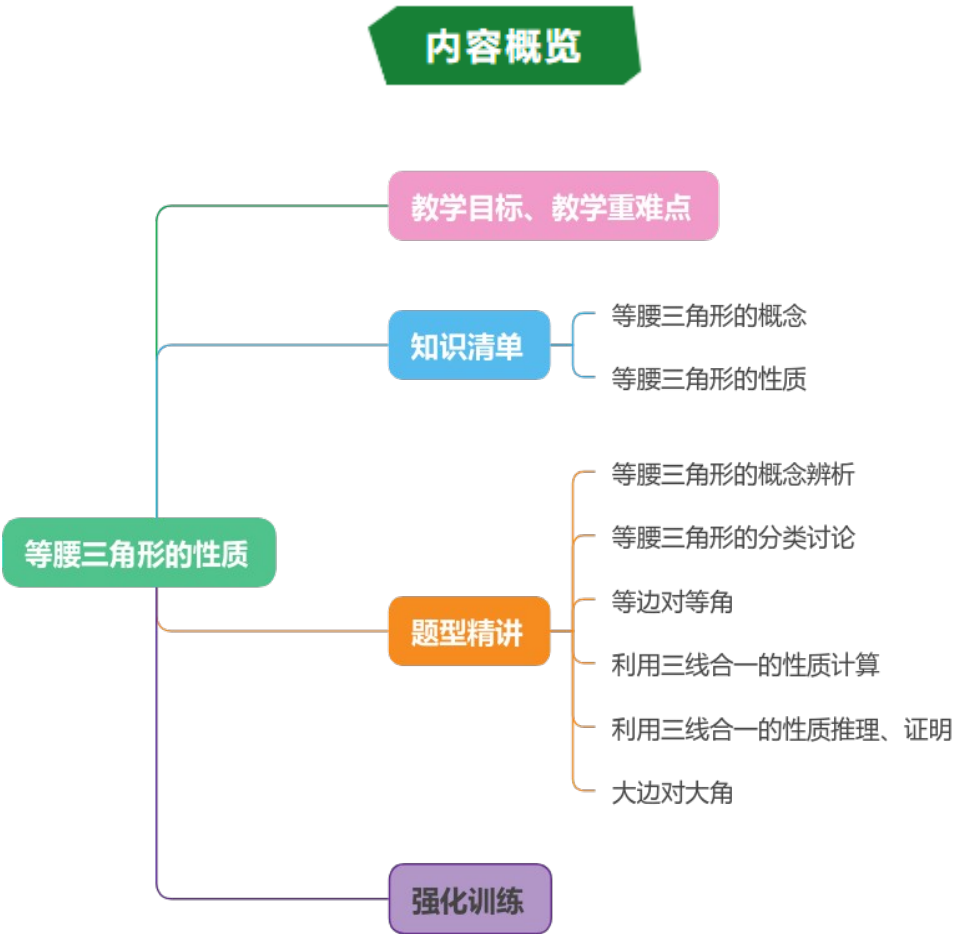


专题 18.1 等腰三角形的性质



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 理解等腰三角形的概念； 2. 掌握等腰三角形的两个基本性质： - 等边对等角（两底角相等）； - 三线合一（顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合）； 3.能运用等腰三角形的性质进行简单的推理和计算。
教学重难点	1.重点 等腰三角形的两个核心性质，运用这些性质进行角度计算、线段关系判断及简单证明；

