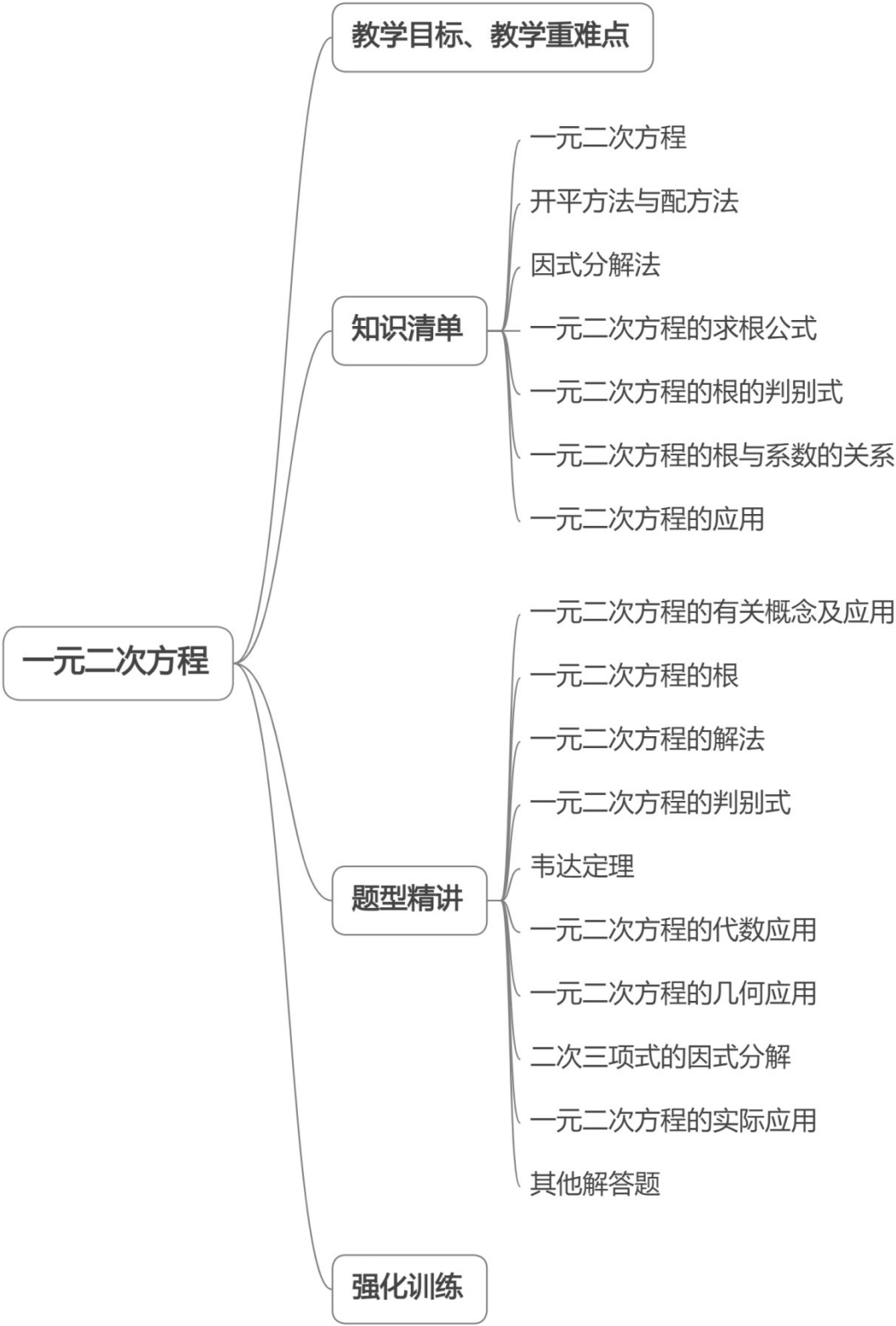


第 21 章 一元二次方程

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 了解一元二次方程的概念； 2. 学习一元二次方程的解法； 3. 掌握一元二次方程的判别式； 4. 知道一元二次方程根与系数的关系； 5. 学习一元二次方程的应用。
教学重难点	1.重点 (1) 一元二次方程的有关概念及其应用； (2) 一元二次方程的解法及其应用； (3) 一元二次方程的判别式，韦达定理及其应用。 2.难点 (1) 多参数问题； (2) 一元二次方程的综合应用。

知识清单

知识点 1 一元二次方程

1.一元二次方程

①定义：一般地，只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫作一元二次方程。

②一般形式：一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0$ (a 、 b 、 c 为已知数，且 $a \neq 0$)。

