

专题 02 平面直角坐标系中的动点问题

题型归纳

题型一：与动点相关的等腰（直角）三角形存在性问题

题型二：与动点相关的特殊四边形的存在性问题

题型三：与动点相关的最值问题

题型专练

题型 01 与动点相关的等腰（直角）三角形存在性问题

在直角坐标系中判定等腰三角形是否存在一般是看是否有两条边相等；

在直角坐标系中判定直角三角形是否存在一般是看三边是否满足勾股定理；

【典例 1】如图 1，在平面直角坐标系中有矩形 $OABC$ ，点 $C(0,4)$ ，将矩形 $OABC$ 沿 AC 折叠，使得点 B 落

在点 D 处， CD 边交 x 轴于点 E ， $\angle OAC = 30^\circ$ 。

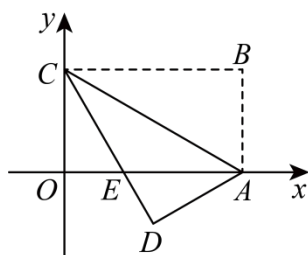


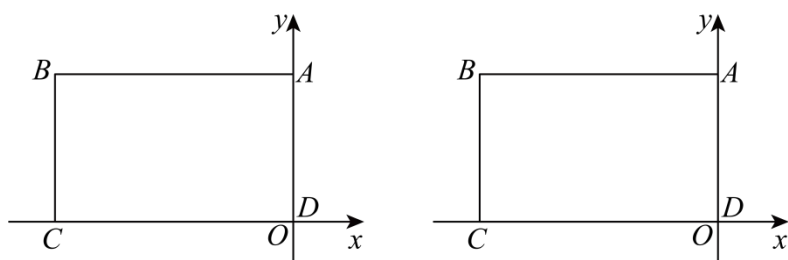
图1

(1)求点 E 的坐标；

(3)点 P 为 y 轴上一动点，作直线 AP 交直线 CD 于点 Q ，是否存在点 P 使得 $\triangle CPQ$ 为等腰三角形？如果存在，

请求出 $\angle OAP$ 的度数；如果不存在，请说明理由。

【变式1】 如图，在平面直角坐标系中，长方形 $ABCD$ 的顶点 C 、 A 、 D 的坐标分别为 $(-8,0)$ ， $(0,4)$ ， $(0,0)$ ， N 为 x 轴上一个动点



备用图

(1) 在 x 轴上是否存在点 N ，使得 $\triangle ABN$ 是等腰三角形？若存在，直接写出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由。

(2) 在 x 轴上是否存在点 N ，使得 $\triangle ABN$ 是直角三角形？若存在，直接写出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由。

【变式2】 如图¹所示，在平面直角坐标系中， $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形， $B(8,0)$ 。

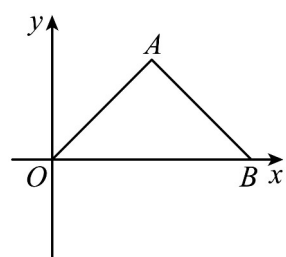


图1

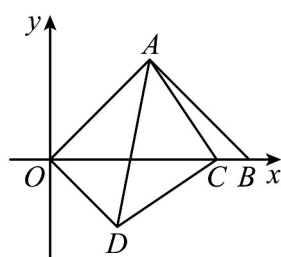


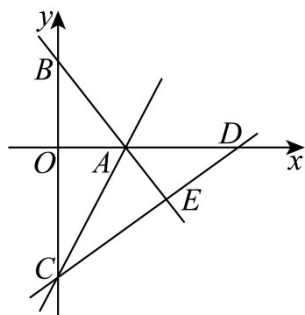
图2

(1) 直接写出点 A 的坐标；

(2) 如图2，若点 C 为 x 轴正半轴上一动点，以 AC 为直角边作等腰直角 $\triangle ACD$ ， $\angle ACD = 90^\circ$ ， D 点在第四

象限，连接 OD ，求出 $\angle AOD$ 的度数。

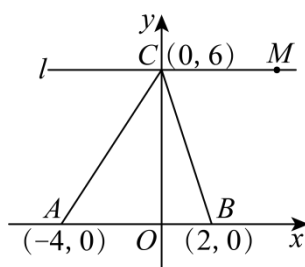
【变式3】 如图，在平面直角坐标系中，直线 AB 与 x 轴、 y 轴分别交于点 $A(3,0)$ ， $B(0,4)$ ，点 C 在 y 轴的负半轴上，若将 $\triangle CAB$ 沿直线 AC 折叠，点 B 恰好落在 x 轴正半轴上的点 D 处。