	2.难点 “三线合一”性质的理解与灵活应用
--	------------------------------

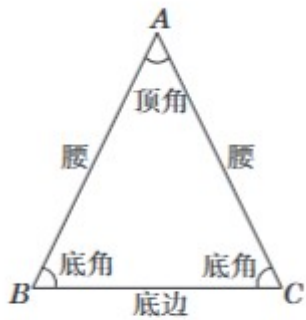
知识清单

知识点 01 等腰三角形的概念

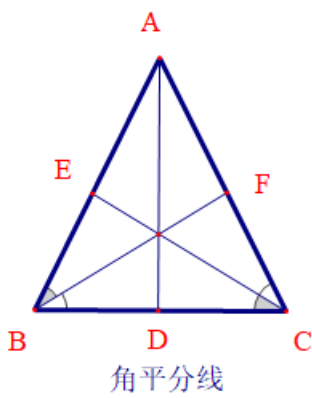
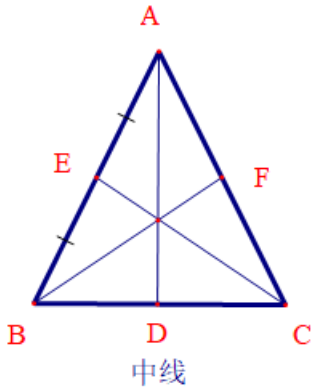
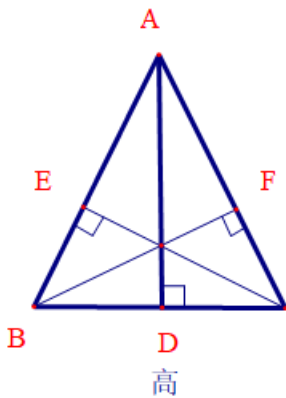
1. 定义

有两条边相等的三角形，叫做_____，其中相等的两条边叫做_____，另一边叫做_____，两腰所夹的角叫做_____，底边与腰的夹角叫做_____。

如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$,则它叫等腰三角形，其中 AB 、 AC 为_____， BC 为_____边， $\angle A$ 是_____， $\angle B$ 、 $\angle C$ 是_____。



2. 等腰三角形的高线、中线与角平分线



【即学即练】

例¹ 规定等腰三角形的底边长与其腰长的比值 k 称为这个等腰三角形的“优美比”. 若等腰三角形 ABC 的周长为 13cm , $AB = 3\text{cm}$, 则它的“优美比” k 为_____.

解：当 AB 为底边时，则腰为 $(13-3)\div 2 = 5\text{cm}$, 此时，优美比 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

当 AB 为腰时，则底边 $= 13 - 3 \times 2 = 7\text{cm}$, 又因为 $3+3 < 7$, 所以_____.

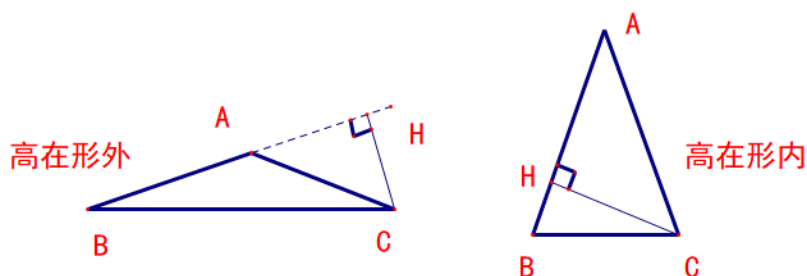
【点睛】等腰三角形属于一种特殊的三角形，三角形的题目常常需要分类讨论.

3. 分类讨论的三种情形：

①腰与底不明时需分类讨论.

②顶角或底角不明时需分类讨论.

③高位置不明时（在形内或形外）需分类讨论.

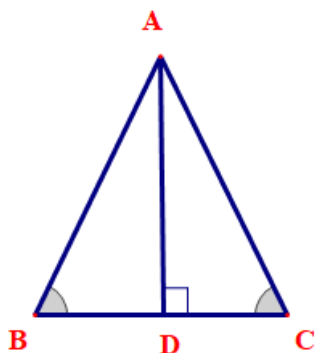


知识点 02 等腰三角形的性质

1. 性质定理 1：等腰三角形的两个底角_____ (简称“_____”).

几何语言： $\triangle ABC$ 中， $\because AB = AC$, $\therefore \angle B = \angle C$

2. 性质定理 2：等腰三角形的_____、_____、_____互相重合 (简称“_____”).