③其中 ax^2 叫作二次项， a 是二次项系数； bx 叫作一次项， b 是一次项系数； c 叫作常数项。

要点：一元二次方程的特征

- (1) 都是整式方程；
- (2) 只含有一个未知数；
- (3) 未知数的最高次数是 2。

2.一元二次方程的根

①.满足方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的实数 x 叫作这个方程的实数根(或者实数解),简称实根或者根。

②.判断一个未知数的值是不是这个方程的根：

使一元二次方程左右两边相等的未知数的值叫做一元二次方程的根。

③.一元二次方程如果有实数根，则必然有两个实数根，未知数为 x 的一元二次方程的两个根通常用 x_1 、 x_2 表示。

【即学即练】

1. 下列方程是一元二次方程的是 ()

- A. $ax^2 + bx + c = 0$ B. $4x^2 = 7x - 3$ C. $(x+1)^2 = x^2$ D. $2x + 7 = 4$

2. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6 = 2x$ ，则一次项系数为 ()

- A. -2 B. -6 C. 2 D. 1

3. 已知关于 x 的方程 $x^2 - x + a = 0$ 的一个根为 2，则 a 的值是 ()

- A. -3 B. -2 C. -1 D. 2

4. 若方程 $x^{m^2-2} - 2x - 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 m 的值为 ()

- A. 2 B. -2 C. ± 2 D. $\pm\sqrt{2}$

知识点 2 一元二次方程的解法—开平方法与配方法

1. 开平方法

对于形如 $(x+n)^2 = d (d \geq 0)$ 的方程，可用开平方法解。

开平方法的步骤是：把方程变形为 $(x+n)^2 = d (d \geq 0)$ ，然后开平方得 $x+n = \sqrt{d}$ 或 $x+n = -\sqrt{d}$ ，分别解这两个

一元一次方程，得到的解就是原一元二次方程的解。

2. 配平方法

一般地，像这样，在方程 $x^2 + 4x = 12$ 的左边加上一次项系数的一半的平方，再减去这个数，使得含未知数的项在一个完全平方里，这种做法叫作配方。配方、整理后就可以直接根据平方根的意义来求解了。这种解一元二次方程的方法叫作配方法。

3. 用配方法解一元二次方程的步骤

要点：用配方法解一元二次方程的步骤：

(1) 把方程化为一般形式 $ax^2 + bx + c = 0$ ；

- (2) 把方程的常数项通过移项移到方程的右边；
- (3) 若方程的二次项系数不为 1 时，方程两边同时除以二次项系数 a ；
- (4) 方程两边同时加上一次项系数一半的平方；
- (5) 此时方程的左边是一个完全平方式，然后利用平方根的定义把一元二次方程化为两个一元一次方程来解。

【即学即练】

- 一元二次方程 $3x^2 = 6$ 的解为 ()

A. $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$ B. $x_1 = x_2 = 2$

C. $x_1 = 2, x_2 = -2$ D. $x_1 = x_2 = \sqrt{2}$
- 关于 x 的方程 $(x+m)^2 = n$ ，下列说法正确的是 ()

A. 有两个解 $x = \pm\sqrt{n}$

B. 当 $n > 0$ 时，有两个解 $x = \pm\sqrt{n-m}$

C. 当 $n \leq 0$ 时，有两个解 $x = \pm\sqrt{n-m}$

D. 当 $n \leq 0$ 时，方程无实根
- 用配方法解关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x - 11 = 0$ ，配方后的方程可以是 ()

A. $(x-1)^2 = 10$ B. $(x-1)^2 = 12$ C. $(x+1)^2 = 10$ D. $(x+1)^2 = 12$
- 如下是小明在解方程 $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = 0$ 时的过程。他在解答过程中开始出错的步骤是 ()

$\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = 0$

$x^2 - 4x - 2 = 0$ ①

$x^2 - 4x = 2$ ②

$(x-2)^2 = 2$ ③

$x = 2 \pm \sqrt{2}$ ④

A. 第①步 B. 第②步 C. 第③步 D. 第④步
- 代数式 $y^2 + 4y + 8$ 的最小值是_____。

知识点3 一元二次方程的解法—因式分解法

1.因式分解法：通过因式分解，把一元二次方程化成两个一次因式的积等于0的形式，从而把解一元二次方程的问题转化为解一元一次方程的问题.

像这样解一元二次方程的方法叫作**因式分解法**.

因式分解法适用于解某些特殊的一元二次方程.

要点：把方程化成一边为0，另一边是两个一次因式的乘积的形式，然后使每一个一次因式等于0，分别解两个一元一次方程，得到的两个解就是原一元二次方程的解.

2.常用的因式分解法

提取公因式法，公式法（平方差公式、完全平方公式），十字相乘法等.

