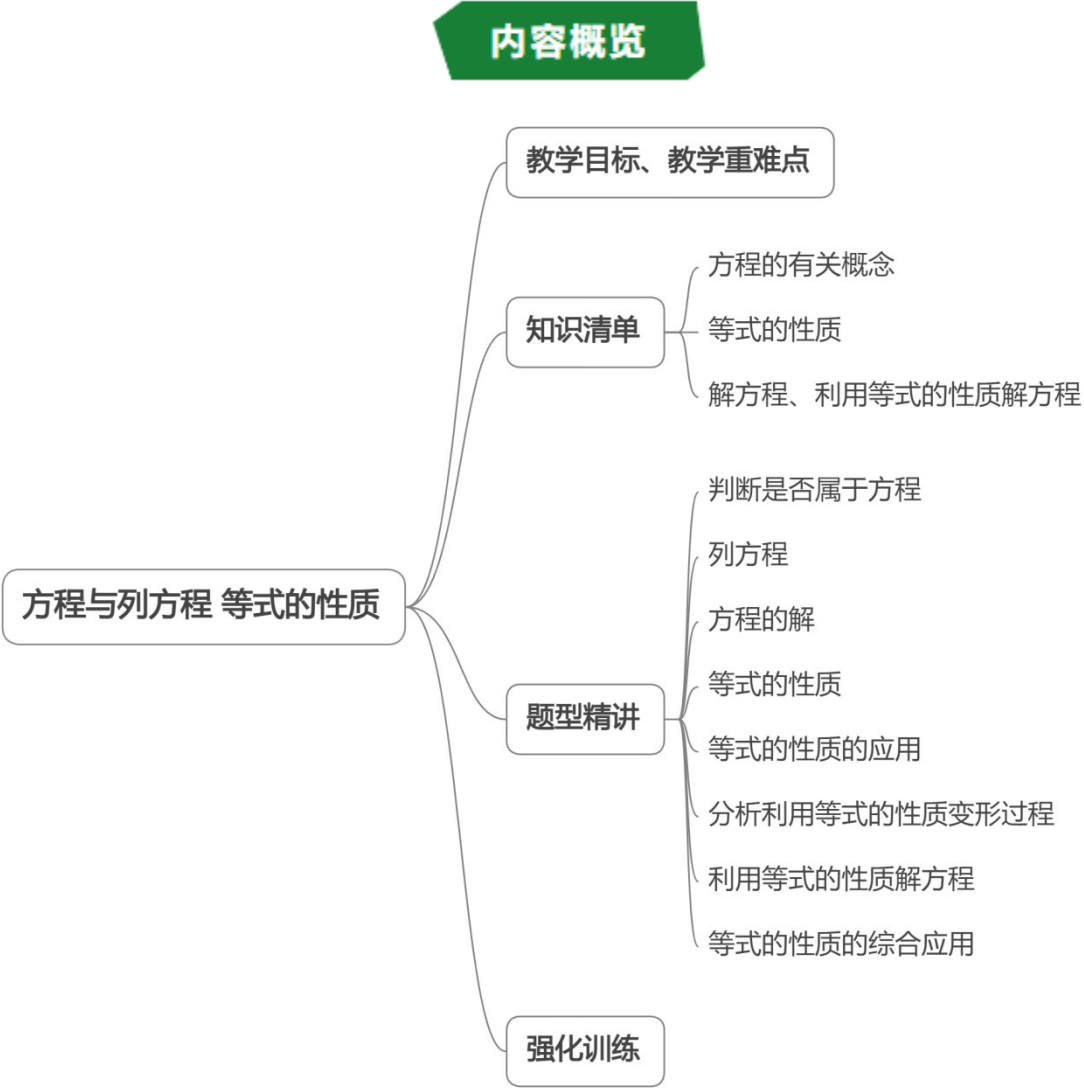


专题 3.1 方程与列方程 等式的性质



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 知道方程的概念、掌握列方程、方程的解； 2. 学会等式的性质及应用； 3. 解方程的概念、利用等式的性质解方程。
教学重难点	1.重点 (1) 判断是否属于方程；判断方程的解 (2) 等式的性质； (3) 用等式的性质解方程。