(1) 点 C 的坐标是_____。

(2) 在第一象限内是否存在点 P ，使 $\triangle PAB$ 为等腰直角三角形，若存在，直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

【变式4】 如图， A ， B ， C 三点的坐标分别为 $A(-4,0)$ ， $B(2,0)$ ， $C(0,6)$ 。



(1) 求三角形 ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}$ ；

(2) 过点 C 作直线 l 平行于 x 轴，点 M 为直线 l 上任意一点，试猜想三角形 CAB 的面积 $S_{\triangle CAB}$ 与三角形 MAB

的面积 $S_{\triangle MAB}$ 的关系，并证明你的猜想；

(3) 试在坐标轴上找一点 P ，使 $S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$ ，请直接写出满足条件的点 P 的坐标。

题型 02 与动点相关的特殊四边形的存在性

在坐标系中看是否存在特殊的四边形，就看是否满足相关的特殊四边形的特征。

若四边形为平行四边形，则两组对边分别相等，或有一组对边平行且相等；

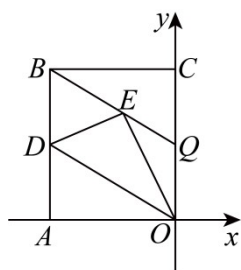
若四边形为矩形，则四个角都是直角，对角线相等且互相平分；

若四边形是菱形，则四条边都相等，对角线互相垂直平分；

若四边形是正方形，则它既是矩形又是菱形。

【典例 1】 在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 O, A, C 的坐标分别为 $O(0,0), A(-x,0), C(0,y)$ ，且 x, y

满足 $y = \sqrt{x-4} + \sqrt{4-x} + 6$ 。

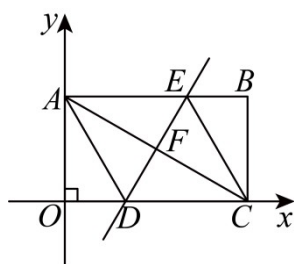


(1) 矩形的顶点 B 的坐标是_____；

(2) 若 D 是 AB 上的一个动点，沿 DO 折叠矩形 $OABC$ ，使 A 点落在点 E 处，折痕为 DO ，连接 BE 并延长

BE 交 y 轴于 Q 点，是否存在点 D 使四边形 $QODB$ 是平行四边形？若存在求 D 点坐标。

【变式 1】 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的对角线 $AC = 12$ ， $\angle ACO = 30^\circ$ 。

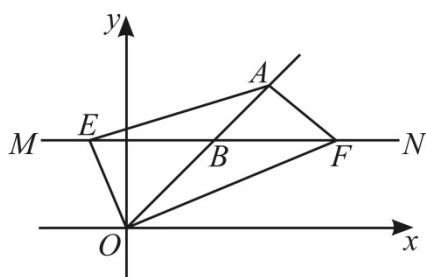


(1) 求点 B 的坐标；

(2) 把矩形 $OABC$ 沿直线 DE 折叠后展开，使点 C 落在点 A 处， DE 与 AC 相交于点 F ，

若点 M 在 x 轴上，平面内是否存在点 N ，使以点 O ， F ， M ， N 为顶点的四边形为矩形？若存在，请求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由。

【变式 2】 如图，在平面直角坐标系中，动点 A 纵坐标为 4 ，点 B 是线段 OA 上的一个动点，过点 B 作直线 MN 平行于 x 轴，设 MN 分别交射线 OA 与 x 轴所成的两个角的平分线于点 E 、 F 。

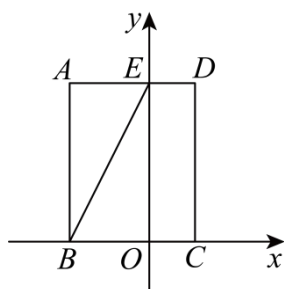


(1) 求证： $EB = BF$ ；

(2) 当 $\frac{OB}{OA}$ 为何值时，四边形 $AEOF$ 是矩形？证明你的结论；

(3) 是否存在点 A 、 B ，使四边形 $AEOF$ 为正方形？若存在，求点 A 与 B 的坐标；若不存在，说明理由。

【变式 3】 如图，矩形 $ABCD$ 的边 BC 在 x 轴上， AD 与 y 轴交于点 E ，且 $OB = 5$ ， $OC = 3$ ， $OE = 2OB$ 。



(1) 求点 A 的坐标 .