要点：

- (1) 能用分解因式法来解一元二次方程的结构特点：方程的一边是0，另一边可以分解成两个一次因式的积；
- (2) 用分解因式法解一元二次方程的理论依据：两个因式的积为0，那么这两个因式中至少有一个等于0；
- (3) 用分解因式法解一元二次方程的注意点：①必须将方程的右边化为0；②方程两边不能同时除以含有未知数的代数式.

【即学即练】

1. 一元二次方程 $x^2 - 3x = 0$ 的解是_____.
2. 三角形的两边长为4和7，第三边的长是方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的一个根，则这个三角形的周长为_____.
3. 已知 $(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2) - 3 = 0$ ，则 $x^2 + y^2$ 的值为_____.

知识点4 一元二次方程的求根公式

1.一元二次方程的求根公式

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根由方程的系数 a 、 b 、 c 而定，因此：

①解一元二次方程时，可以先将方程化为一般形式 $ax^2 + bx + c = 0$ ，当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时，它的实数根可以写成 $x =$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (b^2 - 4ac \geq 0) \text{ 的形式，这个式子叫做一元二次方程的求根公式.}$$

②在求根公式中，如果 $b^2 - 4ac = 0$ ，那么 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ，即方程有两个相等的实数根(重根).

【归纳结论】

在解一元二次方程时，把方程化成一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ ，如果 $b^2-4ac\geq 0$ ，那么把 a 、 b 、 c 的值代入求根公式，就可以求得方程的实数根；如果 $b^2-4ac<0$ ，那么原方程没有实数根.这种解一元二次方程的方法称为公式法.

2.一元二次方程的解法小结（非书面）

特殊的一元二次方程解法：①（直接）开平方法；依据：实数平方的非负性

②因式分解法；依据：因式分解

一般的一元二次方程解法：③配方法；依据：完全平方公式

④公式法；依据：配方法推导而来

配方法、公式法同途归；因此，一般的，它们都适用所有的一元二次方程.

【即学即练】

1. 若 $x = \frac{2 + \sqrt{4 - 4 \times (-1)}}{2}$ 是某个一元二次方程的一个根，则这个一元二次方程可以是（ ）

A. $x^2 - 2x - 1 = 0$

B. $x^2 + 2x - 1 = 0$

C. $x^2 + 2x + 1 = 0$

D. $x^2 - 2x + 1 = 0$

2. 方程 $2x^2 - 5x + 1 = 0$ 的解是_____.

3. 一元二次方程 $(2x+3)(x-1)=1$ 的解为 ____.

知识点5 一元二次方程的判别式

1.一元二次方程的判别式

由前面的公式法我们知道，根据 b^2-4ac 的值的符号可以判断一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的情况，我们把 b^2-4ac 叫作该一元二次方程的判别式，通常用符号“ Δ ”(读作“/delta/”)来表示，记作 $\Delta=b^2-4ac$.

2.利用一元二次方程的判别式判断根的情况

利用判别式，可以不解方程就能判断一个一元二次方程是否有实数根，以及有实数根时两根是否相等.

对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$:

①当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

②当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

③当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

要点：利用一元二次方程的判别式判定一元二次方程根的情况的步骤：①把一元二次方程化为一般形式；②确定 a, b, c 的值；③计算 $b^2 - 4ac$ 的值；④根据 $b^2 - 4ac$ 的符号判定方程根的情况。

3. 依据根的情况判断一元二次方程的判别式的符号

①当方程有两个不相等的实数根时， $\Delta > 0$ ；

②当方程有两个相等的实数根时， $\Delta = 0$ ；

③当方程没有实数根时， $\Delta < 0$ 。

要点：

(1) 逆用一元二次方程的判别式求未知数的值或取值范围，但不能忽略二次项系数不为 0 这一条件；

(2) 若一元二次方程有两个实数根则 $b^2 - 4ac \geq 0$ 。

【即学即练】

1. 方程 $3x^2 - 5x - 2 = 0$ 的根的判别式的值为_____。

2. 关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - 3x + k = 0$ 有实数根，则实数 k 的取值范围是_____。

3. 下列关于 x 的方程中，不论 a 取什么实数值，一定有两个实数根的是 ()

A. $x^2 + ax - 1 = 0$ B. $ax^2 + 2x + 1 = 0$ C. $x^2 + 2x + a = 0$ D. $x^2 + ax + 1 = 0$

4. 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 4x + 1 = 0$ 有两个不等实数根，那么 k 的取值范围是_____。