	2.难点 (1) 利用等式的性质的化简、变形、求值等； (2) 等式的性质的综合应用。
--	--

知识清单

知识点1 方程的有关概念

1. 定义：含有未知数的等式叫做方程。

要点：判断一个式子是不是方程，只需看两点：一.是等式；二.是含有未知数。

2. 方程的解：如果未知数所取的某个值能使方程左右两边的值相等，那么这个未知数的值叫作方程的解

要点：判断一个数（或一组数）是否是某方程的解，只需看两点：①.它（或它们）是方程中未知数的值；

②将它（或它们）分别代入方程的左边和右边，若左边等于右边，则它们是方程的解，否则不是。

3. 方程的两个特征：(1).方程是等式；(2).方程中必须含有字母（或未知数）。

【即学即练】

1. 下面不是方程的是（ ）

- A. $x = a + 6$ B. $5x + 0.6 > 9$ C. $1.2 \times 4 = 6x$ D. $2x = 0$

2. 下列各式：① $x = 0$ ；② $2x > 3$ ；③ $x^2 + x - 2 = 0$ ；④ $\frac{y}{x} + 2 = 0$ ；⑤ $3x - 2$ ；⑥ $x = x - 1$ ；⑦ $x - y = 0$ ；⑧

$xy = 4$ 。其中是方程的有（ ）

- A. 3个 B. 4个 C. 5个 D. 6个

3. 解为 $x = 2$ 的方程是（ ）

- A. $3x - 2x = 0$ B. $2x + 5 = 11$

- C. $4(3 - x) = 2x$ D. $\frac{x-1}{2} = \frac{3-x}{6}$

知识点2 等式的性质

1. 等式的概念：用符号“=”来表示相等关系的式子叫做等式。

知识引入：已知图 3-2-1 中(1)(3)的天平平衡。从图 3-2-1(1)到图 3-2-1(2)，天平左右两边的质量各发生了怎样的变化？天平的平衡状态有无变化？从图 3-2-1(3)到图 3-2-1(4)呢？

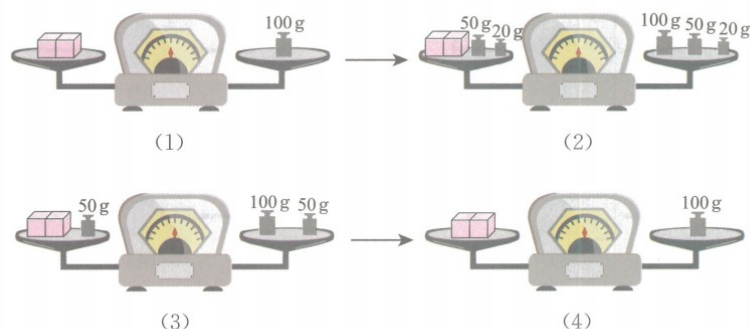


图 3-2-1

观察图 3-2-1(1)和图 3-2-1(2)可以发现，平衡的天平两边加上同样的砝码，天平仍保持平衡.

观察图 3-2-1(3)和图 3-2-1(4)可以发现，平衡的天平两边减去同样的砝码，天平也保持平衡.

等式就像平衡的天平，也具有同样的性质.

2. 等式的性质：

等式的性质 1：等式两边加（或减）同一个数（或式子），结果仍相等.即：

如果 $a = b$ ，那么 $a \pm c = b \pm c$ (c 为一个数或一个式子).

我们还能发现，平衡的天平两边物体的质量分别变为了原来的 2 倍，天平仍保持平衡.

平衡的天平两边物体的质量分别变为了原来的一半，天平也保持平衡.

等式的性质 2：等式两边乘同一个数，或除以同一个不为 0 的数，结果仍相等.即：

如果 $a = b$ ，那么 $ac = bc$ ；如果 $a = b (c \neq 0)$ ，那么 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

要点：

- (1) 根据等式的两条性质，对等式进行变形，等式两边必须同时进行完全相同的变形；
- (2) 等式的性质 2 中等式两边都除以同一个数时，这个除数不能为零.

