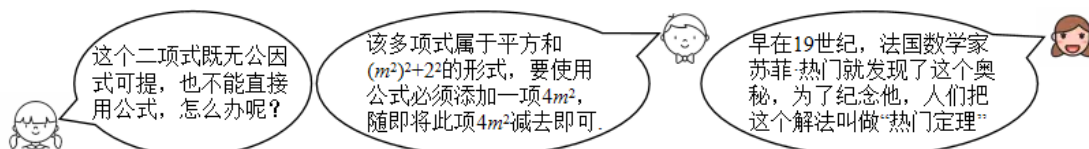
$$= (1 + x)^3$$

(1)上述分解因式的方法是\_\_\_\_\_，共应用了\_\_\_\_\_次。

(2)若分解  $1 + x + x(1 + x) + x(1 + x)^2 + \cdots + x(1 + x)^{2024}$ ，则需应用上述方法\_\_\_\_\_次，结果是\_\_\_\_\_。

(3)分解因式(写出过程)： $1 + x + x(1 + x) + x(1 + x)^2 + \cdots + x(1 + x)^n$

25. 小明、小花和老师一起探究一个问题：将  $m^4 + 4$  因式分解。



小花根据大家的提示，整理出解答过程：

$$m^2 + 4$$

$$= (m^2)^2 + 2^2$$

$$= (m^2)^2 + 4m^2 + 2^2 - 4m^2$$

$$= (m^2 + 2)^2 - (2m)^2$$

$$= (m^2 + 2 + 2m)(m^2 + 2 - 2m)$$

请你依照上述做法，将下列各式因式分解：

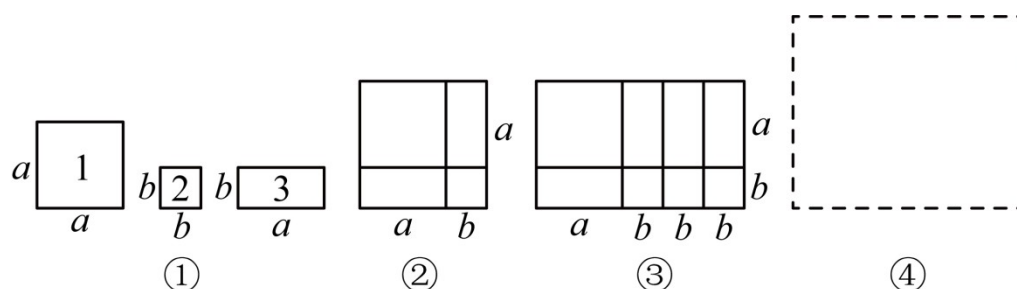
(1)  $4x^4 + 1$  ;

(2)  $a^4 + c^4 - 7a^2c^2$

26. 小刚同学动手剪了如图①所示的正方形与长方形纸片若干张。他用 1 张 1 号、1 张 2 号和 2 张 3 号卡片

拼出一个新的图形（如图②）。根据图②的面积关系可得等式： $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ，即使用拼图将

$a^2 + 2ab + b^2$  分解因式。



(1) 如果要拼成一个长为  $(a + 2b)$ ，宽为  $(a + b)$  的大长方形，则需要 2 号卡片\_\_\_\_\_张，3 号卡片\_\_\_\_\_张；

(2) 当他拼成如图③所示的长方形，根据图③的拼图可以把多项式  $a^2 + 4ab + 3b^2$  分解因式，其结果是\_\_\_\_\_；

(3) 动手操作，请依照小刚的方法，在④的方框中画出面积为  $a^2 + 5ab + 6b^2$  的长方形拼图，并利用拼图分解因式  $a^2 + 5ab + 6b^2$ 。

