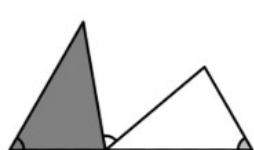


专题 02 全等三角形的三大经典模型

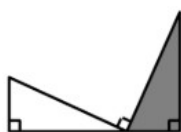
题型归纳

题型一：一线三等角模型

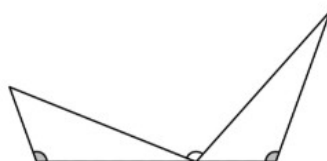
(1) 三等角在直线同侧，如下图



锐角

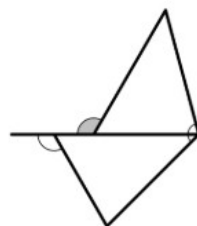
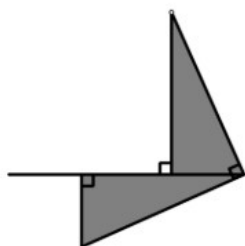
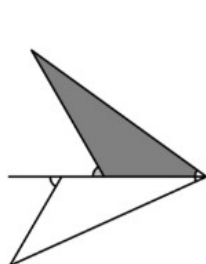


直角

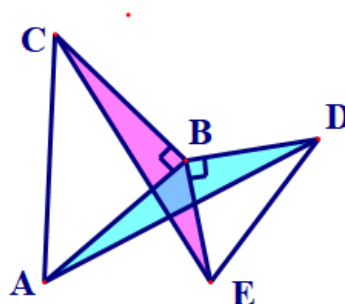
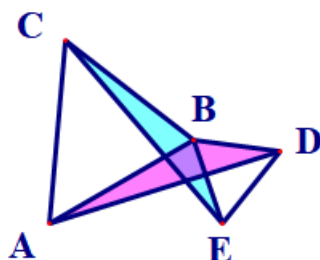
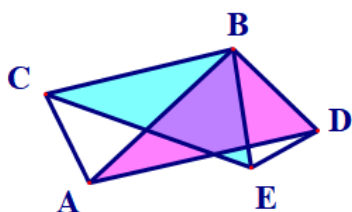


钝角

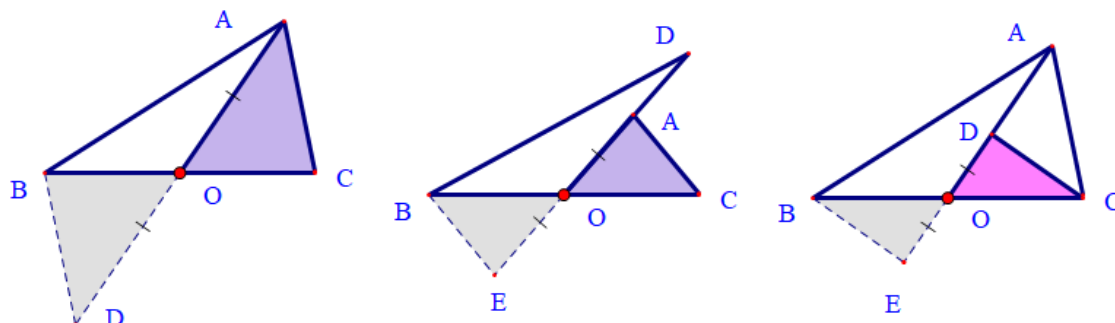
(2) 三等角在直线异侧，如下图



题型二：手拉手模型



题型三：倍长中线型



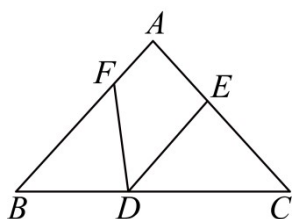
题型专练

题型 01 一线三等角

“一线三等角”是一个常见的几何模型，指的是有三个等角的顶点在同一条直线上构成的几何图形，这个角可以是直角，也可以是锐角或钝角。这个模型通常可以构造全等来证明图形之间的关系。不同地区对此有不同的称呼，“K形图”，“三垂直”等，以下称为“一线三等角”。

【典例1】 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \angle C$ ，点 D 、 E 、 F 分别在边 BC 、 AC 、 AB 上，且 $DF = ED$ ，

