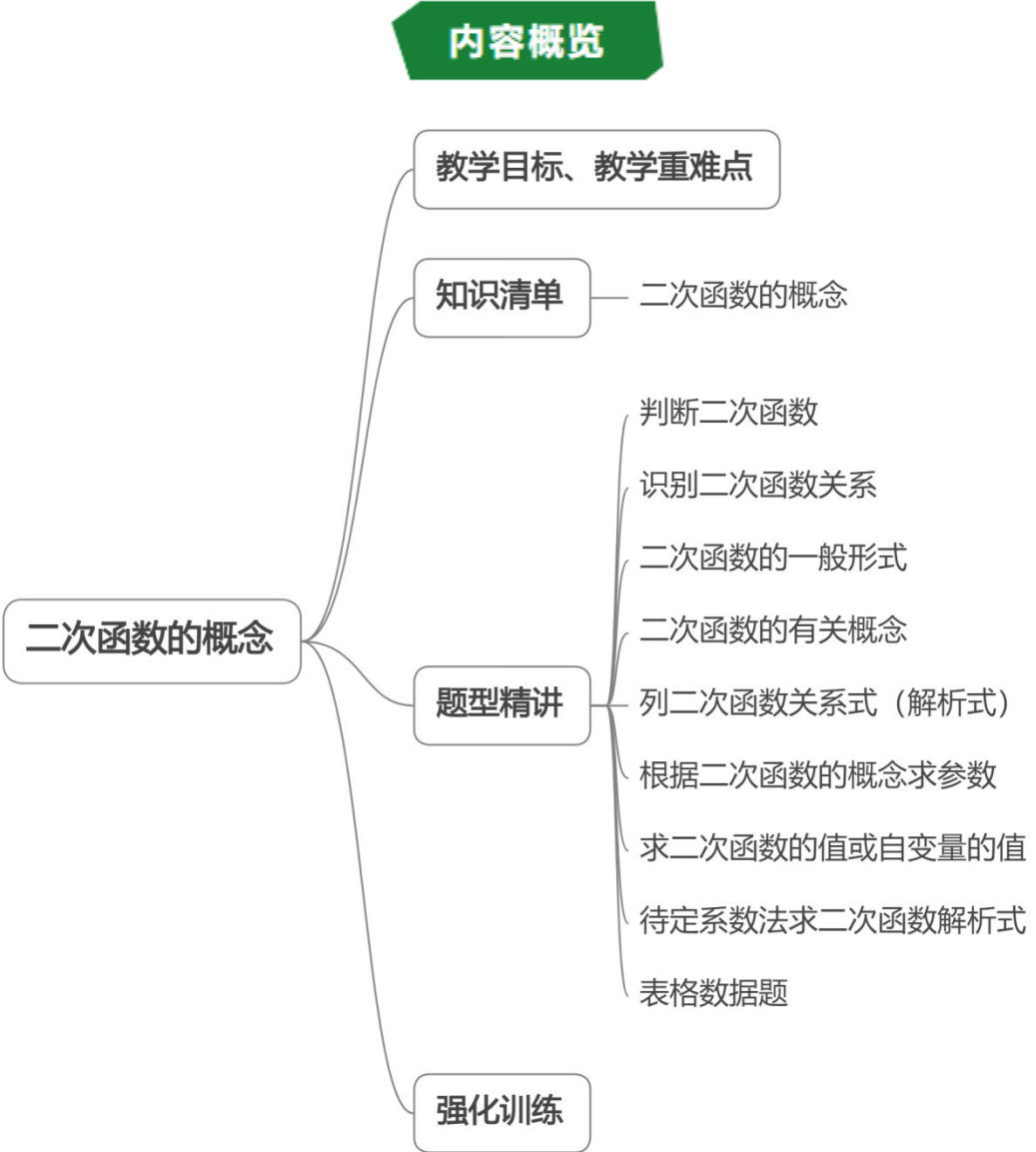


专题 26.1 二次函数的概念



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 了解二次函数的概念； 2. 知道二次函数的一般形式； 3. 学习待定系数法求二次函数解析式。
教学重难点	1.重点 (1) 二次函数的概念，一般形式； (2) 根据二次函数的概念求参数；