几何语言：△ABC 中，∵AB=AC，∠BAD=∠CAD，∴_____、_____。

3.等腰三角形是轴对称图形

等腰三角形的对称轴是_____，通常情况有_____条对称轴。

4.等腰三角形的性质的作用

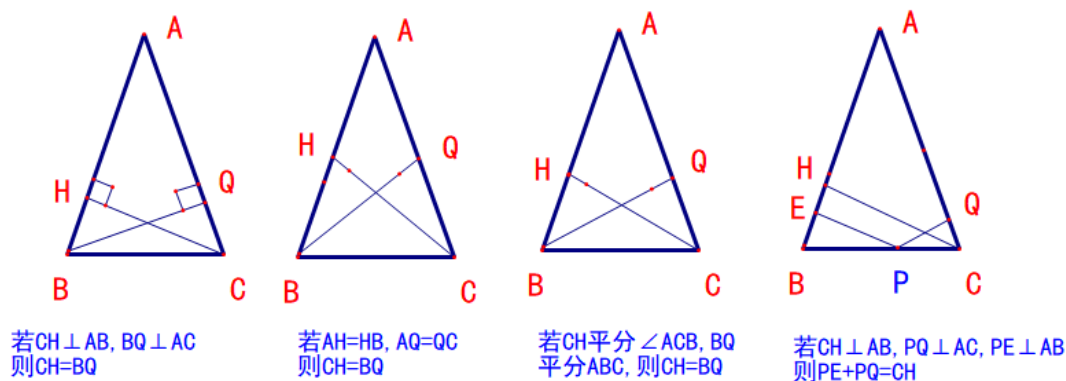
利用性质 1 可以通过线段相等来证明角相等.是除全等外证明角相等的又一个重要思路；

利用性质 2 用来证明线段相等，角相等，垂直关系等。

5.拓展：

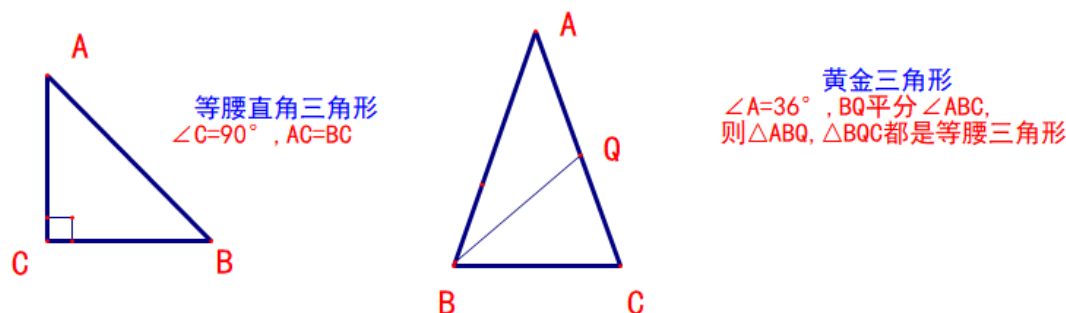
(1)等腰三角形两腰上的中线、高，两底角的平分线分别相等。

(2)等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高。



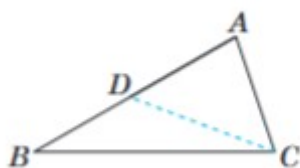
(3)当等腰三角形的顶角为 90°时（等腰直角三角形），它的两条直角边相等，两个锐角都是 45°。

(4)当等腰三角形的顶角为 36°时（黄金三角形），等腰三角形底角平分线把三角形分成两个等腰三角形。



(5) 大边对大角

△ABC 中，∵AB>AC，∴_____；∵AB<AC，∴_____；∵AB=AC，∴_____；



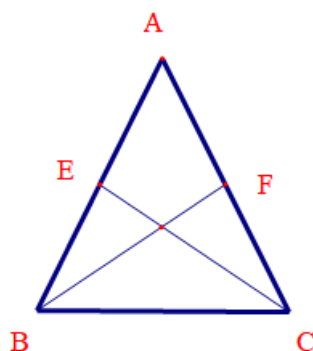
(6) 等腰三角形中角度的关系：顶角 $=180^\circ - \text{底角度数} \times 2$ ；底角度数 $= (180^\circ - \text{顶角度数}) \div 2$

【即学即练】

例1 求证：等腰三角形两腰上的中线相等.

