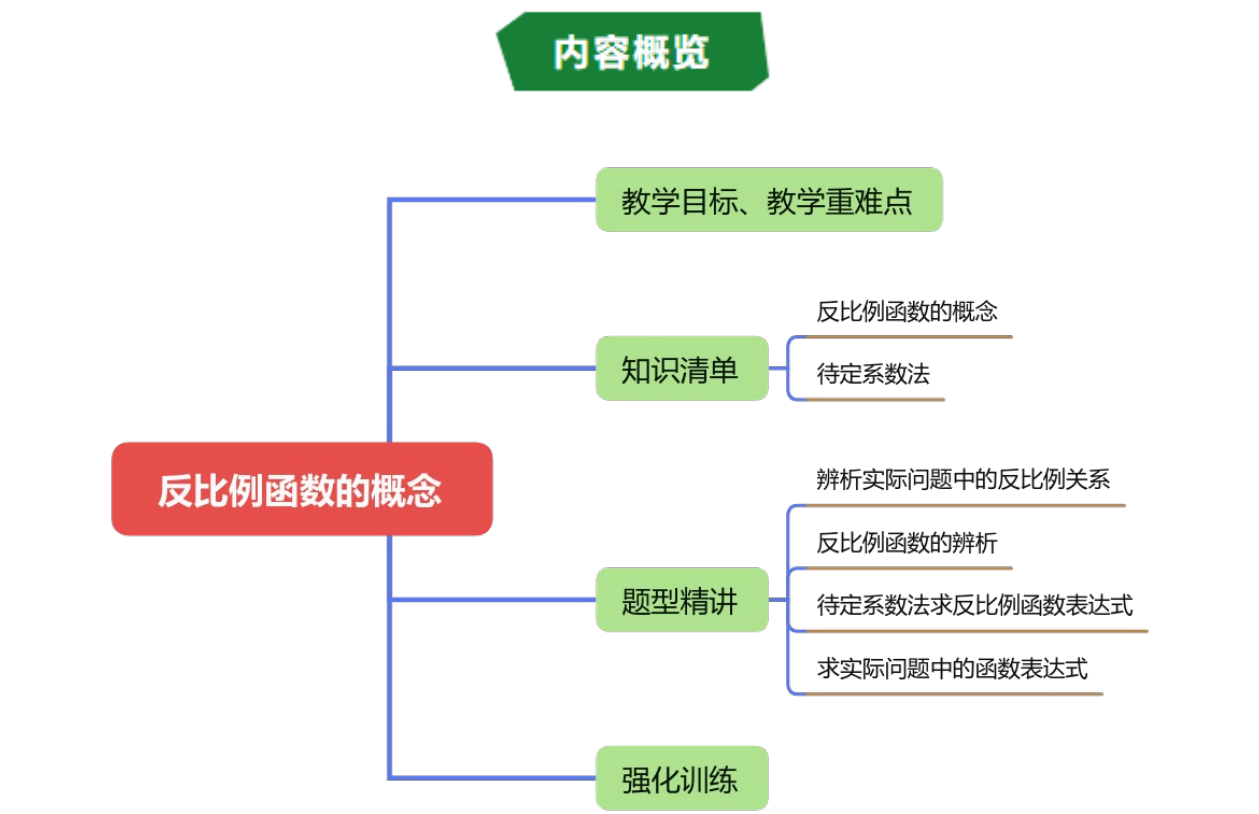


专题 26.1 反比例函数的概念



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 理解反比例函数的概念，能判断给定的函数是否为反比例函数； 2.能根据实际问题中的数量关系，写出反比例函数表达式； 3.比较正反比例函数，培养类比、归纳的思维能力.
教学重难点	1.重点 理解反比例函数的概念； 2.难点 理解 x 与 y 成反比例等价于 $xy=k$ (定值)

知识清单

知识点 01 反比例函数的概念

1.反比例关系

如果变量 y 与变量 x 的乘积是一个不等于 0 的常数，那么就说变量 y 与变量 x 成反比，用数学式子表示为

$xy=k$ 或 $y=\frac{k}{x}$, 其中 k 是一个不等于 0 的常数.