$\angle FDE = \angle B$ 。求证： $BD = CE$ 。

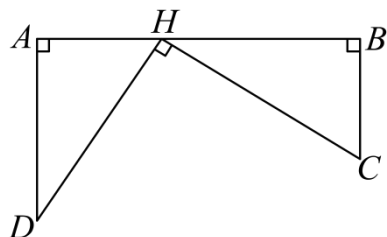


【变式1】 公路上 A 、 B 两车站相距 5 千米， C 、 D 为公路同侧的两所学校， $DA \perp AB$ ， $CB \perp AB$ ，垂足

分别为点 A 、 B （如图所示）， $DA = 3$ 千米。现要在公路 AB 上建一报亭 H （ $AH < BH$ ），使得 C 、 D 两所

学校到 H 的距离相等，且 $\angle DHC = 90^\circ$ ，问：报亭 H 应建在距离 B 站多远处？学校 C 到公路的距离是多少

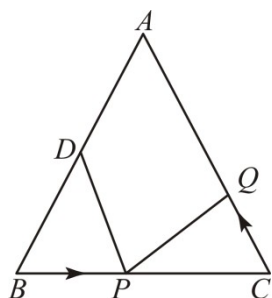
千米？



【变式2】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 24$ 厘米， $BC = 18$ 厘米，且 $\angle B = \angle C$ ，点 D 为 AB 的中点．如

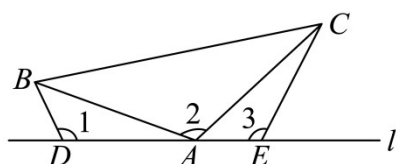
果点 P 在线段 BC 上以 v 厘米/秒的速度由 B 点向 C 点运动，同时，点 Q 在线段 CA 上由 C 点向 A 点运动．

若点 Q 的运动速度为 4 厘米/秒，则当 $\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等时， v 的值为_____．



【变式3】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 、 A 、 E 三点在直线 l 上， $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ ，求证：

$$DE = BD + CE$$



证明： $\because \angle BAE = \angle 1 + \angle$ _____

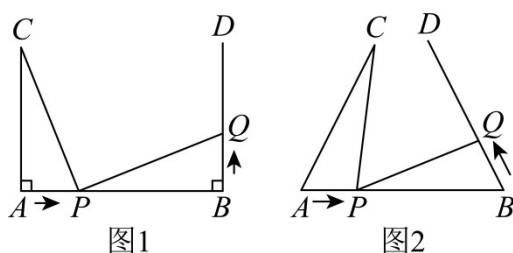
即 $\angle 2 + \angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle 1 + \angle \underline{\hspace{1cm}}$

又 $\because \angle 2 = \angle 1$

$\therefore \angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle \underline{\hspace{1cm}}$

(请继续完成证明过程)

【变式 4】 如图 1, $AB = 10\text{cm}$, $AC \perp AB$, $BD \perp AB$, 垂足分别为 A 、 B , $AC = 7\text{cm}$. 点 P 在线段 AB 上以 3cm/s 的速度由点 A 向点 B 运动, 同时点 Q 从点 B 出发在射线 BD 上运动, 它们运动的时间为 $t(\text{s})$ (当点 P 运动结束时, 点 Q 运动随之结束) .



(1) 若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度相等, 当 $t = 1$ 时, $\triangle ACP$ 与 $\triangle BPQ$ 是否全等? 此时线段 PC 和线段 PQ 有怎样的位置关系? 请分别说明理由;

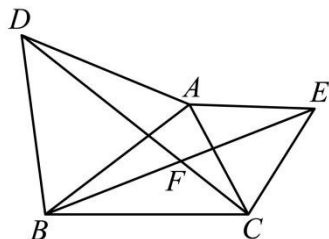
(2) 如图 2, 若“ $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ ”改为“ $\angle CAB = \angle DBA$ ”, 点 Q 的运动速度为 $x\text{cm/s}$, 其他条件不变, 当 $\triangle ACP$ 与 $\triangle BPQ$ 全等时, 求出相应的 x 与 t 的值.