已知：等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，E、F分别为两腰的中点

求证： $CE=BF$



证明： $\because AB=AC$

$\therefore$ _____ (_____)

又E、F分别为两腰的中点

$$\therefore BE = \frac{1}{2} AB, CF = \frac{1}{2} AC$$

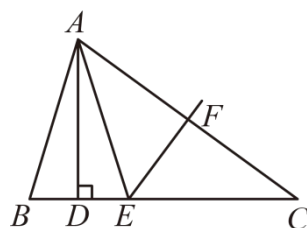
$$\therefore BE = CF$$

$\therefore BC$ 为公共边

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CBF$$

$$\therefore CE = BF \text{ (_____)}$$

例2 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ 于点D，EF垂直平分AC，交AC于点F，交BC于点E，连接AE，且 $AB = AE$ 。若 $\triangle ABC$ 的周长为19cm， $AC = 7\text{cm}$ ，求DC的长。



解：∵ $AB = AE$, $AD \perp BC$,

∴ $BD = \underline{\hspace{1cm}}$, ()

∵ EF 垂直平分 AC

∴ 在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle CEF$ 中 , $AF = CF$, $EF = EF$, $\angle AFE = \angle CFE$

∴ $\triangle AEF \cong \triangle CEF$

∴ $AE = EC$,

∴ $AB = AE = EC$,

∵ $\triangle ABC$ 的周长为 19cm , $AC = 7\text{cm}$,

∴ $AB + BC = AB + BD + DE + EC = 2EC + 2DE = 2DC = 19 - 7 = 12$,

解得 , $DC = 6\text{cm}$,

∴ DC 的长为 6cm .

【点睛】“等腰三角形三线合一”的**逆命题也是真命题**。

在 $\triangle ABC$ 中 ① $AB = AC$, ② $AD \perp BC$, ③ AD 平分 $\angle BAC$, ④ $BD = DC$, 已知 i 其中任意两个条件都能推出另外两个结论.

$\left. \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix} \right\} \Rightarrow ③, ④ ; \left. \begin{matrix} ① \\ ③ \end{matrix} \right\} \Rightarrow ②, ④ ; \left. \begin{matrix} ① \\ ④ \end{matrix} \right\} \Rightarrow ②, ③ ;$ (三线合一)

$\left. \begin{matrix} ② \\ ④ \end{matrix} \right\} \Rightarrow ①, ③ ; \left. \begin{matrix} ② \\ ③ \end{matrix} \right\} \Rightarrow ①, ④ ; \left. \begin{matrix} ③ \\ ④ \end{matrix} \right\} \Rightarrow ①, ② ;$ (全等)

题型精讲

题型 01 等腰三角形的概念辨析

【典例 1】 若一个等腰三角形的腰长为 4 , 底边长为 2 则第周长是 ()

A . 4 B . 6 C . 8 D . 10

【变式 1】等腰三角形的顶角是 70° ，则它的底角是_____。

【变式 2】在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle B = 40^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数是 ()

A . 40° B . 50° C . 80° D . 100°

【变式 3】等腰三角形的腰边长 8cm ，周长 20cm ，则它的底边长是_____。

【变式 4】下列各组线段中，能构成等腰三角形的是 ()

A . 1，2，3 B . 2，2，3 C . 2，2，4 D . 3，4，5

题型 02 等腰三角形中的分类讨论

【典例 1】若一个等腰三角形的一个外角为 105° ，则这个等腰三角形顶角的度数为 ()

A . 30° B . 30° 或 70° C . 30° 或 70° 或 75° D . 30° 或 75°

【变式 1】) 等腰三角形的一边长等于 4，一边长等于 9，则它的周长是 ()

A . 17 B . 22 C . 17 或 22 D . 13

【变式 2】等腰三角形的一个角是 100° ，它的另外两个角的度数是 ()

A . 55° 和 55° B . 50° 和 50° C . 40° 和 40° D . 100° 和 10°

【变式 3】等腰三角形腰长为 6，一腰上的中线将其周长分成两部分的差为 2，则这个等腰三角形的周长为_____。

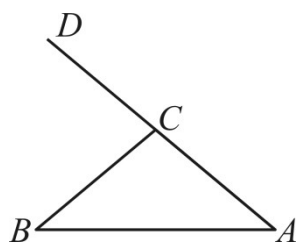
【变式 4】等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为 46° ，则此等腰三角形的顶角的度数为_____度。

题型 03 等边对等角

【典例 1】在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle B = 40^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数是 ()