【即学即练】

例 1 下列表述中的变量 y 与变量 x 是否成反比例？

(1) 在一块平地上，划出一个占地面积为 100 m^2 的矩形区域，这个矩形区域相邻两边的长分别为 $x \text{ m}$ 、 $y \text{ m}$ ；

(2) 圆的面积随着半径的变化而变化，圆的面积 y (单位： m^2) 与该圆的半径 x (单位： m)；

(3) 在路程一定的情况下，汽车行驶的时间随着速度的变化而变化，汽车的用时 y (h) 与汽车的速度 x (km/h)；

(4) 圆锥的体积 V 一定，它的底面积 y 和高 x .

解：(1) 因为 $xy=100$ ，所以这个矩形区域相邻两边的长成反比例；

(2) 因为 $y=\pi x^2$ ，所以 xy 不是个常数，所以圆的面积 y 与半径不成反比例；

(3) 设路程为 s ，则 $s=xy$ ，这里 y 与 x 的乘积是个常数，所以在路程一定的情况下，汽车的用时 y (h) 与汽车的速度 x (km/h) 成反比例；

(4) 因为 $V=\frac{1}{3}x \cdot y$ ，所以 y 和 x 成反比例.

2.反比例函数的概念

形如 $y=\frac{k}{x}$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的函数叫作反比例函数，其中非零常数 k 称为比例系数，自变量 x 的取值范围是不等于 0 的一切实数.

反比例函数的本质是指 y 与 x 的乘积是个不为 0 的常数.

【即学即练】

例 2 下列函数中，哪些是反比例函数？

(1) $y=-\frac{1}{3}x$ ； (2) $y=-\frac{1}{5x}$ ； (3) $y=\frac{2a}{x}$ (a 为常数， $a \neq 0$)；

解析：要判定一个函数是不是反比例函数，关键是看它的表达式是否符合 $xy=k$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的形式.

解：(1) $y=\frac{1}{3}x$ 不是反比例函数，不符合 $xy=k$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的形式。

(2) $y=-\frac{1}{5x}$ 是反比例函数.因为它符合符合 $xy=k$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的形式，其中 $k=-\frac{1}{5}$ 。

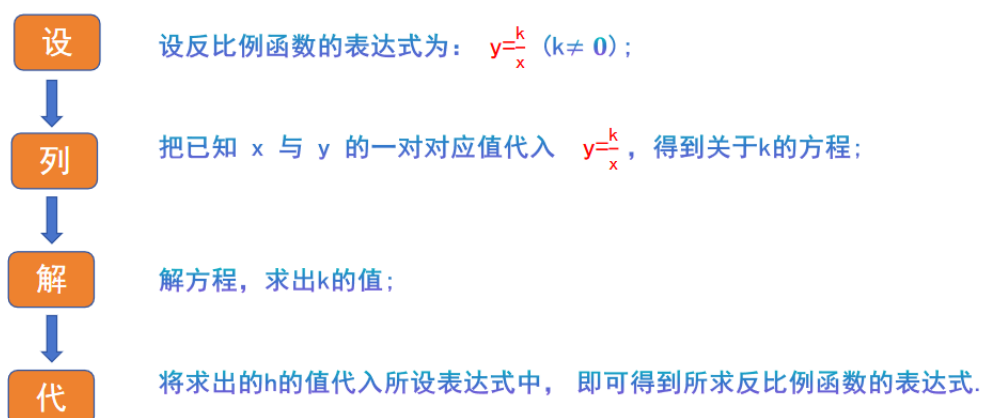
(3) $y=\frac{2a}{x}$ 是反比例函数.因为它符合符合 $xy=k$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的形式，其中 $k=2a$ 。

知识点 02 待定系数法

1.反比例函数表达式的确定——待定系数法

确定了比例系数 k ,就可以给出反比例函数的表达式： $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)。

求正比例函数表达式的方法是**待定系数法**.表达式中 k 是待定系数，利用已知条件列出关于 k 的方程再求解，可确定 k 的值。



说明：

①正比例函数的表达式是由比例系数“ k ”决定的，意思是“ k ”相同表达式就相同，反之“ k ”不同表达式就不同。

②反比例函数的表达式与自变量与函数选用什么字母没有关系。

譬如“ $y=\frac{3}{x}$ ”与“ $m=\frac{3}{n}$ ”是体现同一种函数关系的表达式；“ $y=\frac{3}{x}$ ”与“ $y=\frac{4}{x}$ ”虽然变量字母相同，但比例系数不同，

它们就是表达不同的函数关系。

【即学即练】

例 3 已知 y 是 x 的反比例函数，且当 $x=4$ 时， $y=7$ 。

(1)写出 y 关于 x 的函数表达式；

(2)当 $x=5$ 时，求 y 的值.