27. 仔细阅读下面例题，解答问题：

例题：已知二次三项式  $x^2 - 4x + m$  有一个因式是  $x + 3$ ，求另一个因式以及  $m$  的值。

解：设另一个因式为  $(x + n)$ ，得  $x^2 - 4x + m = (x + 3)(x + n)$

$$\text{则 } x^2 - 4x + m = x^2 + (n + 3)x + 3n$$

$$\therefore \begin{cases} n + 3 = -4 \\ m = 3n \end{cases}$$

解得： $n = -7, m = -21$ 。

$\therefore$  另一个因式为  $(x - 7)$ ， $m$  的值为  $-21$ 。问题：仿照以上方法解答下面问题：

(1) 已知二次三项式  $x^2 - 3x + k$  有一个因式是  $(x + 2)$ ，求另一个因式以及  $k$  的值。

(2) 已知二次三项式  $2x^2 + 3x - k$  有一个因式是  $(2x - 5)$ ，则另一个因式为\_\_， $k$  的值为\_\_。

(3) 已知二次三项式  $3x^2 + 4ax + 1$  有一个因式是  $(x + a)$ ， $a$  是正整数，则另一个因式为\_\_， $a$  的值为\_\_。

28. 阅读下列材料，然后解答问题：

问题：分解因式： $x^3 - 5x^2 + 4$

解答：对于任意一元多项式  $f(x)$ ，其奇次项系数之和为  $m$ ，偶次项系数之和为  $n$ ，若  $m = n$ ，则  $f(-1) = 0$ ，

若  $m = -n$ ，则  $f(1) = 0$ 。在  $x^3 - 5x^2 + 4$  中，因为  $m = 5$ ， $n = -5$ ，所以把  $x = 1$  代入多项式  $x^3 - 5x^2 + 4$ ，

得其值为 0，由此确定多项式  $x^3 - 5x^2 + 4$  中有因式  $(x - 1)$ ，于是可设  $x^3 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x^2 + px + q)$ ，分别

求出  $p$ 、 $q$  的值，再代入  $x^3 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x^2 + px + q)$ ，就容易分解多项式  $x^3 - 5x^2 + 4$ ，这种分解因式的

方法叫做“试根法”。

(1) 上述式子中  $p = \underline{\hspace{2cm}}$  ,  $q = \underline{\hspace{2cm}}$  ;

(2) 对于一元多项式  $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$  , 必定有  $f(\underline{\hspace{2cm}}) = 0$  ;

(3) 请你用“试根法”分解因式 :  $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$  .

29 . 结合图形我们可以通过两种不同的方法计算面积 , 从而可以得到一个数学等式 .

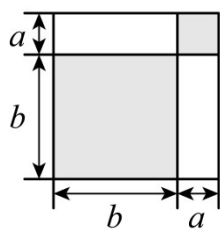


图1

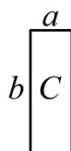
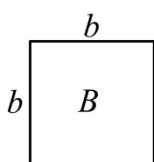


图2

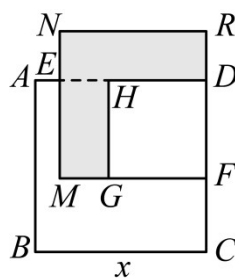


图3

(1)如图 1，用两种不同的方法计算阴影部分的面积，可以得到的数学等式是\_\_\_\_\_；

(2)我们可以利用 ( 1 ) 中的关系进行求值，例如，若  $x$  满足  $(2-x)(x-5)=1$ ，可设  $2-x=a$ ， $x-5=b$ ，则

$$ab=1, \quad a+b=-3. \quad \text{则} \quad a^2+b^2= \underline{\hspace{2cm}}.$$

(3)若  $x$  满足  $(x-10)(5-x)=3$ ，则  $(x-10)^2+(5-x)^2$  的值为\_\_\_\_\_；

(4)小玲想利用图 2 中  $x$  张  $A$  纸片， $y$  张  $B$  纸片， $z$  张  $C$  纸片拼出一个面积为  $(3a+b)(a+b)$  的大长方形，则

$$x+y+z= \underline{\hspace{2cm}};$$

(5)如图 3，已知正方形  $ABCD$  的边长为  $x$ ， $E, F$  分别是  $AD, DC$  上的点，且  $AE=1$ ， $CF=3$ ，长方形

$EMFD$  的面积是 24，分别以  $MF$ 、 $DF$  为边作正方形，求阴影部分的面积。