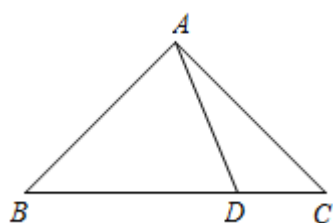
A . 40° B . 50° C . 80° D . 100°

【变式1】 如图，点 C 在 AD 上， $CA = CB$ ， $\angle A = 40^\circ$ ，则 $\angle BCD$ 等于 ()



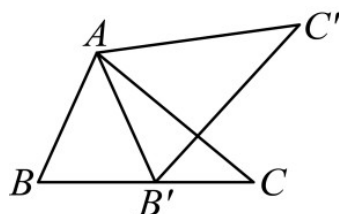
- A . 40° B . 70° C . 80° D . 110°

【变式2】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D 在 BC 上，且 $BD = BA$ ，则 $\angle CAD$ 的度数为 ()



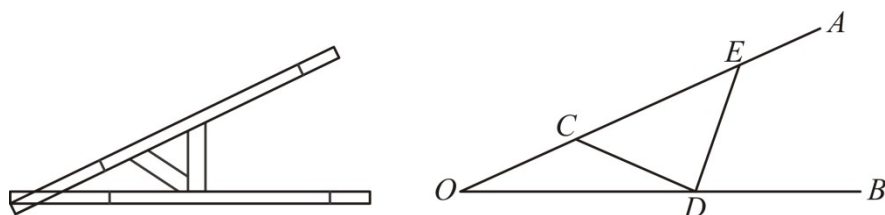
- A . 30° B . 25° C . 22.5° D . 21°

【变式3】 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle AB'C'$ ，点 B' 恰好在边 BC 上，若 $\angle AB'C' = 66^\circ$ ，则旋转角的度数为 ()



- A . 66° B . 58° C . 48° D . 33°

【变式4】 如图所示的三等分角仪由两根有槽的棒 OA ， OB 组成，两根棒在 O 点相连并可绕 O 转动、 C 点固定， $OC = CD = DE$ ，点 D ， E 可在槽中滑动．若 $\angle BDE = 81^\circ$ ，则 $\angle CDE$ 的度数是 ()



A . 70°

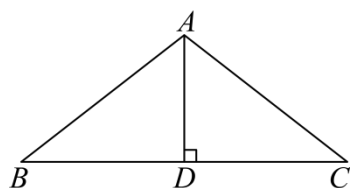
B . 72°

C . 74°

D . 76°

题型 04 利用三线合一计算

【典例 1】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ，若 $BC=8\text{cm}$ ，则 BD 的长为 ()



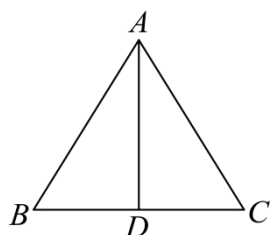
A . 2cm

B . 4cm

C . 6cm

D . 8cm

【变式 1】如图，已知 $AB=AC$ ， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，下列结论错误的是 ()



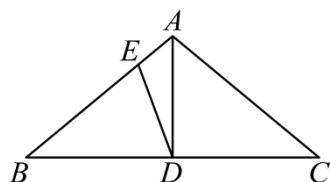
A . $BD=CD$

B . $\angle BAD=\angle CAD$

C . $AD \perp BC$

D . $AB=2AD$

【变式 2】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， AD 是边 BC 上的中线，点 E 在边 AB 上，且 $BE=BD$ ，若 $\angle BAC=100^\circ$ ，则 $\angle ADE$ 的大小为 ()



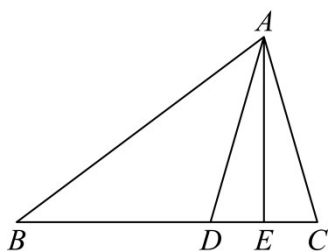
A . 15°

B . 20°

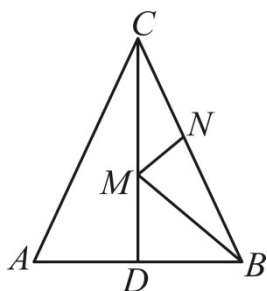
C . 25°

D . 30°

【变式 3】如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上， $BD=AD=AC$ ， E 为 CD 的中点。若 $\angle CAE=16^\circ$ ，则 $\angle B$ 的度数为_____。