解：(1) 因为 y 是 x 的反比例函数，可设其表达式为 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$).

把 $x=4$ ， $y=7$ 代入，

得： $7=\frac{k}{4}$ ，解得 $k=28$.

所以该函数的表达式为 $y=\frac{28}{x}$.

(2) 当 $x=5$ 时， $y=\frac{28}{5}$.

2.复合函数表达式的确定

例4. 已知 $y=y_1-y_2$ ，且 y_1 与 x 成正比例， y_2 与 x 成反比例，当 $x=1$ 时， $y=-2$ ；当 $x=4$ 时， $y=7$ ，求 y 与 x 的函数表达式.

解：设 $y_1=k_1x$ ($k_1 \neq 0$)， $y_2=\frac{k_2}{x}$ ($k_2 \neq 0$)

则 $y=k_1x-\frac{k_2}{x}$

把 $x=1, y=-2; x=4, y=7$ 分别代入，得
$$\begin{cases} k_1 - k_2 = -2 \\ 4k_1 - \frac{k_2}{4} = 7 \end{cases}$$

解之得 $k_1=2$ ， $k_2=4$

所以， y 与 x 的函数表达式为 $y=2x-\frac{4}{x}$.

题型精讲

题型 01 反比例关系的辨析

【典例1】下列问题中，两个变量成反比例的是 ()

- A. 商一定时 (不为零)，被除数与除数
- B. 等边三角形的面积与它的边长
- C. 货物的总价 A 不变，货物的单价 a 与货物的数量 x

D. 长方形的长 a 不变时，长方形的周长 C 与它的宽 b

【变式 1】 下列各选项中的两个量成反比例关系的是 ()

A. 速度一定，路程与时间

B. 圆柱的体积一定，底面积与高

C. 小明的体重与他的年龄

D. 圆的周长与半径

【变式 2】 分别写出下列函数的表达式，并判断它们是不是反比例函数（不用写出自变量的取值范围）。

(1) 当圆柱的体积是 50cm^3 时，它的高 h （单位：cm）关于底面圆的面积 S （单位： cm^2 ）的函数。

(2) 玲玲用 200 元购买营养品送给妈妈，她所能购买的营养品的质量 y （单位：kg）关于营养品的售价 x （单位：元/kg）的函数。

【变式 3】 用函数表达式表示下列问题中两个变量之间的关系，并指出其中哪些是反比例函数。

(1) 某中学八年级（2）班学生为校运动会制作彩旗 80 面，完成天数 y （天）随该班学生平均每天制作的数量 x （面）的变化而变化；

(2) 已知菱形的面积为 24cm^2 ，一条对角线长 $a(\text{cm})$ 随另一条对角线长 $b(\text{cm})$ 的变化而变化；

(3) 小明家距学校 4000m，若他骑车上学的平均速度是 $250\text{m}/\text{min}$ ，则上学途中他与学校的距离 $y(\text{m})$ 随他骑车的时间 $x(\text{min})$ 的变化而变化。

【变式 4】 在面积为定值的一组矩形中，当矩形的一边长为 7.5cm 时，它的另一边长为 8cm 。

(1) 设矩形相邻的两边长分别为 $x(\text{cm})$, $y(\text{cm})$ ，求 y 关于 x 的函数表达式。这个函数是反比例函数吗？如果是，指出比例系数。

(2) 若其中一个矩形的一条边长为 5cm ，求这个矩形与之相邻的另一边长。

题型 02 反比例函数的辨析

【典例 1】 下列函数表达式中， y 是 x 的反比例函数吗？如果是，把它写成 $y = \frac{k}{x}$ 的形式，并指出 k 的值。

(1) $xy - 2 = 0$ ；

(2) $4xy + 3 = 0$;

(3) $x = -\frac{2}{3y}$.

【变式1】 下列函数中， y 是 x 的反比例函数的是 ()

A . $y = \frac{1}{x^2}$ B . $xy = 2026$ C . $y = \frac{3}{x-1}$ D . $y - \frac{1}{x} = 2$

【变式2】 若 $y = -2x^m$ 是反比例函数，则 m 的值为 ()

A . 2 B . 1 C . 0 D . -1

【变式3】 若函数 $y = (m + \sqrt{3})(m - \sqrt{2})x^{m^2-3}$ 是反比例函数，则 m 的值为 ()

A . $\sqrt{2}$ B . $-\sqrt{2}$ C . $\pm\sqrt{3}$ D . $\sqrt{3}$

【变式4】 下列 y 关于 x 的函数中，哪些一定是反比例函数？把一定是反比例函数的关系式改写成 $y = \frac{k}{x}$ 的形式，并指出 k 的值 .