【即学即练】

1. 下列运用等式的性质变形正确的是 ()

A. 若 $a = b$ ，则 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

B. 若 $a + b = b + a$ ，则 $a = b$

C. 若 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ ，则 $a = b$

D. 若 $ab = ac$ ，则 $b = c$

2. 下列变形错误的是 ()

A. 如果 $a = b$ ，那么 $ax = bx$

B. 如果 $x(a+1) = a+1$ ，那么 $x = 1$

C. 如果 $x = y$, 则 $x - 5 = -5 + y$

D. 如果 $(a^2 + 1)x = 1$, 则 $x = \frac{1}{a^2 + 1}$

3. 根据等式的性质填空：

(1) 如果 $x = y$, 那么 $x + 1 = y + \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 如果 $x = y$, 那么 $\underline{\hspace{2cm}} x = 5y$;

(3) 如果 $3x = 6y$, 那么 $x = \underline{\hspace{2cm}} y$.

知识点 3 解方程、利用等式的性质解方程

1. 我们可以用等式性质 1,求得方程 $(x+16)-17=11$ 的解.

合并同类项,得 $x-1=11$.

根据等式性质 1,在等式两边同加上 1,得

$$x-1+1=11+1.$$

解得 $x=12$.

2. 我们可以用等式性质 2,求得方程 $3y+y=152$ 的解.

合并同类项,得 $4y=152$.

根据等式性质 2,在等式两边同除以得

$$4y \div 4 = 152 \div 4.$$

解得 $y=38$.

以上求方程的解的过程叫作解方程.

【即学即练】

1. 利用等式的性质解方程,并检验:

(1) $8 + x = -5$;

(2) $4x = 16$;

(3) $3x - 4 = 11$.

2. 利用等式的基本性质解下列方程:

(1) $x - 3 = 6$;

$$(2) -\frac{1}{3}x = 6 ;$$

$$(3) 4x - 6 = -10 ;$$

$$(4) -\frac{1}{2}x + 3 = 4 .$$

题型精讲

题型 01 判断是否属于方程

【典例 1】 . 下列各式中，属于方程的是 ()

- A . $3 + (-1) = 2$ B . $x - 5 = 0$ C . $2x - 1$ D . $4 > 3 - 1$

【变式 1】 . 下列式子 () 是方程 .

- A . $a \div 0.3 < 2.8$ B . $n + 7$ C . $8x + 12 = 112$ D . $91.2 \div 0.57 = 160$

【变式 2】 . 下列式子中，是方程的是 ()

- ① $2x - 1 = 3$; ② $2 + 3 = 5$; ③ $5x - 8$; ④ $2x^2 - x + 1 = 0$; ⑤ $2x - y = 3$; ⑥ $2x^2 - 3x + 5$.

- A . ①②③ B . ①②④ C . ①③⑤ D . ①④⑤

题型 02 列方程

【典例 1】 . 设某数为 x ，“比某数的 $\frac{3}{5}$ 大 1 的数是 4”，可列方程为 ()

- A . $\frac{3}{5}x + 1 = 4$ B . $\frac{3}{5}(x - 1) = 4$

- C . $x \left[\frac{3}{5} + (-1) \right] = 4$ D . $\frac{3}{5}x - 1 = 4$

【变式 1】 . 下面等量关系中，可以用 $3x - 6 = 30$ 表示的是 ()

- A . 小芳买了 x 只水笔，每支 3 元，付给营业员 30 元，找回 6 元
B . 黑兔有 x 只，白兔有 30 只，黑兔比白兔的 3 倍多 6 只
C . 故事书有 x 本，科技书有 30 本，科技书比故事书多 6 本
D . 书法小组有 x 人，舞蹈小组有 30 人，舞蹈小组的人数比书法小组人数的 3 倍少 6 人

【变式2】 . 有一所寄宿制学校，开学安排宿舍，如果每间宿舍住4人，将会空出5间宿舍；如果每间宿舍住3人，就有100人没床位，设在学校住宿的学生有 x 人，下列方程正确的是（ ）