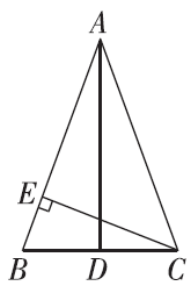


【变式4】如图，等腰 $\triangle ABC$ 中， $AC = BC = 13$ ， $AB = 10$ ，线段 CD 是 $\triangle ABC$ 的中线， $CD = 12$ ，点 M, N 分别是线段 CD, BC 上的动点，连接 BM, MN ，则 $BM + MN$ 的最小值为_____。

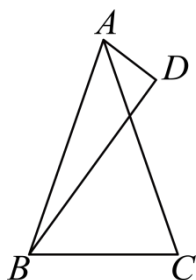


题型 05 利用三线合一推理、证明

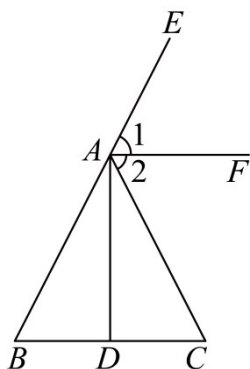
【典例1】如图， $AB = AC$ ， AD 是 BC 边上的中线， $CE \perp AB$ 于点 E 。求证： $\angle CAD = \angle BCE$ 。



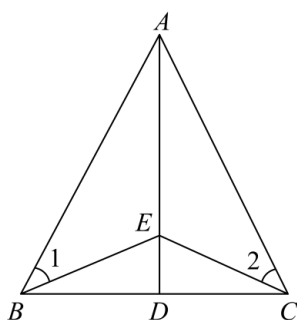
【变式1】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 为 $\triangle ABC$ 外一点， $\angle D = 90^\circ$ ， $\angle DAB = \angle C$ 。求证： $BC = 2AD$ 。



【变式2】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 为 BC 边的中点， $AF \perp AD$ ，垂足为 A ，求证： $\angle 1 = \angle 2$ 。



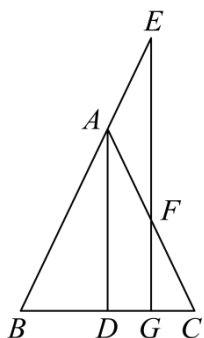
【变式3】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 是 BC 的中点，点 E 在 AD 上，



(1)求证： $\angle 1 = \angle 2$ ；

(2)若 $\angle BAC = 40^\circ$ ， $\angle 1 = 35^\circ$ ，求证： CE 平分 $\angle ACB$ 。

【变式4】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 为 BC 中点，点 E 是 BA 延长线上一点，点 F 是 AC 上一点，连接 EF 并延长交 BC 于点 G ，且 $AE = AF$ 。

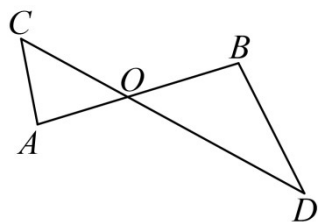


(1) 若 $\angle ABC = 50^\circ$ ，求 $\angle AEF$ 的度数；

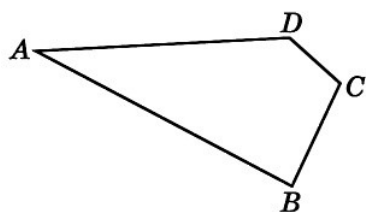
(2) 求证： $AD \parallel EG$.

题型 06 大边对大角

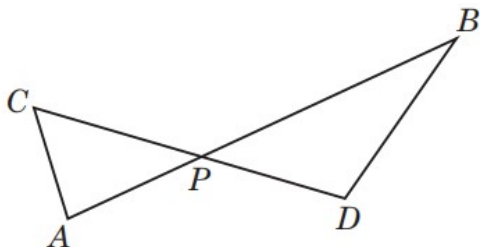
【典例 1】 如图，已知： AB 与 CD 相交于点 O ， $CO > AC$ ， $\angle B > \angle A$ ，求证： $OD > BD$.



【变式 1】 如图，已知：在线段 AB 、 BC 、 CD 、 DA 中， $AB > AD$ ， $BC > CD$. 求证： $\angle ADC > \angle ABC$.