① $y = \frac{m}{x}$; ② $y = -\frac{2}{3x}$; ③ $y = \frac{m^2}{x} + \frac{1}{x}$; ④ $y = \frac{1}{x+1}$.

题型 03 待定系数法求反比例函数的表达式

【典例1】 已知函数 $y = y_1 - y_2$ ，其中 y_1 与 x 成正比例， y_2 与 $x-2$ 成反比例，且当 $x=1$ 时， $y=3$ ；当 $x=3$ 时， $y=5$. 求 y 关于 x 的函数解析式 .

【变式1】 已知 y 是 x 的反比例函数，当 $x=3$ 时， $y=2$ ，则 y 与 x 的函数表达式为_____ .

【变式2】 某小型开关厂准备投入一定的经费用于现有生产设备的改造以提高经济效益 . 通过测算，开关的年产量 y 万只与投入改造经费 x 万元之间满足： $(3-y)$ 与 $(x+1)$ 成反比例，且当投入改造经费 1 万元时，年产量是 2 万只 . 求年产量 y 与投入改造经费 x 之间的函数表达式 .

【变式3】 已知 $y = y_1 + y_2$ ， y_1 与 $\sqrt{x-1}$ 成正比例， y_2 与 $x+2$ 成反比例，当 $x=1$ 、 $x=5$ 时， y 的值都为

1, 求 y 和 x 之间的函数解析式以及当 $x=2$ 时 y 的值.

【变式4】 已知 $y = y_1 + y_2$, 并且 y_1 与 $(x-2)$ 成正比例, y_2 与 x 成反比例, 当 $x = -1$ 时, $y = 3$; 当 $x = 4$ 时, $y = \frac{7}{4}$.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式:

(2) 求 $x = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ 时的函数值.

题型 04 求实际问题中的函数表达式

【典例1】 我市到杭州的高速公路大约长180km, 一辆轿车从我市出发开往杭州, 轿车到达杭州的时间 $t(h)$ 和行驶的平均速度 $v(km/h)$ 之间有怎样的关系? v 是 t 的反比例函数吗?

【变式1】 某运输公司计划运输一批货物, 每天运输的吨数与运输天数之间的关系如下表:

每天运输的吨数	500	250	100	50	...
运输的天数	1	2	5	m	...

(1) 这批货物共有多少吨?

(2) 用 x 表示运输天数, 用 y 表示每天运输的吨数, 用式子表示它们的关系.

(3) x 与 y 成反比例关系吗? 如果成, 请求出表格中 m 的值.

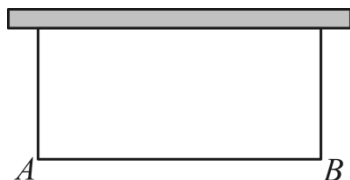
【变式2】 设面积为 $10cm^2$ 的三角形的一条边长为 $a(cm)$, 这条边上的高线长为 $h(cm)$.

(1) 求 h 关于 a 的函数表达式和自变量 a 的取值范围.

(2) h 关于 a 的函数是不是反比例函数? 如果是, 说出它的比例系数.

(3) 求当边长 $a = 2.5cm$ 时, 这条边上的高线长.

【变式3】 如图所示的是一面墙（可利用的最大长度为100m），现打算沿墙围一个面积为 120m^2 的矩形花圃。设花圃的长 AB 为 $x\text{m}$ ，宽为 $y\text{m}$ ，则 y 关于 x 的函数表达式是_____，自变量的取值范围是_____。



【变式4】 一辆汽车前灯电路上的电压保持不变，通过灯泡的电流越大，灯就越亮。设选用灯泡的电阻为 $R(\Omega)$ ，通过的电流强度为 $I(\text{A})$ 。

- (1) 若电阻为 30Ω ，通过的电流强度为 0.40A ，求 I 关于 R 的函数表达式，并说明比例系数的实际意义。
- (2) 如果电阻大于 30Ω ，那么与原来的相比，汽车前灯的亮度将发生什么变化？

强化训练

1. 下面说法中错误的是（ ）

- A. 平行四边形的面积一定，底和高成反比例
- B. 铺地面积一定，方砖的边长与所需的块数成反比例
- C. 一个圆的面积和它的半径不成比例
- D. 正方形的周长和它的边长成正比例