A . $\frac{x}{4} + 5 = \frac{x-100}{3}$

B . $\frac{x+5}{4} = \frac{x-100}{3}$

C . $\frac{x-5}{4} = \frac{x+100}{3}$

D . $\frac{x}{4} - 5 = \frac{x+100}{3}$

题型 03 方程的解

【典例1】 . 下列方程中，解是 $x = -\frac{1}{2}$ 的是（ ）

A . $3\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

B . $2x - (x+1) = 0$

C . $\frac{x-1}{3} = -\frac{1}{2}$

D . $\frac{1}{2}x + 1 = 0$

【变式1】 . 有一个方程的解为 $x = 3$ ，则这个方程是（ ）

A . $3x - 1 = 2$

B . $2x - 3 = -x$

C . $\frac{3}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{4}$

D . $(x-1)^2 = 4$

【变式1】 . 已知是 $x = 1$ 关于 x 的方程 $2x - a = 0$ 的解，则 a 的值为（ ）

A . 2

B . -2

C . 4

D . -4

【变式2】 . 若 $x = 3$ 是关于 x 的方程 $a - 2b - 2x = 0$ 的解，则代数式 $2a - 4b + 1$ 的值为（ ）

A . 7

B . 11

C . 12

D . 13

题型 04 等式的性质

【典例1】 . 下列变形中，正确的是（ ）

A . 若 $ac = bc$ ，那么 $a = b$

B . 若 $a = b$ ，那么 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

C . $|a| = |b|$ ，那么 $a = b$

D . 若 $a = b$ ，那么 $a^2 = b^2$

【变式1】 . 如果 $a = b$ ，根据等式的性质填空 .

$a + 5 = b + \underline{\hspace{2cm}}$

$a - \underline{\hspace{2cm}} = b - m$

$a \times \frac{1}{5} = b \times \underline{\hspace{2cm}}$

$a \div \underline{\hspace{2cm}} = b \div 0.5$

【变式2】 . 在括号里填上合适的算式 .

(1) 如果 $x = 12$ ，那么 $x + 12 =$ ()

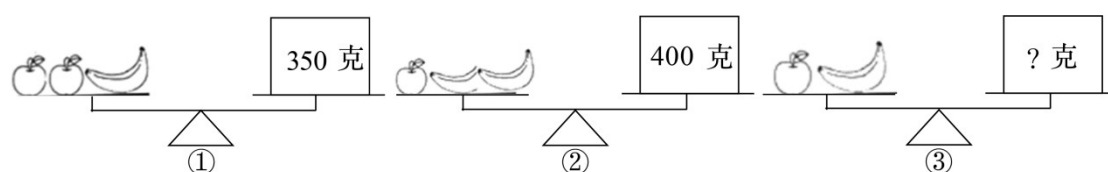
(2) 如果 $4x + 5 = 29$ ，那么 $4x =$ ()

(3) 如果 $5x \times 3 = 27$ ，那么 $5x =$ ()

(4) 如果 $2x \div 6 = 18$ ，那么 $2x =$ ()

题型 05 等式的性质的应用

【典例 1】 如图，在天平上放若干苹果和香蕉，其中①②的天平保持平衡，现要使③中的天平也保持平衡，需要在天平右盘中放入砝码 ()



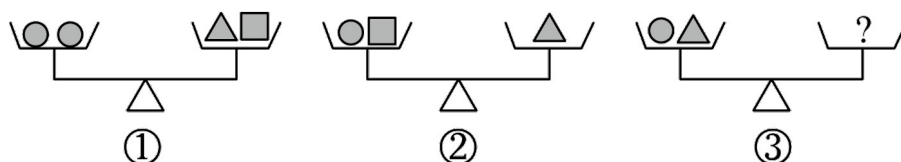
A . 350 克

B . 300 克

C . 250 克

D . 200 克

【变式 1】 如图，●，■，▲分别表示三种不同的物体，前两架天平保持平衡，如果要使第三架天平也保持平衡，那么第三架天平的右边应放的物体是 ()



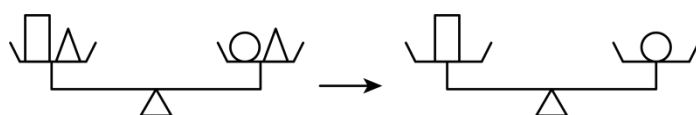
A . ■■

B . ■■■

C . ■■■■

D . ■■■■■

【变式 2】 用“□”“△”“○”表示三种不同的物体，现用天平称了两次，情况如图所示．设 a, b, c 均为正数，则能正确表示天平从左到右变化过程的等式变形为 ()