【变式 2】 如图，已知： AB 和 CD 相交于点 P ， $CP > AC$ ， $BD > PD$. 求证： $\angle A > \angle B$.



【变式3】课本再现：

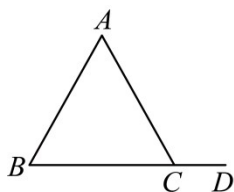


图1

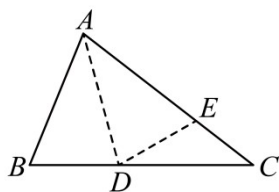


图2

(1)由三角形内角和定理可以推导出三角形外角的性质：三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和，我们可以进一步推导：三角形的外角大于与它不相邻的任何一个内角。

如图1， $\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，则 $\angle ACD$ _____ $\angle A + \angle B$ ，所以 $\angle ACD$ _____ $\angle B$ 。（填“>”、“<”或“=”）

(2)实验与探究：

三角形中边与角之间的不等关系

学习了等腰三角形，我们知道：在一个三角形中，等边所对的角相等，反过来，等角所对的边也相等。

那么不相邻的边（或角）所对的角（或边）之间的大小关系怎样呢？大边所对的角也大吗？

智慧小组把以上问题转化成如下证明题：“如图2，在 $\triangle ABC$ 中， $AC > AB$ ，求证： $\angle B > \angle C$ ”。并作出了

辅助线：作 $\angle BAC$ 的平分线 AD ，在 AC 上截取 $AE = AB$ ，连接 DE 。请你结合智慧小组的探究思路完成该问题的证明过程。

(3)从上面的过程可以看出，利用轴对称的特点，可以把研究边与角之间的不等问题，转化为较大量的一部分与较小量相等的问题。这是几何中研究不等问题时常用的方法，类似的，应用这种方法，我们可以说明“在一个三角形中，如果两个角不等，那么它们所对的边也不等，大角所对的边较大。”请你根据上述的结论判断下列说法中正确为_____

①在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB > AC > BC$ ，那么 $\angle C < \angle B < \angle A$

②在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB > AC > BC$ ，且 $\angle C = 87^\circ$ ，那么 $\triangle ABC$ 是锐角三角形

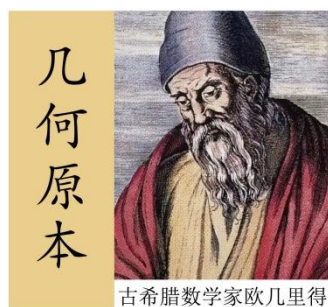
③在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle A = 54^\circ$ ， $\angle B = 72^\circ$ ，那么 $BC = AB$

④在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle C > \angle B > \angle A$ ，那么 $AB > AC > BC$

【变式4】阅读与思考

小明周末去图书馆学习，偶然间发现一本《几何原本》，阅读第一卷，就对其中的一个命题很感兴趣，于是将这段抄录在笔记本上，并完成了证明。下面是小明的笔记内容，请仔细阅读并完成相应任务。

《几何原本》是一部集前人思想和欧几里得个人创造性于一体的不朽之作，把人们公认的一些事实列成定义，公理和公设，用它们来研究各种几何图形的性质，从而建立了一套从定义，公理和公设出发，论证命题得到定理的几何学论证方法。在其第一卷中记载了这样一个命题：“在任意三角形中，大边对大角”。



下面是上述命题的证明。

已知：如图1，在 $\triangle ABC$ 中， $AC > AB$ 。

求证： $\angle ABC > \angle C$ 。

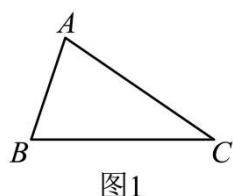


图1

证明：如图2，由于 $AC > AB$ ，故在 AC 边上截取 $AD = AB$ ，连接 BD 。

$AC > AB$ AC $AD = AB$ BD

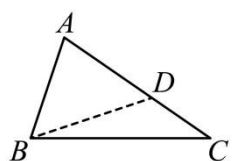


图2

$\therefore AD = AB$

$\therefore \angle ABD = \angle ADB$ ，（依据1）

$\because \angle ADB$ 是 $\triangle BCD$ 的外角，

$\therefore \angle ADB = \angle C + \angle DBC$ ，（依据2）

$\therefore \angle ADB > \angle C$ ，

$\therefore \angle ABD > \angle C$ 。

$\because \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$, $\therefore \angle ABC > \angle ABD$, $\therefore \angle ABC > \angle C$.