	(3) 求二次函数的解析式； 2. 难点 (1) 二次函数与一元二次方程的联系；二次函数的三种表示方法； (2) 表格数据题、新定义题等；
--	---

知识清单

知识点1 二次函数的概念

1. 二次函数的概念

一般地，形如 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 的函数是二次函数。

若 $b=0$ ，则 $y=ax^2+c$ ；若 $c=0$ ，则 $y=ax^2+bx$ ；若 $b=c=0$ ，则 $y=ax^2$ 。

以上三种形式都是二次函数的特殊形式，而 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 是二次函数的一般式。

二次函数由特殊到一般，可分为以下几种形式：

① $y=ax^2$ ($a \neq 0$)；② $y=ax^2+k$ ($a \neq 0$)；③ $y=a(x-h)^2$ ($a \neq 0$)；④ $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0$)，其中 $h=-\frac{b}{2a}$, $k=\frac{4ac-b^2}{4a}$ ；⑤ $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)。

要点：如果 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数， $a \neq 0$)，那么 y 叫做 x 的二次函数。这里，当 $a=0$ 时就不是二次函数了，但 b, c 可分别为零，也可以同时都为零。 a 的绝对值越大，抛物线的开口越小。

2. 二次函数解析式的表示方法

- 一般式： $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 为常数， $a \neq 0$)；
- 顶点式： $y=a(x-h)^2+k$ (a, h, k 为常数， $a \neq 0$)；
- 两根式： $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ ($a \neq 0$, x_1, x_2 是抛物线与 x 轴两交点的横坐标) (或称交点式)。

要点：任何二次函数的解析式都可以化成一般式或顶点式，但并非所有的二次函数都可以写成交点式，只有抛物线与 x 轴有交点，即 $b^2-4ac \geq 0$ 时，抛物线的解析式才可以用交点式表示。二次函数解析式的这三种形式可以互化。

【即学即练】

1. 下列函数是二次函数的是 ()

- A. $y=3x$ B. $y=ax^2+bx+c$ C. $y=\frac{1}{x^2}$ D. $y=3(x-1)^2$

2. 下列函数关系中，可以看作是二次函数模型的是 ()

- A. 两直角边的和为12的直角三角形，面积 y 与斜边 x 的关系

B. 周长为12的长方形，长 y 与宽 x 的关系

C. 面积为12的长方形，周长 y 与长 x 的关系

D. 面积为12的长方形，长 y 与宽 x 的关系

3. 二次函数 $y=(x-2)(5-2x)$ 的一次项系数是_____.

4. 二次函数 $y=2x^2+x-6$ 的常数项为_____.

5. 已知二次函数 $y=(m-1)x^{m^2-4m+5}+(m-3)x+4$ ，则 m 的值为()

A. 1 或 3

B. 3

C. 1

D. 以上都不对

6. 若函数 $y=(k-3)x^{|k|-1}+2x-1$ 是二次函数.

(1)求 k 的值；

(2)当 $x=1$ 时，求 y 的值.

题型精讲

题型 01 判断二次函数

【典例 1】. 下列函数中， y 与 x 之间的关系是二次函数的是()

A. $y=1-3x^3$

B. $y=x^2-5x$

C. $y=x^4+2x^2-1$

D. $y=\frac{1}{x^2}$

【变式 1】. 在下列 y 关于 x 的函数中，一定是二次函数的是()

A. $y=ax^2+bx+c$

B. $y=-\sqrt{2}x^2$

C. $y=\frac{1}{x^2}$

D. $y=(k^2+1)x$

【变式 2】. 下列各式中， y 是 x 的二次函数的是()

A. $y=\frac{1}{x^2}$

B. $y=mx^2+1$

C. $y=(x-2)^2-x^2$

D. $y=x(x-1)$

题型 02 识别二次函数关系

【典例 1】. 正方形的面积 S 和边长 a 的函数关系是()

A. 正比例函数

B. 一次函数

C. 反比例函数

D. 二次函数

【变式 1】. 下列函数关系中，是二次函数的是().

- A . 生产 100 吨钢材，工作效率 x 和工作时间 y 之间的关系
- B . 当速度为 100km/h 时，汽车行驶的距离 s 与时间 t 之间的关系
- C . 长方形的周长一定时，长方形的长 y 与宽 x 之间的关系
- D . 圆的面积 s 与半径 r 之间的关系

【变式 2】 . 在下列 4 个不同的情境中，两个变量所满足的函数关系是二次函数关系的有 ()

- ① 设正方形的边长为 x ，面积为 y ，则 y 与 x 的函数关系；
- ② 在弹性范围内，弹簧测力计上弹簧的长度 y 与所挂物体质量 x 之间的函数关系；
- ③ 设正方体的棱长为 x ，表面积为 y ，则 y 与 x 的函数关系；
- ④ 若一辆汽车以 120km/h 的速度匀速行驶，那么汽车行驶的里程 $y(\text{km})$ 与行驶时间 $x(\text{h})$ 的函数关系 .