知识点 6 一元二次方程根与系数的关系

一元二次方程的根与系数关系的定理：

韦达定理

如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2 , 那么

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

注意它的使用条件为 $a \neq 0$, $\Delta \geq 0$ 。

也就是说，对于任何一个有实数根的一元二次方程，两根之和等于方程的一次项系数除以二次项系数所得

的商的相反数；两根之积等于常数项除以二次项系数所得的商。

【即学即练】

1. 设方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 的两根分别是 x_1, x_2 ，则 $x_1 + x_2$ 的值为 ()

A. 3 B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. -2

2. 若一元二次方程 $x^2 - 4x - 3 = 0$ 的两个不相等的实数根为 x_1, x_2 , 则: $x_1 + x_2 - 2x_1x_2$ 的值是 ()

- A. -2 B. 1 C. 7 D. 10

3. 已知方程 $x^2 + x - 2 = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 , 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值为 ()

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{5}$

知识点7 一元二次方程的应用

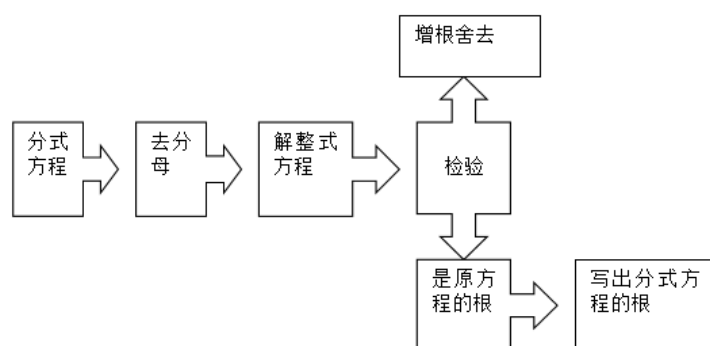
1. 二次三项式的因式分解

要将二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 因式分解, 如果 $b^2 - 4ac \geq 0$, 可以用求根公式求出方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根 x_1, x_2 , 然后得到 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

但如果 $b^2 - 4ac < 0$, 那么二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 在实数范围内就不能因式分解.

2. 可化为一元二次方程的分式方程: 在求解上面的分式方程时, 去分母后所得到的整式方程是一个一元二次方程, 所以上面的分式方程是可化为一元二次方程的分式方程, 其求解步骤与解可化为一元一次方程的分式方程类似.

3. 求解可化为一元二次方程的分式方程的步骤.



4. 列一元二次方程解应用题的一般步骤

审题 → 寻找数量关系和等量关系 → 设未知数 (直接假设和间接假设) → 列一元二次方程 → 解方程 → 检验 → 作答。

【即学即练】

1. 某工厂 2023 年的总产值为 500 万元, 2025 年总产值为 960 万元. 若该厂每年的平均增长率都是 x , 则可列出方程为_____.

2. 联欢会上, 每位同学向其他同学赠送 1 件礼物, 结果共有互赠礼物 870 件, 求参加联欢会的同学人数, 设参加联欢会的同学有 x 人, 那么可列出方程_____.

3. 在实数范围内因式分解： $2x^2 - 4xy - y^2 =$ _____.

题型精讲

题型 01 一元二次方程的有关概念及应用

【典例 1】. 下列方程中，一定是一元二次方程的是 ()

A. $ax^2 + bx + c = 0$

B. $x^2 - 2y - 3 = 0$

C. $\frac{1}{x^2 + x} = 1$

D. $x^2 + 1 = 0$

【变式 1】. 把 $x(x-2) = 4x^2 - 3x$ 化成一般形式为_____，二次项系数为_____，一次项系数为_____，常数项为_____.

【变式 2】. 若关于 x 的方程 $(m+1)x^{m^2+1} + 4x - 5 = 0$ 是一元二次方程，则 m 的值是 ()

A. 0

B. -1

C. 1

D. ± 1

题型 02 一元二次方程的根

【典例 1】. 要使方程 $(a-3)x^2 + (b+1)x + c = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 ()

A. $a \neq 0$

B. $a \neq 3$

C. $a \neq 1$ 且 $b \neq -1$

D. $a \neq 3$ 且 $b \neq -1$ 且 $c \neq 0$

【变式 1】. 若 m 是方程 $4x^2 - 2x - 7 = 0$ 的一个根，则代数式 $m - 2m^2 + 3$ 的值是_____.

【变式 2】. 已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + mx - 6 = 0$ 的一个根是 3，则 m 的值是_____.

【变式 3】. 若 $x = 3$ 是关于 x 的方程 $ax^2 - bx = 6$ 的解，则 $2024 - 9a + 3b$ 的值为_____.