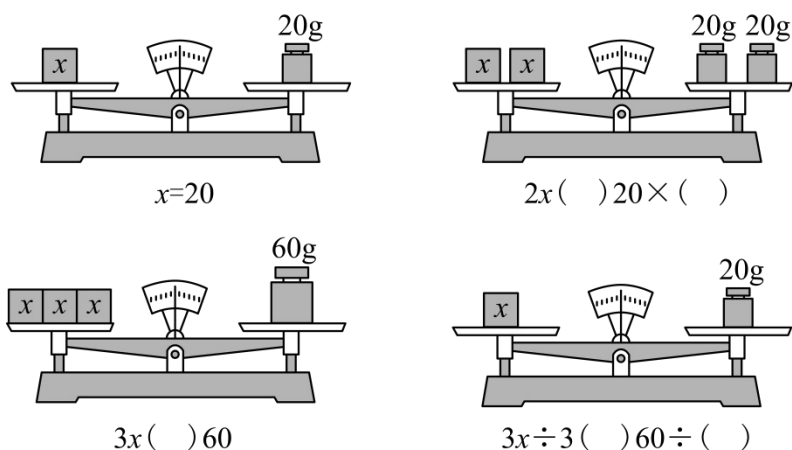
A . 如果 $a + c = b + c$ ，那么 $a = b$

B . 如果 $a = b$ ，那么 $a + c = b + c$

C . 如果 $2a = 2b$ ，那么 $a = b$

D . 如果 $a = b$ ，那么 $2a = 2b$

【变式 3】 仔细观察如图：



(1) 填一填 .

(2) 说一说，你发现什么？

题型 06 分析利用等式的性质变形过程

【典例 1】 . 在将等式 $3a - 2b = 2a - 2b$ 变形时，小明的变形过程如下：

因为 $3a - 2b = 2a - 2b$ ，所以 $3a = 2a$ ，（ 第一步 ）

所以 $3 = 2$. （ 第二步 ）

(1) 上述过程中，第一步的依据是什么？

(2) 小明第二步的结论正确吗？如果不正确，请说明原因，并改正 .

【变式 1】 . 小明在学习了等式的基本性质后，对等式 $5m - 2 = 3m - 2$ 进行变形，得出“ $5 = 3$ ”的错误结论，但他找不到错误原因，聪明的你能帮助他找到原因吗？小明的具体过程如表所示：

将等式 $5m - 2 = 3m - 2$ 变形

两边同时加 2，得 $5m = 3m$ （ 第①步 ）

两边同时除以 m ，得 $5 = 3$ （ 第②步 ）

(1) 第——步等式变形产生错误；

(2) 请分析产生错误的原因，写出等式正确变形过程，求出 m 的值 .

题型 07 利用等式的性质解方程

【典例 1】 . 利用等式的性质解下列方程：

(1) $x + 4 = 19$ ；

$$(2) -\frac{1}{2}x - 3 = 5 .$$

【变式 1】 . 利用等式性质解下列方程

$$(1) x - 5 = 29 ;$$

$$(2) 0.2x = 15 ;$$

$$(3) \frac{1}{2}x + 2 = 5 ;$$

$$(4) 4x - 2 = 6 .$$

【变式 2】 . 利用等式的性质解下列方程：

$$(1) -4 + 5x = 2x - 5 ;$$

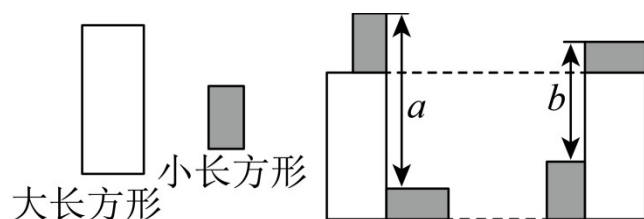
$$(2) -\frac{n}{3} - 2 = 10 ;$$

$$(3) 2x = 5x - 6 ;$$

$$(4) 3x - 6 = -31 - 2x .$$

题型 08 等式的性质的综合应用

【典例 1】 . 如图，有四个大小相同的小长方形和两个大小相同的大长方形如图位置摆放，按照图中所示尺寸，则小长方形长与宽的差是 ()



- A . $3b - 2a$ B . $2a - b$ C . $\frac{a}{3} - \frac{b}{4}$ D . $\frac{a-b}{2}$

【变式 1】 . 如图 1 . 在一块长方形区域中布置了图中阴影部分所示的展区，其中的展台有三种不同的形状，其规格如图 2 所示 . 若 $4b - c = 4$ ，该长方形区域的长为_____ .