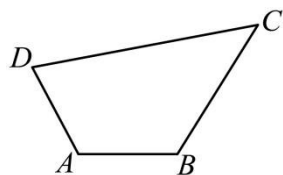


图3

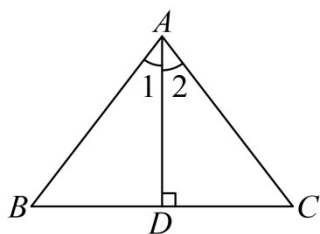
任务：

(1) 填空：材料中的依据¹是指：_____；依据²是指：_____。

(2) 如图3，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $CD > BC$ 。请猜想 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的关系，并证明你的结论。

强化训练

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $AD \perp BC$ 于点 D 。下列结论不一定正确的是（ ）



- A. $\angle B = \angle C$ B. $\angle 1 = \angle 2$ C. $BD = CD$ D. $AD = BC$

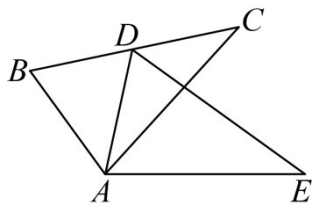
2. 若等腰三角形的一边长为8cm，周长为18cm，则腰长为（ ）

- A. 10cm 或 5cm B. 8cm 或 5cm C. 8cm 或 2cm D. 5cm

3. 等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为 40° ，则这个等腰三角形底角的度数为 ()

- A. 65° B. 25° C. 65° 或 25° D. 50° 或 130°

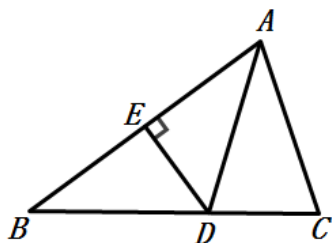
4. 如图， $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，点 D 在 BC 边上，若 $\angle E = 36^\circ$ ， $\angle DAC = 30^\circ$ ，则 $\angle BAC$ 的度数为 ()



- A. 55° B. 60° C. 78° D. 66°

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，边 AB 的垂直平分线交 BC 于点 D ，交 AB 于点 E 。给出如下结论：

① $AE = BE$ ；② $\angle DAB = \angle B$ ；③ $AD = BD$ ；④ $AD + DC = BC$ 。其中正确的有 ()



- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

6. 已知 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，且 $\angle A = 120^\circ$ ，则 $\angle B =$ _____。

7. 等腰三角形的一个角是 65° ，则它的顶角的度数是_____度。

8. 等腰三角形的两边长分别为 11 和 4，则第三边长为_____。

9. 一个等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为 50° ，则该等腰三角形的顶角度数为_____。

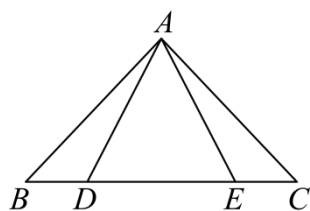
故答案为： 40° 或 140° 。

10. 如果一个等腰三角形其中一腰上的高与另一腰的夹角是 30° ，那么这个等腰三角形的顶角等于

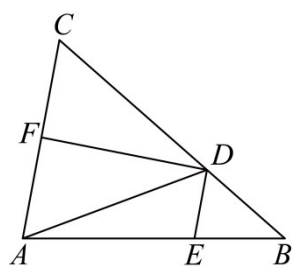
故答案为： 60° 或 120° 。

11. 过等腰三角形一个顶点的直线把这个等腰三角形分成两个三角形都是等腰三角形，则这个等腰三角形顶角的度数为_____。

12. 如图，点 D, E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，求证： $BD = CE$ 。



13. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 BC 边上的一点，且 $AD = CD$ ， DF 是 AC 边的中线， DE 平分 $\angle ADB$ 交 AB 于点 E 。求证： $DF \perp DE$ 。



14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ， $AE \perp CD$ 于点 E 。求证： $DC - DB = 2DE$ 。