题型 03 一元二次方程的解法

【典例 1】. 用适当方法解下列方程：

(1) $(2x-1)^2 = 9$;

(2) $12x^2 - 45x - 525 = 0$;

(3) $(3x-1)^2 - (x+1)^2 = 0$;

(4) $(x-2)^2 + x(x-2) = 0$;

(5) $\frac{1}{2}x^2 - 5\sqrt{2}x + 1 = 0$;

(6) $0.3x^2 + 0.5x = 0.3x + 2.1$.

【变式 1】 . 方程 $(x+1)^2=4(x-2)^2$ 的解是 ()

- A . $x=1$ B . $x=5$ C . $x_1=1, x_2=5$ D . $x_1=1, x_2=-2$

【变式 2】 . 用配方法解下列方程时，配方有错误的是 ()

- A . $x^2 - 2x - 99 = 0$ 化为 $(x-1)^2 = 100$ B . $x^2 + 8x + 9 = 0$ 化为 $(x+4)^2 = 25$
C . $2t^2 - 7t - 4 = 0$ 化为 $\left(t - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$ D . $3x^2 - 4x - 2 = 0$ 化为 $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$

【变式 3】 . 方程 $(x+1)(x-3)=5$ 的解是 ()

- A . $x_1=1, x_2=3$ B . $x_1=4, x_2=-2$
C . $x_1=-1, x_2=3$ D . $x_1=-4, x_2=2$

【变式 4】 . 一元二次方程 $x(2x-5)=4x-10$ 的根是_____ .

【变式 5】 . 解下列方程：① $2x^2 - 18 = 0$; ② $9x^2 - 12x - 1 = 0$; ③ $3x^2 + 10x + 2 = 0$; ④ $2(5x - 1)^2 = 2(5x -$

1) . 用较简便的方法依次是 ()

- A . ①直接开平方法，②配方法，③公式法，④因式分解法
B . ①直接开平方法，②公式法，③、④因式分解法
C . ①因式分解法，②公式法，③配方法，④因式分解法
D . ①直接开平方法，②、③公式法，④因式分解法

题型 04 一元二次方程的判别式

【典例 1】 . 下列方程中，无实数根的方程是 ()

- A . $x^2 + 3x + 4 = 1$ B . $x^2 + 3x + 4 = 2$ C . $x^2 + 3x + 4 = 3$ D . $x^2 + 3x + 4 = 4$

【变式 1】 . 已知关于 x 的方程 $mx^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 m 可取的最大整数是_____ .

【变式 2】 . 如果关于 x 的方程 $(m-1)x^2 + x + 1 = 0$ 有实数根，那么 m 的取值范围是 ()

- A . $m < \frac{5}{4}$ B . $m < \frac{5}{4}$ 且 $m \neq 1$ C . $m \leq \frac{5}{4}$ D . $m \leq \frac{5}{4}$ 且 $m \neq 1$

【变式 3】 . 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 3x + a - 2 = 0$ 有实数根 .

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 当 a 为符合条件的最大整数，求此时方程的解。

题型 05 韦达定理

【典例 1】. 方程 $x^2 - 4x = 5$ 的根是 ()

- A. $x_1 x_2 = 5$ B. $x_1 + x_2 = -4$ C. $x_1 x_2 = \frac{5}{4}$ D. $x_1 + x_2 = 4$

【变式 1】. 已知 α 和 β 是一元二次方程 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的两个实数根，则 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} =$ ()

- A. -6 B. $-\frac{6}{5}$ C. 6 D. $\frac{6}{5}$

【变式 2】. 若 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 4x - 2024 = 0$ 的两个实数根，则代数式 $x_1^2 - 2x_1 + 2x_2$ 的值等于 ()

- A. 2024 B. 2027 C. 2032 D. 2035

【变式 3】. 设 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - mx - 6 = 0$ 的两个根，且 $x_1 + x_2 = 1$ ，则 $|x_1 - x_2| =$ _____.

【变式 4】. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m+2)x + m - 1 = 0$.

(1) 求证：无论 m 取何值，方程都有两个不相等的实数根；

(2) 如果方程的两个实数根为 x_1, x_2 ，且 $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 9$ ，求 m 的值。

题型 06 一元二次方程的代数应用

【典例 1】. 如果代数式 $x^2 + x + 2$ 与 $5x - 2$ 的值相等，那么 $x =$ _____.

【变式 1】. 设方程 $x^2 - x + k = 0$ 的一个根的 3 倍少 7 为另一个根，则 $k =$ _____.