题型 02 手拉手图形

“手拉手”模型是指两个等腰三角形共顶点且顶角相等的, 如果把等腰三角形顶角看作“头”, 左底角看作“左手”, 右底角看作“右手”, 则可以描述成: **头对头, 左手拉左手, 右手拉右手**, 这也正是手拉手模型名称的由来。

【典例 1】 如图， A, B, C 三点不共线， $\triangle ABD$ 和 $\triangle AEC$ 都是等边三角形，且 $\angle DAB = \angle CAE = 60^\circ$ ， CD 与

BE 交于点 F 。

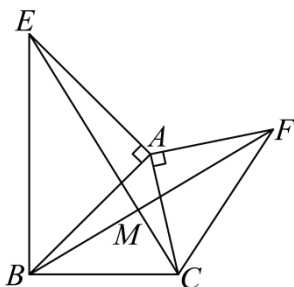


(1) $\triangle ACD$ 可以看作是由 $\triangle AEB$ 旋转得到，其旋转中心是_点，旋转方向是_时针。旋转角（小于平角）的度

数是_；

(2) 请你求出 $\angle CFE$ 的度数。

【变式 1】 如图，已知 $AE \perp AB, AF \perp AC, AE = AB, AF = AC$ ， BF 与 CE 相交于点 M 。

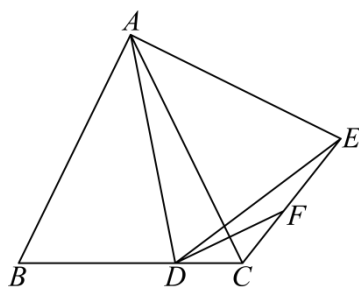


(1) 求证： $EC = BF$ ；

(2) 求证： $EC \perp BF$ 。

【变式 2】 如图，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中， $AB = AC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE, \angle ABC = \angle ACB$ ，点 D 在 BC

上，连接 CE 。



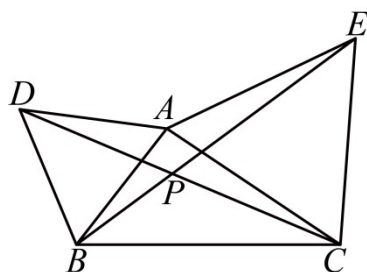
(1) $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 吗？请说明理由；

(2) 若 $DF \perp AC$ ，点 F 在线段 CE 上，且 $CF = 2$ ， $FE = 3$ ，求 BC 的长。

【变式3】 如图， $\triangle ABC$ 为任意三角形，以边 AB ， AC 为边分别向外作等边三角形 ABD 和等边三角形

ACE ，且 $\angle DAB = \angle CAE = 60^\circ$ 连接 CD ， BE 并且相交于点 P 。

求证：

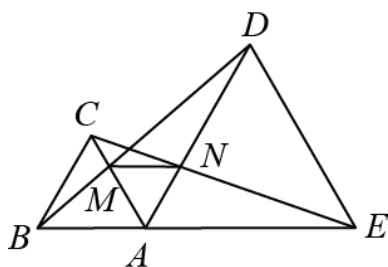


(1) $CD = BE$ ；

(2) $\angle BPC = 120^\circ$ 。

【变式4】 如图所示， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形且 $\angle BAC = \angle DAE = 60^\circ$ ，且点 B 、 A 、 E 在同一直线上，

连接 BD 交 AC 于 M ，连接 CE 交 AD 于 N ，连接 MN 。



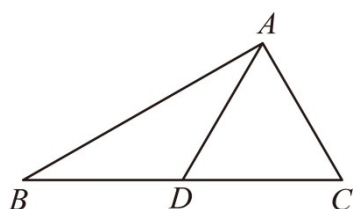
(1) 求证： $BD=CE$ ；

(2) 求证： $\triangle ABM \cong \triangle ACN$ ；

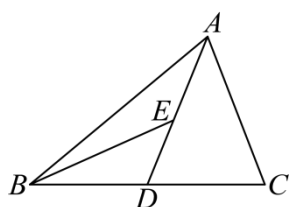
题型 03 倍长中线

“倍长中线”模型是指加倍延长三角形的中线，或延长以中点为端点的线段。通常会出现含有被中点平分的线段及延伸得到的对顶角组成的全等三角形，实现边或角的转化，倍长中线是平面几何里一种常用的辅助线。

【典例 1】 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $AB=4$ ， $AC=3$ ， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，求 AD 的取值范围。