- A . 1 个 B . 2 个 C . 3 个 D . 4 个

题型 03 二次函数的一般形式

【典例 1】 . 二次函数 $y = (x-3)^2$ 的一般式为_____ .

【变式 1】 . 把二次函数 $y = -4(1+2x)(x-3)$ 化为一般形式为：_____ .

题型 04 二次函数的有关概念

【典例 1】 . 指出下列二次函数的二次项系数、一次项系数和常数项 .

函数解析式	二次项系数	一次项系数	常数项
(1) $y = -0.9x^2 + 2x - 3$			
(2) $y = -2x^2 - 7$			
(3) $y = -x^2 + x$			
(4) $y = (x+1)(x-1)+1$			

【变式 1】 . 下列式子哪些是二次函数？如果是，请指出其二次项系数、一次项系数和常数项 .

(1) $y = -x + 1$;

$$(2) y = -\frac{x^2}{2};$$

$$(3) y = \frac{2}{x^2} + x - 2;$$

$$(4) y = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 3;$$

$$(5) y = ax^2 + bx + c;$$

$$(6) y = m^2x^2 + 4x - 3 \text{ (} m \text{ 为常数)}.$$

【变式2】 . 把 $y = (3x-2)(x+3)$ 化成一般形式后，一次项系数与常数项的和为_____.

【变式3】 . 在二次函数 $y = 1 - 2x + 3x^2$ 中，二次项系数 $a =$ _____, 一次项系数 $b =$ _____, 常数项 $c =$ _____.

题型 05 列二次函数关系式 (解析式)

【典例1】 . 某工厂七月份生产零件 50 万个，设该厂第三季度平均每月的增长率为 x ，如果第三季度共生产零件 y 万个，那么 y 与 x 满足的函数关系式是 ()

A . $y = 50(1+x)^2$

B . $y = 50 + 50(1+x)$

C . $y = 50(1+x) + 50(1+x)^2$

D . $y = 50 + 50(1+x) + 50(1+x)^2$

【变式1】 . 两个正方形的周长之和是 24cm，其中一个正方形的边长为 x cm . 若以两个正方形面积之和 $y(\text{cm}^2)$ 为函数，其中一个正方形的边长 $x(\text{cm})$ 为自变量，它们的关系式是 ()

A . $y = x^2 + (24-x)^2$

B . $y = x^2 + (24-4x)^2$

C . $y = x^2 + (6-x)^2$

D . $y = x^2 + (6-4x)^2$

【变式2】 . 在 $\triangle ABC$ 中，已知边 BC 的长为 $x(x > 0)$ ， BC 边上的高比它的 2 倍多 1，则三角形的面积 y 与 x 之间的函数解析式为 ()

A . $y = \frac{1}{2}x(2x-1)$

B . $y = -\frac{1}{2}x(2x-1)$

C . $y = x^2 + \frac{1}{2}x$

D . $y = -x^2 - \frac{1}{2}x$

【变式3】 . 已知三角形的一边长为 x ，这条边上的高为 x 的 2 倍少 1，则三角形的面积 y 与 x 之间的关系为_____.

【变式4】 . 某函数满足当自变量 $x = 1$ 时，函数值 $y = 0$ ；当自变量 $x = 0$ 时，函数值 $y = 1$ ，写出一个满足

条件的函数表达式_____.

【变式 5】 . 某超市有一种商品，进价为 2 元，据市场调查，销售单价是 13 元时，平均每天的销售量是 50 件，而销售单价每降低 1 元，平均每天就可以多售出 10 件．若设降价后售价为 x 元，每天利润为 y 元，则 y 与 x 之间的函数关系为_____.

题型 06 根据二次函数的概念求参数

【典例 1】 . 关于 x 的函数 $y = ax^2$ 是二次函数，则 a 应满足的条件是 ()

- A . $a \neq 1$ B . $a = 1$ C . $a \neq 0$ D . $a = 0$

【变式 1】 . 函数 $y = (m-2)x^{m^2-m}$ 是二次函数，则 m 的值为_____.