【变式 2】. 在解一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 时，小红看错了常数项 q ，得到方程的两个根是 $-3, 1$ 。小明看错了一次项系数 p ，得到方程的两个根是 $5, 4$ ，则原来的方程是 ()

- A. $x^2 + 2x - 3 = 0$ B. $x^2 + 2x - 20 = 0$ C. $x^2 - 2x - 20 = 0$ D. $x^2 - 2x - 3 = 0$

【变式 3】. 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a < 0$) 有两个实根，则这两个实根的大小关系是 ()

A. $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \geq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

B. $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$C. \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D. \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

【变式 4】 . 若关于 x 的一元二次方程： $a_1(x-m)^2 + n = 0$ 与 $a_2(x-m)^2 + n = 0$ ，称为“同族二次方程”．如

$2(x-3)^2 + 4 = 0$ 与 $3(x-3)^2 + 4 = 0$ 是“同族二次方程”．现有关于 x 的一元二次方程： $2(x-1)^2 + 1 = 0$ 与

$(a+2)x^2 + (b-4)x + 8 = 0$ 是“同族二次方程”．那么代数式 $ax^2 + bx + 2018$ 能取的最小值是 ()

A . 2011

B . 2013

C . 2018

D . 2023

题型 07 一元二次方程的几何应用

【典例 1】 . 已知三角形其中两边之和为 10，第三边长是方程 $x^2 - 12x + 11 = 0$ 的一个根，则该三角形的周长为 ()

A . 11

B . 21

C . 11 或 21

D . 11 或 1

【变式 1】 . 已知 2, 3, a 分别是等腰三角形三边的长，且 a 是关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 - x + k^2 + 1 = 0$ 的根，则 k 的值为_____．

【变式 2】 . 我国南宋时期数学家秦九韶曾提出利用三角形的三边求面积的公式，此公式与古希腊几何学家海伦提出的公式如出一辙，即三角形的三边长分别为 a , b , c ，记 $p = \frac{a+b+c}{2}$ ，则其面积

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ．这个公式也被称为海伦—秦九韶公式．若 $p = 3$ ， $c = 2$ ，则此三角形面积的最大值是_____．

题型 08 二次三项式的因式分解

【典例 1】 . 在实数范围内因式分解： $4x^2 - 12x + 1 =$ _____； $5x^2 + 2\sqrt{5}xy - 3y^2 =$ _____．

【变式 1】 . 把二次三项式 $2x^2 - 8xy + 5y^2$ 因式分解，下列结果正确的是 ()

$$A. \left(x - \frac{4 - \sqrt{6}}{2}y\right) \left(x - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)$$

$$B. 2 \left(x + \frac{4 - \sqrt{6}}{2}y\right) \left(x + \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)$$

$$C. 2\left(x - \frac{4 - \sqrt{6}}{2}y\right)\left(x - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)$$

$$D. (2x - 4y + \sqrt{6}y)\left(x - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)$$

【变式2】 . 若方程 $x^2 + 3xy - 2y^2 = 0$ 的两个解是 $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}y, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}y$, 那么 $x^2 + 3xy - 2y^2$ 在实数范围内分解因式是 ()

$$A. (x + 2y)(x + y)$$

$$B. \left(x - \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}\right)$$

$$C. \left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{2}y\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{2}y\right)$$

$$D. \left(x - \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}y\right)\left(x - \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}y\right)$$

题型 09 一元二次方程的实际应用

【典例1】 . 某商场对一款无人机进行降价促销，其售价由最初的 400 元经过两次降价后变为 225 元，且两次降价的百分率相同．设每次降价的百分率为 x ，可列方程为 ()

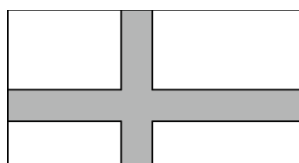
$$A. 400(1 - x^2) = 225$$

$$B. 225(1 + x)^2 = 400$$

$$C. 400(1 - x)^2 = 225$$

$$D. 400(1 - 2x) = 225$$

【变式1】 . 如图，在长为 100 米，宽为 80 米的矩形场地上修建两条宽度相等且互相垂直的道路，剩余部分进行绿化，要使绿化面积为 7644 平方米，设道路的宽为 x 米，则可列方程为 ()



$$A. 100 \times 80 + 100x - 80x = 7644$$

$$B. (100 - x)(80 - x) + x^2 = 7644$$

$$C. (100 - x)(80 - x) = 7644$$

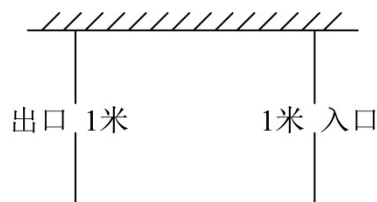
$$D. 100x + 80x = 356$$

【变式2】 . 学校要组织一次排球邀请赛，参赛的每两个队之间都要比赛一场．根据场地和时间等条件，赛程计划安排 7 天，每天安排 4 场比赛，比赛组织者应邀请多少个队参赛？设应邀请 x 个队参赛，根据题