2. 下列函数中，是反比例函数的是（ ）

- A. $y = 3x$
- B. $y = \frac{3}{x}$
- C. $y = 3x^2$
- D. $y = x + \frac{3}{x}$

3. 为了给学生们创建更好的学习和生活环境，某学校利用假期时间进行了装修改造，以下相关情境中， y 是 x 的反比例函数的是（ ）

- A. 在校园的绿化带内重新栽种绿植，一个工人每小时栽种 6 平方米，栽种时间为 x 小时，栽种的总面积为 y 平方米
- B. 用长为 80 米的栅栏围一个矩形劳动实践基地，矩形长 x 米，宽 y 米
- C. 修建一个圆形花坛，花坛半径为 x 米，面积为 y 平方米

D. 对教学楼 2000 平方米的外墙重新粉刷，每天粉刷 x 平方米，需要粉刷 y 天

4. 下列各式中， y 是 x 的反比例函数的是 ()

A. $y = \frac{5x}{2}$ B. $y = \frac{5}{x}$ C. $y = x^{-2}$ D. $y = 2x + 5$

5. 反比例函数 $y = -\frac{3}{2x}$ 中的常数 k 为 ()

A. -3 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

6. 已知反比例函数的解析式为 $y = \frac{|a|-2}{x}$ ，则 a 的取值范围是 ()

A. $a \neq 2$ B. $a \neq -2$ C. $a \neq \pm 2$ D. a 为任意实数

7. 已知 y 与 x 成反比例， z 与 y 成正比，如果当 $x=1$ 时， $z=2$ ，那么当 $x=3$ 时， $z = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 当三角形的面积为 9cm^2 时，它的底边长 $a(\text{cm})$ 与底边上的高 $h(\text{cm})$ 之间的函数表达式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 已知 y 与 $2x-3$ 成反比例，且当 $x=2$ 时， $y=4$ ，求 y 关于 x 的函数解析式 .

10. 已知 $y = y_1 + y_2$ ，其中 y_1 与 x 成反比例， y_2 与 $2x+1$ 成正比例，且当 $x=1$ 时， $y=9$ ；当 $x=-3$ 时， $y=-11$ ，求 y 关于 x 的函数解析式 .

11. 用解析式表示下列函数 .

(1) 三角形的面积是 12cm^2 ，它的一边 a (单位：cm) 是这边上的高 h (单位：cm) 的函数；

(2) 圆锥的体积是 50cm^3 ，它的高 h (单位：cm) 是底面面积 S (单位： cm^2) 的函数 .

12. 用一批纸装订同样大小的练习本，每本的页数和可以装订的本数如下表：

每本的页数	16	20	25	30	60
可以装订的本数	225	180			60

(1)将表格补充完整 .

(2)判断每本的页数和可以装订的本数是否成反比例，并说明理由 .

(3)如果现在需要用这批纸装订⁸⁰本同样大小的练习本，那么每本练习本有多少页？

13 . (1) 学校食堂用 1200 元购买大米，写出所购买的大米质量 $y(\text{kg})$ 与单价 x (元 /kg) 之间的函数表达式， y 是 x 的反比例函数吗？

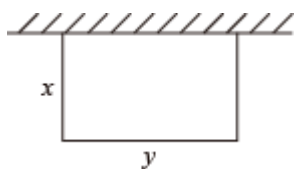
(2) 水池中蓄水 90m^3 ，现用放水管 $x(\text{m}^3/\text{h})$ 的速度排水，经过 $y(\text{h})$ 排空 . 写出 y 与 x 之间的函数表达式， y 是 x 的反比例函数吗？

14 . 水池内有污水 60m^3 ，设放净全池污水所需时间为 $y(\text{h})$ ，每小时放水量为 $x(\text{m}^3)$.

(1)试写出 y 与 x 之间的函数关系式；

(2)求当 $x=15$ 时， y 的值 .

15 . 如图，某养鸡场利用一面长为 11m 的墙，其他三面用栅栏围成矩形，面积为 60m^2 ，设与墙垂直的边长为 $x\text{m}$ ，与墙平行的边长为 $y\text{m}$.



(1)直接写出 y 与 x 的函数关系式为——；

(2)现有两种方案 $x=5$ 或 $x=6$ ，试选择合理的设计方案，并求此栅栏总长 .