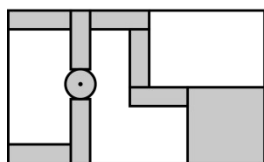


图1

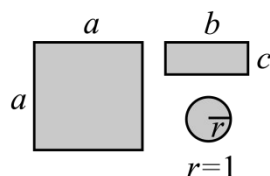


图2

【变式2】“幻方”最早记载于春秋时期的《大戴礼记》中，如图¹所示，每个三角形的三个顶点上的数字之和都与中间正方形四个顶点上的数字之和相等，现将 -4 ， -2 ， -1 ， 2 ， 3 ， 4 ， 6 ， 7 填入如图²所示的“幻方”中，部分数据已填入，则 $(d-c)^{a+b}$ 的值为_____。

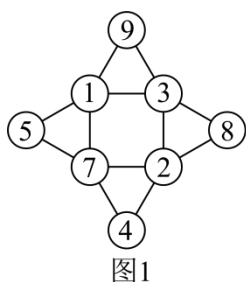


图1

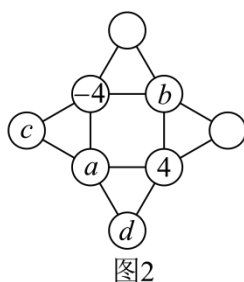


图2

强化训练

一、单选题

1. 下列各式中，不是方程的是 ()

A. $3+2y=5$

B. $-6+4=-2$

C. $2x^2-1=0$

D. $xy=5$

2. 下列说法不一定成立的是 ()

A. 若 $a=b$ ，则 $a-3=b-3$

B. 若 $a=b$ ，则 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$

C. 若 $3a=2b$ ，则 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$

D. 若 $a=3$ ，则 $a^2=3a$

3. $x=-1$ 是下列哪个方程的解 ()

A. $x-5=6$

B. $\frac{1}{2}x+2=6$

C. $3x+1=4$

D. $4x+4=0$

4. 在下列方程的变形中，正确的是 ()

A. 由 $2x+1=3x$ ，得 $2x+3x=1$

B. 由 $\frac{2}{5}x=\frac{3}{4}$ ，得 $x=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$

C. 由 $2x = \frac{3}{4}$, 得 $x = \frac{3}{2}$

D. 由 $\frac{x+1}{3} = 2$, 得 $x+1 = 6$

5. 下列各式中, 变形正确的是 ()

A. 若 $a = b$, 则 $a + c = b + c$

B. 若 $(a-1)x = 2$, 则 $x = \frac{2}{a-1}$

C. 若 $a = 2b$, 则 $a = 4b$

D. 若 $a = b+1$, 则 $2a = 2b+1$

6. 下列运用等式性质进行的变形, 正确的是 ()

A. 如果 $a = b$, 那么 $a + c = b - c$

B. 如果 $a^2 = 3a$, 那么 $a = 3$

C. 如果 $a = b$, 那么 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

D. 如果 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, 那么 $a = b$

7. 在方程 $6x+1=1$, $2x=\frac{2}{3}$, $7x-1=x-1$, $5x=2-x$ 中, 解为 $\frac{1}{3}$ 的方程个数是 () .

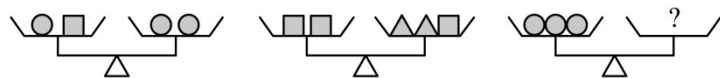
A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

8. 假设“ $\triangle$ ”、“ $\circ$ ”、“ $\square$ ”分别表示三种不同的物体. 如图, 前两架天平保持平衡, 要使第三架天平也保持平衡, 则“?”处应放 $\triangle$ 的个数是 ()



A. 4个

B. 5个

C. 6个

D. 7个

9. 已知 $x = -1$ 是方程 $ax+1 = bx-4$ 的解, 则 $-3a+5b-2(b-5)$ 的值是 ()

A. 5

B. -5

C. -10

D. 10

10. 已知关于 x 的方程 $(5a+14b)x+6=0$ 无解, 则 ab 是 ()

A. 正数

B. 非负数

C. 负数

D. 非正数

二、填空题

11. 如果 $a-3 = b-2$, 那么 $a =$ _____ , 根据等式的性质 _____ , 在等式两边都 _____ .

12. 下列各式中, 是方程的是 _____ (填序号) .

① $3x-2 = x-1$ ② $1+2 = 3$ ③ $x^2 + 2x - 1$ ④ $2x+1 = y$

13. 用适当的数或式子填空, 使所得结果仍是等式, 并说明变形是根据等式的哪一条性质以及怎样变形的?