(2) 在平面直角坐标系中, 是否存在点 P , 使得以 B 、 E 、 C 、 P 为顶点的四边形为平行四边形? 若存在, 请直接写出点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由 .

【变式 4】 如图 1, 在平面直角坐标系中, 直线 AB 分别与 x 轴、 y 轴交于点 $A(8,0)$ 、 $B(0,6)$, 四边形 $ABCD$

是正方形. M 是线段 AB 上的一个动点 (点 A 、 B 除外)

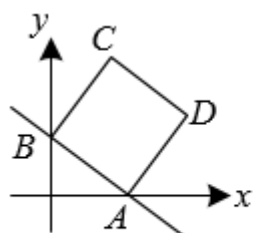


图1

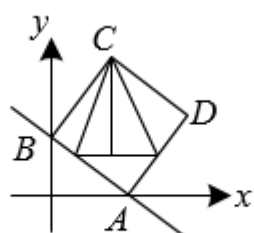
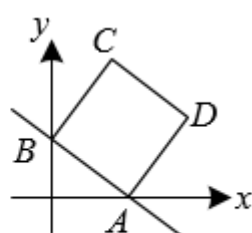


图2



备用图

①如图 2, 将 $\triangle BMC$ 沿 CM 折叠, 点 B 的对应点是点 E , 连接 ME 并延长交 AD 边于点 F , 问 $\triangle AMF$ 的周长

是否发生变化? 若不变, 求出其值; 若变化, 请说明理由;

②探索在第二象限是否存在另一个点 N , 使得以 O 、 B 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形? 若不存在, 请说明

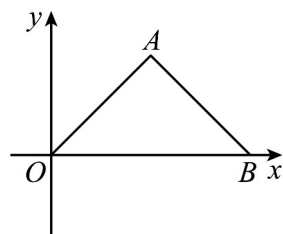
理由; 若存在, 请求出点 N 的坐标 .

题型 03 与动点相关的最值问题

最值问题的原理就是两点之间线段最短，点和直线之间垂线段最短；

最值问题常包含两种类型：最大值和最小值问题.最常见的类型就是“将军饮马问题”.

【典例 1】 如图¹所示，在平面直角坐标系中， $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形， $B(8,0)$.

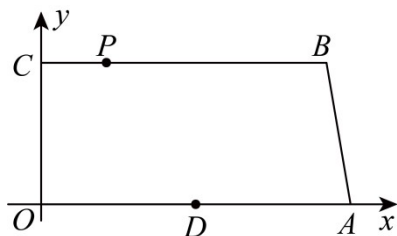


(1) 直接写出点 A 的坐标；

(2) 在 y 轴上是否存在点 P ，使 $PA + PB$ 最小？若存在，求出 $PA + PB$ 的最小值；若不存在，说明理由；

【变式 1】 已知，如图， O 为坐标原点，在四边形 $OABC$ 中， $BC \parallel OA$ ， $BC = 24$ ， $A(26,0)$ ， $C(0,12)$ ，

动点 P 在线段 BC 上.

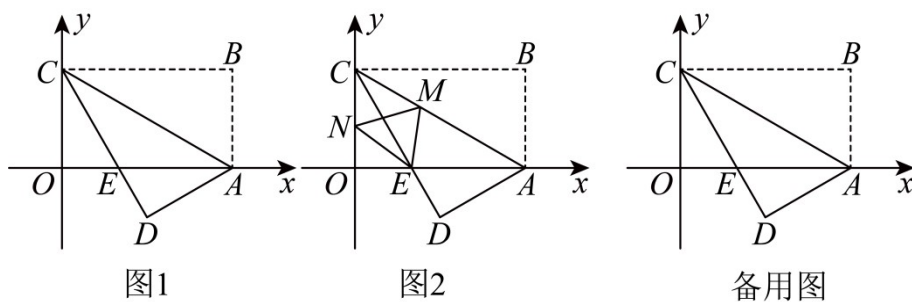


(1) 若 $\triangle OPD$ 的周长存在最小值，求 P 点坐标；

(4) 在线段 PB 上有一点 M ，且 $PM = 6$ ，四边形 $OAMP$ 的最小周长是_____.

【变式 2】 如图¹，在平面直角坐标系中有长方形 $OABC$ ，点 $C(0,4)$ ，将长方形 $OABC$ 沿 AC 折叠，使得点

B 落在点 D 处， CD 边交 x 轴于点 E ， $\angle OAC = 30^\circ$.