意，可列方程为（ ）

A. $\frac{1}{2}x(x-1)=28$ B. $\frac{1}{2}x(x+1)=28$ C. $x(x-1)=28$ D. $x(x+1)=28$

【变式3】 . 布置某艺术中心的会场时，工作人员准备利用 35 米长的墙为一边，用 68 米隔栏绳围另三边，设立一个面积为 600 平方米的长方形等候区，如图，为了方便群众进出，在两边各空出一个 1 米的出入口（出入口不用隔栏绳）. 如果设这个长方形垂直于墙的一边长为 x 米，那么可以列出关于 x 的方程（ ）



A. $(68+2-2x) \cdot (x-1) = 600$ B. $(68-2-2x) \cdot (x-1) = 600$
C. $(68+2-2x)x = 600$ D. $(68-2-2x)x = 600$

题型 10 其他解答题

【典例1】 . 下面是小明用因式分解法解一元二次方程的过程，请仔细阅读，并完成相应的问题 .

解一元二次方程： $6x^2 - 2x = 1 - 3x$

解：原方程可以化为： $2x(3x-1) = -(3x-1)$ 第一步

两边同时除以 $(3x-1)$ 得： $2x = -1$ 第二步

系数化为 1，得： $x = -\frac{1}{2}$ 第三步

任务：

(1)小明的解法是不正确的，他从第_____步开始出现了错误；

(2)请你继续用因式分解法完成这个方程的正确解题过程 .

【变式1】 . 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + (2k+1)x + k+1 = 0 (k \neq 0)$

(1) 求证：无论 k 取何值，方程总有两个不相等的实数根；

(2) 当 $k > 1$ 时，判断方程两根是否都在 -2 与 0 之间

【变式2】 . 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2mx + m^2 - 3m = 0$.

(1)若方程有两个实数根，求 m 的取值范围；

(2) 设方程的两个实数根为 x_1, x_2 ，若 $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = 36$ ，求 m 的值。

【变式3】 上海市公安交警部门提醒市民，骑车出行必须严格遵守“一盔一带”的规定。某头盔经销商统计了某品牌头盔9月份到11月份的销量，该品牌头盔9月份销售500个，11月份销售720个，9月份到11月份销售量的月增长率相同。

(1) 求该品牌头盔销售量的月增长率；

(2) 若此种头盔的进价为40元/个，商家经过调查统计，当售价为50元/个时，月销售量为500个，若在此基础上售价每上涨2元/个，则月销售量将减少10个，为使月销售利润达到9000元，且尽可能让顾客得到实惠，则该品牌头盔每个售价应定为多少钱？

强化训练

一、单选题

1. 下列方程是一元二次方程的是 ()

A. $ax^2 + bx + c = 0$ B. $\sqrt{x^2 - 4} = x$ C. $2x^2 + \frac{1}{x} + 2 = 0$ D. $(m^2 + 1)x^2 - 3x = 4$

2. 已知一元二次方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 可配成 $(x - n)^2 = 1$ ，则 $m + n$ 的值为 ()

A. -1 B. 1 C. -5 D. 5

3. 关于 x 的一元二次方程 $(a - 1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$ 的一个根是0，则 a 的值为 ()

A. 1 B. -1 C. 1 或 -1 D. 0

4. 近年来，由于新能源汽车的崛起，燃油汽车的销量出现了不同程度的下滑，经销商纷纷开展降价促销活动。某款燃油汽车今年2月份售价为25万元，4月份售价为20.25万元，设该款汽车这两月售价的月平均降价率是 x ，则所列方程正确的是 ()

A. $25(1 - x)^2 = 20.25$ B. $20.25(1 + x)^2 = 25$
C. $20.25(1 - x)^2 = 25$ D. $25(1 - 2x) = 20.25$

5. 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是 ()

A. $k > -1$ 且 $k \neq 0$ B. $k < -1$ 且 $k \neq 0$
C. $k > -1$ D. $k < 1$ 且 $k \neq 0$

6. 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，下列说法：

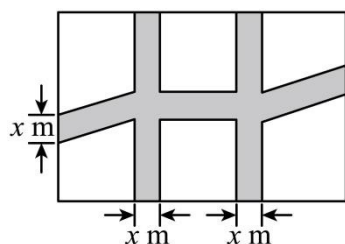
- ①若方程 $ax^2 + c = 0$ 有两个不相等的实根，则方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 必有两个不相等的实根；
- ②若 x_0 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根，则 $b^2 - 4ac = (2ax_0 + b)^2$ ；
- ③存在实数 $m, n (m \neq n)$ ，使得 $am^2 + bm + c = an^2 + bn + c$ ；
- ④若 c 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根，则一定有 $ac + b + 1 = 0$ 成立