(1) 若 $3x+5=8$, 则 $3x=8-$ __ ;

(2) 若 $-4x=\frac{1}{4}$, 则 $x=$ ____ ;

(3) 若 $2m-3n=7$, 则 $2m=7+$ __ ;

(4) 若 $\frac{1}{3}x+4=6$, 则 $x+12=$ __

14. 根据等式的性质填空 :

(1) 若 $m=n$, 则 $m+p=$ _____ .

(2) 若 $a=b$, 则 $a-b=$ _____ .

(3) 若 $m=n$, 则 _____ $= -\frac{2}{3}n$.

(4) 若 $a \neq 0$, $ax=b$, 则 $x=$ _____ .

15. $x=1$ 是方程 $kx-1=0$ 的解 , 则 $k=$ _____ .

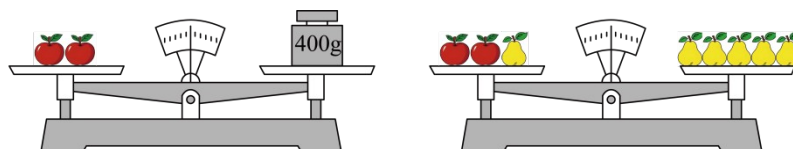
16. 在等式 $4x-7=3x+5$ 的两边同时减去一个一次式可以得到等式 $x=12$, 则这个一次式为_____ .

17. 学数学要知其然 , 更要知其所以然 , 以下三个数学基本事实应用特别广泛 :

- A. 等式的性质

B. 等量的等量相等

C. 总量等于分量加分量



琪琪在解决如图时有如下思考 , 她应用了哪个数学事实 , 请将序号填写在下面括号内 .

因为 2 个苹果 + 1 个梨 = 5 个梨

所以 2 个苹果 = 4 个梨..... ()

因为 2 个苹果 = 400 克 2 个苹果 = 4 个梨

所以 4 个梨 = 400 克..... ()

18. 若 a, b 为常数 , 无论 k 为何值时 , 关于 x 的一元一次方程 $(b+1)x=12-4ka$, 它的解总是 1 , 则 a, b 的值分别是_____ .

三、解答题

19. 判断下列各式是不是方程 , 是的打“√” , 不是的打“×”并说明原因 .

(1) $-2 + 5 = 3$ () ; (2) $3x - 2 = 7$ ()

(3) $m = 5$ () ; (4) $x > 4$ ()

(5) $x + y = 6$ () ; (6) $2x^2 - 5x + 1 = 0$ ()

(7) $2a + b$ () ; (8) $x = 3$ ()

20. $x = 3, x = 0, x = -2$, 各是下列哪个方程的解 ?

(1) $5x + 7 = 7 - 2x$;

(2) $6x - 8 = 8x - 4$;

(3) $3x - 2 = 4 + x$.

21. 利用等式的性质解下列方程 :

(1) $4 + 3x = 11$; (2) $5y - 6 = 3y + 2$;

(3) $\frac{4}{9}y - \frac{5}{6} = 1\frac{2}{3}$; (4) $-8y = 9 - 5y$.

22. 按要求列方程 (不要求解)

(1) 一个方程的解为 $x = 2$, 请写出一个符合条件的方程

(2) 根据“ x 的 3 倍与 5 的和比 x 的 $\frac{1}{2}$ 少 3”列出方程

23. 小明研究规律方程的时候遇到了下面一组方程 :

① $\frac{x}{4} + \frac{x-1}{2} = 1$;

② $\frac{x}{6} + \frac{x-2}{2} = 1$;

③ $\frac{x}{8} + \frac{x-3}{2} = 1$;

④...

(1) 请聪明的你帮小明写出一条这组规律方程的信息 ;

(2) 小明通过计算发现, 第一个方程的解是 $x = 2$, 第二个方程的解为 $x = 3$, 因此他就大胆地推测出第三个方程的解为 $x = 4$, 并写出了第四个方程. 请你验证一下小明的推测是否正确, 如果正确, 请你写出验证过程, 并写出第四个方程; 如果不正确, 请说明理由;

(³) 你能根据以上解决问题的经验直接写出符合上述规律，解为 $x = n$ (n 为正整数，且 $n \geq 2$) 的方程吗？