(1) 求点 D 的坐标；

(2) 如图 2，点 N 为 OC 的中点，在直线 AC 上是否存在点 M ，使得 $\triangle EMN$ 的周长最小？如果存在，求出 $\triangle EMN$ 周长的最小值；如果不存在，请说明理由；

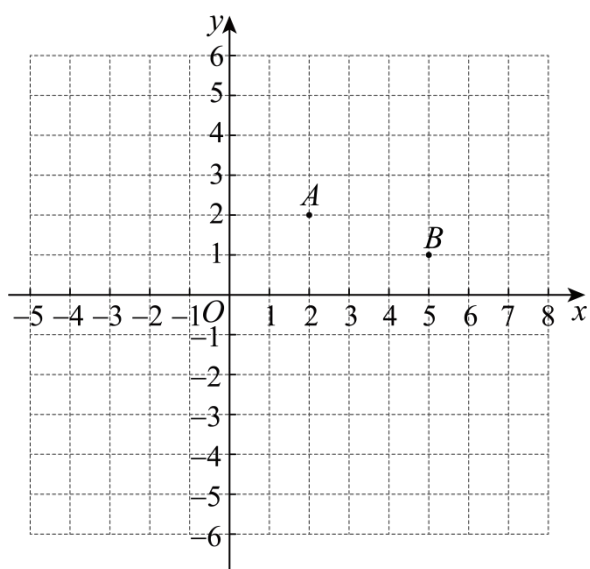
【变式 3】【问题背景】

如图，已知 A, B 两村庄的坐标分别为 $A(2, 2)$ ， $B(5, 1)$ ，一辆汽车在 x 轴上行驶，从原点 O 出发。

汽车行驶到 x 轴的某一点 P 时，请写出点 P 的坐标

(1) 汽车行驶到离 B 村最近的点 P 的坐标。

(2) 使 $PA - PB$ 的最大值，写出点 P 的坐标。



【变式4】 如图所示，点 $A(a, 0)$ ， $B(0, b)$ ，且 a, b 满足 $(a-1)^2 + |2b-2| = 0$ 。若 P 为 x 轴上异于原点 O 和

点 A 的一个动点，连接 PB ，以线段 PB 为边构造等腰直角 $\triangle BPE$ (P 为顶点)，连接 AE 。

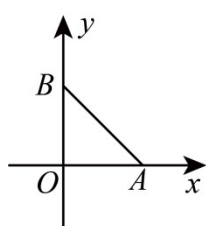


图1

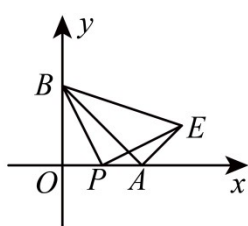


图2

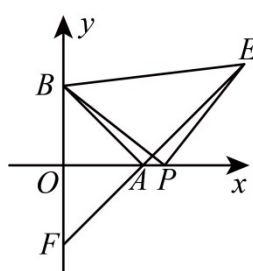


图3

(1) 如图1所示，直接写出点 A 的坐标为_，点 B 的坐标为_；

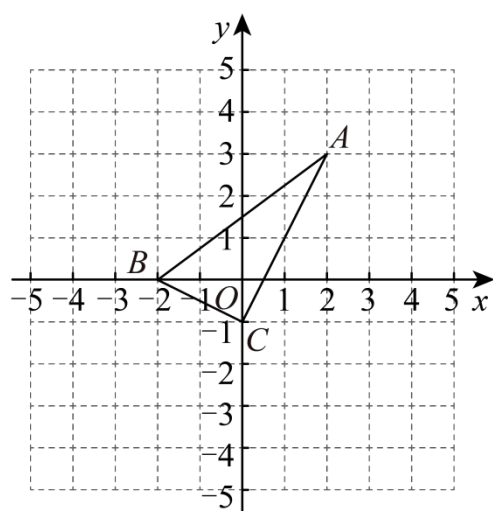
(2) 当点 P 的坐标为 $(3, 0)$ 时，求出点 E 的坐标；此时，连接 BE ， AE ， $\angle EAP =$ _度；