【变式 2】 . 若 $y = (a+1)x^{|a+3|} - x + 3$ 是关于 x 的二次函数，则 a 的值是 ()

- A . 1 B . -5 C . -1 D . -5 或 -1

【变式 3】 . 已知 y 关于 x 的函数 $y = (m^2+2m)x^2 + mx + m + 1$.

(1) 当 m 为何值时，此函数是一次函数？

(2) 当 m 为何值时，此函数是二次函数？

【变式 4】 . 二次函数 $y = (x-1)mx + (x+1)nx + \frac{mn}{2}(m \neq -n)$ 的二次项系数与一次项系数的和为 $\frac{1}{2}$ ，差为 2，

则常数项为 ()

- A . $\frac{1}{8}$ B . $\frac{1}{2}$ C . $\frac{1}{16}$ D . $\frac{1}{4}$

题型 07 求二次函数的函数值或自变量的值

【典例 1】 . 当 $x =$ _____时，二次函数 $y = 2x^2 - 3x - 2$ 的值为零．

【变式 1】 . 已知二次函数 $y = ax^2$ ，如果当 $x = -1$ 时 $y = 2$ ，那么当 $x = 2$ 时， $y =$ _____．

【变式 2】 . 已知 $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ 那么 $f(2) =$ _____．

题型 08 待定系数法求二次函数解析式

【典例 1】 . 若 y 是 x 的函数，其图象过点 $(1, 4)$ 、 $(-2, -2)$ ，写出一个符合此条件的函数表达式：_____．

【变式 1】 . 若一个二次函数的二次项系数为 2，且经过点 $(1, 0)$ ，请写出一个符合上述条件的二次函数表

达式：_____。

【变式2】 . 已知二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象经过 $(-1, 0), (0, 5)$ 两点，求此二次函数的解析式。

【变式3】 . (1) 已知二次函数图象的顶点坐标为 $(-1, 1)$ ，且经过点 $(1, -3)$ ，求这个二次函数的表达式。

(2) 已知二次函数的图象经过点 $(0, 2)$ 、 $(1, 0)$ 和 $(-2, 3)$ ，求这个二次函数的表达式。

题型 09 表格数据题

【典例1】 . 已知 y 是关于 x 的二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ， x 与 y 的对应值如下表所示：

x 的值	-1	0	3	5
y 的值	0	3	0	m

(1) 求 y 关于 x 的二次函数表达式。

(2) 求出表中 m 的值。

【变式1】 . 已知在二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中，函数值 y 与自变量 x 的部分对应值如表：

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	8	3	0	-1	0	...

则满足方程 $ax^2 + bx = 5$ 的解是_____。

【变式2】 . 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ，其函数 y 与自变量 x 之间的部分对应值如表所示：

x	...	-1	2	3	...
y	...	0	0	4	...

则可求得 $\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($4a - 2b + c$) 的值是 ()

A . 8

B . -8

C . 4

D . -4

强化训练

一、单选题

1. 下列函数中是二次函数的有 ()

① $y = 3 - \sqrt{3}x^2$; ② $y = \frac{2}{x^2}$; ③ $y = x(3 - 5x)$; ④ $y = (1 + 2x)(1 - 2x) + 4x^2$; ⑤ $2x^2 - 3xy + 4 = 0$; ⑥ $x^2 = 0$

A . 1 个 B . 2 个 C . 3 个 D . 4 个

2 . 二次函数 $y = 3x^2 + 6x + 5$ 的常数项是 ()

A . -5 B . 3 C . 5 D . 6

3 . 二次函数解析式 $y = x^2 + 2x - 1$ 的二次项系数、一次项系数和常数项分别是 ()

A . 1 , 2 , 1 B . 1 , 2 , -1 C . 0 , 2 , -1 D . 0 , -2 , -1

4 . 若 $y = (m - 2)x^2 + 3x + n$ (x 为自变量) 是二次函数, 则 m 的取值范围是 ()

A . $m \neq 2$ B . $m > 2$ C . $m < 2$ D . $0 < m < 2$

5 . 对于关于 x 的函数 $y = (m + 1)x^{m^2 - m} + 3x$, 下列说法错误的是 ()

A . 当 $m = -1$ 时, 该函数为正比例函数 B . 当 $m^2 - m = 1$ 时, 该函数为一次函数

C . 当该函数为二次函数时, $m = 2$ 或 $m = -1$ D . 当该函数为二次函数时, $m = 2$

6 . 已知函数 $y = ax^2 + bx + c$, 其中 a, b, c 可在 $0, 1, 2, 3, 4$ 五个数中取值, 则不同的二次函数的个数共有 ()

A . 125 个 B . 100 个 C . 48 个 D . 10 个

二、填空题

7 . 二次函数 $y = 3x - \frac{1}{2}x^2$ 的二次项系数是____, 一次项系数是____.