其中正确的有 ()

- A. ①② B. ②③④ C. ①②③④ D. ①②③

二、填空题

7. 方程 $2x^2 - 4 = 0$ 的解是_____.
8. 请写出一个一元二次方程，使其一个根为 2，一个根为 0：_____.
9. 设 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 3x - 2021 = 0$ 的两个根，则 $x_1^2 - 2x_1 + x_2 =$ _____.
10. 因式分解： $3x^2 - 5x + 1 =$ _____.
11. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} = 1$ ，则该分式方程的解为_____.
12. 如图，某单位准备在院内一块长 30m、宽 20m 的长方形花园中修两条纵向平行和一条横向弯折的小道，剩余的部分种植花草。如图，要使种植花草的面积为 532m^2 ，则小道进出口的宽度为_____m.



13. 定义新运算“ $a*b$ ”：对于任意实数 a, b ，都有 $a*b = ab + 1$ ，其中等式右边是通常的加法和乘法运算。例如： $3*4 = 3 \times 4 + 1 = 13$ 。若关于 x 的方程 $x^*(kx+1) = 0$ 有两个实数根，则实数 k 的取值范围是_____.
14. 对于一切不小于 2 的自然数 n ，关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (n+2)x - 2n^2 = 0$ 的两个根为 $a_n, b_n (n \geq 2)$ ，则 $\frac{1}{(a_2-2)(b_2-2)} + \frac{1}{(a_3-2)(b_3-2)} + \cdots + \frac{1}{(a_{2021}-2)(b_{2021}-2)} =$ _____.

三、解答题

15. 解下列方程

$$(1)(x+5)^2 = 25$$

$$(2)x^2 + 2x = 0$$

$$(3)x^2 + 10x + 21 = 0$$

$$(4)3x^2 + 6x - 4 = 0$$

16. 已知： α ， β 是方程 $x^2 + 2x - 4 = 0$ 有两个实数根，求出下列代数式的值

$$(1)\alpha + \beta(\alpha + 1) ;$$

$$(2)\alpha^2 + 4\alpha + 2\beta .$$

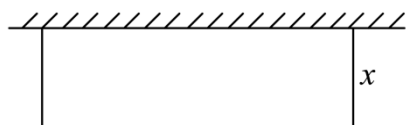
17. 已知关于 x 的方程 $kx^2 - (3k-1)x + 2(k-1) = 0$.

(1)求证：无论 k 为何实数，方程总有实数根；

(2)此方程的两个实数根为 x_1 、 x_2 ，且 $|x_1 - x_2| = 2$ ，求 k 的值 .

18. 某建筑工程队，在工地一边的靠墙处，用 120 米长的铁栅栏围成一个所占面积为长方形的临时仓库，

已知墙的长度为 60 米，如图所示，设所围成的长方形的面积为 1600 平方米，求长方形的宽 x 为多少米？



19. 某市某小区共有市民 5400 人，“蓝天”医疗队进驻该小区进行一次全员专项健康检测，若医疗队比计划每分钟多检测 5 人，那么可以缩短 1.5 小时完成任务。在这个基础上，上级部门准备安排“蓝天”医疗队去增援另一小区检测，现在要求“蓝天”医疗队再提早 1.5 小时完成任务，那么“蓝天”医疗队现在每分钟还要多检测几人才能去增援另一小区？

20. 某品牌画册每本成本为 40 元，当售价为 60 元时，平均每天的销售量为 100 本。为了吸引消费者，商家决定采取降价措施。经试销统计发现，如果画册售价每降低 1 元时，那么平均每天就能多售出 10 本。商家想要使这种画册的销售利润平均每天达到 2240 元，且要求每本售价不低于 55 元，求每本画册应降价多少元？

21. 对于关于 x 的代数式 $ax^2 + bx + c$ ，若存在实数 m ，使得当 $x = m$ 时，代数式的值也等于 m ，则称 m 为这个代数式的“不动值”。例如：对于关于 x 的代数式 x^2 ，当 $x = 0$ 时，代数式的值等于 0；当 $x = 1$ 时，代数式的值等于 1，我们就称 0 和 1 都是这个代数式的“不动值”。

(1)关于 x 的代数式 $x^2 - 6$ 的不动值是_ .

(2)判断关于 x 的代数式 $2x^2 - x + 1$ 是否有不动值，若有，请求出代数式的不动值；若没有，则说明理由 .

(3)已知关于 x 的代数式 $ax^2 + (4 - a)x - 3 (a \neq 0)$.

①若此代数式仅有一个不动值，求 a 的值；

②若此代数式有两个不动值，且两个不动值的差为 2，直接写出正整数 a 的值 .