(3) 如图3所示，点 P 在 x 轴上运动过程中，若 AE 所在直线与 y 轴交于点 F ，请直接写出 F 点的坐标为_，

当 $OE + BE$ 的值最小时，请直接写出此时 OE 与 BE 之间的数量关系_。

题型强练

1. 如图，直角坐标系中的网格由单位为 1 的正方形构成。



(1) 写出 A 、 B 、 C 的坐标；

(2) 若以 A 、 B 、 C 及点 D 为顶点的四边形为 $\square ABCD$ ，画出 $\square ABCD$ ，并直接写出 D 点的坐标。

(3) 在 x 轴上是否存在一点 P ，使 $AP + DP$ 的值最小。若存在，请在图中找出这个点，请求出最小值；若不存在，请说明理由。

2. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 A 、 B 分别在 x 轴、 y 轴上， $OA = OB = 4$ ，点 C 在线段 OA 上，

$AC = 3$ ，过点 A 作 $AE \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 E ，直线 AE 交 y 轴于点 D 。

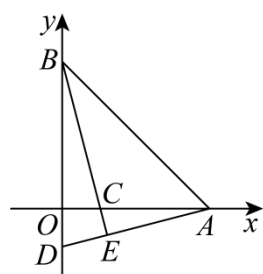


图1

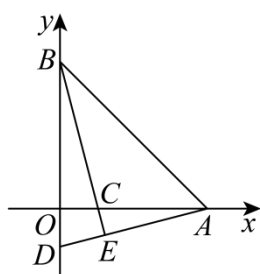


图2

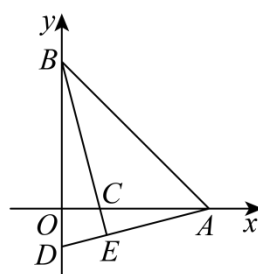


图3

(1) 求点 D 的坐标；

(2) 动点 P 从点 A 出发沿线段 AO 以每秒 1 个单位长度的速度向终点 O 运动，动点 Q 从点 B 出发沿折线

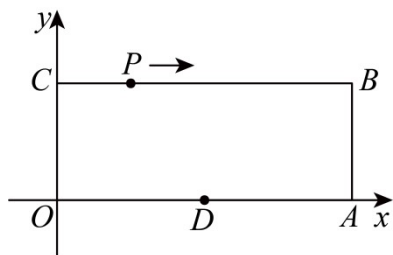
$B-O-x$ 轴负方向以每秒 4 个单位长度的速度运动． P 、 Q 两点同时出发，且点 P 到达点 O 处时， P 、 Q

两点同时停止运动．设点 P 的运动时间为 t 秒， $\triangle DPQ$ 的面积为 S ，请用含 t 的式子表示 S ．

(3) 在 (2) 的条件下，是否存在 t 值，使得 $\triangle DPQ$ 是以坐标轴为对称轴的等腰三角形？若存在，请求出符合条件的 t 值；若不存在，请说明理由．

3. 如图，平面直角坐标系中，点 O 为坐标原点，四边形 $OABC$ 为矩形， $A(10,0)$ ， $C(0,4)$ ，点 D 是 OA 的中

点，点 P 在边 BC 上以每秒 2 个单位长的速度由点 C 向点 B 运动，设运动时间为 t 秒．



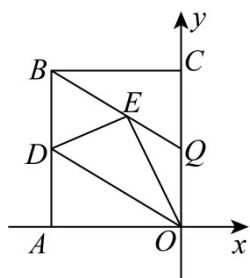
(1) 直接写出坐标： D (_____, _____)；

(2) 当四边形 $PODB$ 是平行四边形时，求 t 的值；

(3) 在平面直角坐标系内是否存在点 Q ，使得以 O, P, D, Q 为顶点四边形为菱形，若存在，请直接写出点 Q 坐标；若不存在，请说明理由．

4. 在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 O 、 A 、 C 的坐标分别为 $O(0,0)$ ， $A(-x,0)$ ， $C(0,y)$ ，且 x 、 y

满足 $y = \sqrt{x-4} + \sqrt{4-x} + 6$ 。



(1) 矩形的顶点 B 的坐标是_____；

(2) 若 D 是 AB 中点，沿 DO 折叠矩形 $OABC$ ，使 A 点落在点 E 处，折痕为 DO ，连接 BE 并延长 BE 交 y 轴于 Q 点。求证：四边形 $QODB$ 是平行四边形；

(3) 若点 M 在 y 轴上，则在坐标平面内，是否存在这样的点 N ，使得 A 、 C 、 N 、 M 为顶点的四边形是菱形？

若存在，请直接写出点 N 的坐标；若不存在，说明理由。