8 . 二次函数 $y = 3x^2 - 2x + 5$ 中, 二次项系数是____, 一次项系数是____, 常数项是____.

9 . 已知函数 $y = (m - 1)x^{m^2 - 1} + 5x + 3$ 是关于 x 的二次函数, 则 m 的值是_____.

10 . 已知函数 $y = x^2 - 2x$, $x = a$ 时, 记函数值 y 为 $f(a)$, 则 $f(-10)$ _____ $f(-1)$ (填写“>”“<”或“=”).

11 . 若二次函数 $y = (k - 1)x^{k^2 - 3k + 4} + 2x - 1$, 则 $k =$ _____.

12 . 一正方形的边长为 xcm , 把此正方形的边长增加 $2cm$ 的正方形面积为 Scm^2 , 则 S 是 x 的二次函数, 其函数式为_____, 其中_____是二次项系数, 一次项系数为_____, 常数项为_____.

13 . 如果 $y = (k - 3)x^{k - 1} + x - 3$ 是二次函数, 佳佳求出 k 的值为 3, 敏敏求出 k 的值为 - 1, 她们俩中求得结

果正确的是_____。

14. 如果二次函数 $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ($a_1 \neq 0$, a_1, b_1, c_1 是常数) 与 $y = ax^2 + b_2x + c_2$ ($a_2 \neq 0, a_2, b_2, c_2$ 是常数)

满足 $a_1 + a_2 = 0, b_1 = b_2, c_1 + c_2 = 0$, 那么称这两个函数互为“旋转函数”。若函数 $y = -x^2 + \frac{4}{3}mx - 2$ 与

$y = x^2 - 2nx + n$ 互为旋转函数, 则 $(m+n)^{2023}$ 的值为_____。

三、解答题

15. 下列函数哪些是二次函数? 并写出它们的二次项、一次项、常数项。

① $3y = 3(x-1)^2 + 1$;

② $y = -0.5(x-1)(x+4)$;

③ $s = 3 - 2t^2$;

④ $y = 2x(x^2 + 3x - 1)$.

16. 已知函数 $y = (m-1)x^{m^2+2m-1} + 3x + 3$, 回答下列问题:

(1) m 取什么值时, 此函数是二次函数?

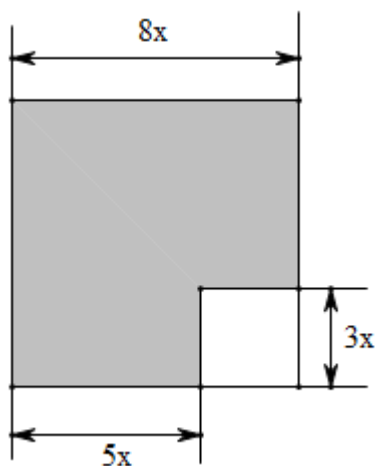
(2) m 取什么值时, 此函数是一次函数?

17. 圆的半径是1cm, 假设半径增加 x cm 时, 圆的面积增加 y cm² .

(1) 写出 y 与 x 之间的关系式;

(2) 当圆的半径分别增加1cm, $\sqrt{2}$ cm, 2cm 时, 圆的面积各增加多少?

18. 为美化居民小区, 需在一块正方形空地上铺设草皮, 图中的阴影部分即为铺草皮的区域(单位: 米)



(1) 计算阴影部分的面积(用含有 x 的字母表示) ;

(2) 若市场上草皮的单价为 40 元 / 米² , 当 $x = 1$ 时 , 求购买草皮需多少元 ?

19 . 定义 : 如果函数图象上存在横、纵坐标相等的点 , 则称该点为函数的不动点 . 例如 , 点 $(1,1)$ 是函数

$y = -2x + 3$ 的不动点 . 已知二次函数 $y = x^2 + 2(b+2)x + b^2$ (b 是实数) .

(1)若点 $(-1, -1)$ 是该二次函数的一个不动点 , 求 b 的值 ;

(2)若该二次函数始终存在不动点 , 求 b 的取值范围 .