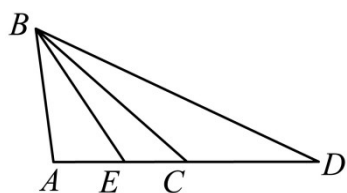


【变式 1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是中线， E 是 AD 上一点，且 $\angle BED = \angle DAC$ 。求证： $BE = AC$ 。



【变式 2】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = \angle ACB$ ， BE 是 AC 的中线，点 D 在 AC 的延长线上，连接 BD ，若

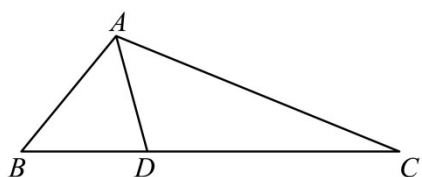
$$\angle ABE = \angle D$$



(1) 猜想 $BD = \underline{\hspace{2cm}} BE$;

(2) 完成 (1) 的证明过程 .

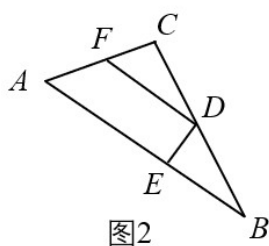
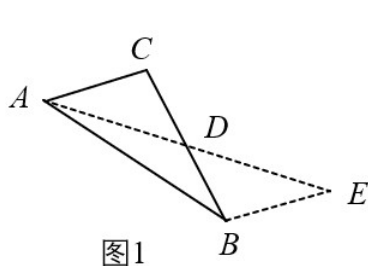
【变式3】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 2AB$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ，延长 CB 到点 E ，使 $BE = BD$ ，连接 AE .



(1) 依题意补全图形；

(2) 试判断 AE 与 CD 的数量关系，并进行证明 .

【变式4】 阅读理解：



(1) 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB = 10$ ， $AC = 6$ ，求 BC 边上的中线 AD 的取值范围 . 解决此问题可以用

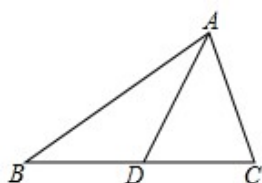
如下方法：延长 AD 到点 E ，使得 $AD = DE$ ，再连接 BE ，把 AB ， AC ， $2AD$ 集中在 $\triangle ABE$ 中，利用三角

形三边关系即可判断中线 AD 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 解决问题：如图2，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 边上的中点， $DE \perp DF$ ， DE 交 AB 于点 E ， DF 交 AC 于点 F ，连接 EF ，求证： $BE + CF > EF$ 。

题型强练

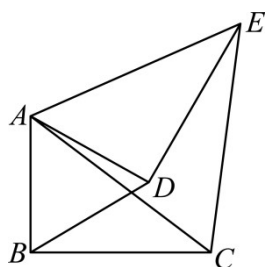
1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=8$ ， $AC=5$ ， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，则 AD 的取值范围是（ ）



- A. $3 < AD < 13$ B. $1.5 < AD < 6.5$ C. $2.5 < AD < 7.5$ D. $10 < AD < 16$

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，分别以 AB ， AC 为边作等边 $\triangle ABD$ 和等边 $\triangle ACE$ ，且 $\angle BAD = \angle CAE = 60^\circ$ ，连结 DE ，

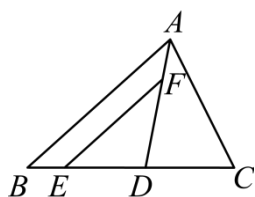
若 $AB=3$ ， $BC=4$ ， $AC=5$ ，则 $ED=$ _____



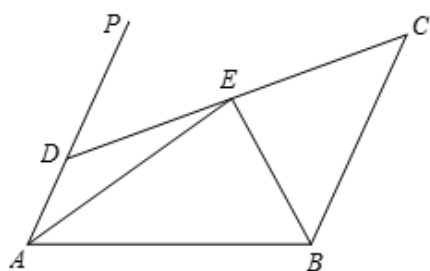
3. 三角形 ABC 中， $AB=6$ ， $AC=4$ ， AD 是 BC 边上的中线，求 AD 的取值范围。

4. 如图所示， AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线， E, F 分别在 BD, AD 上， $DC = DE$ ，若 $EF \parallel AB$ 。

求证： $EF = AC$ 。

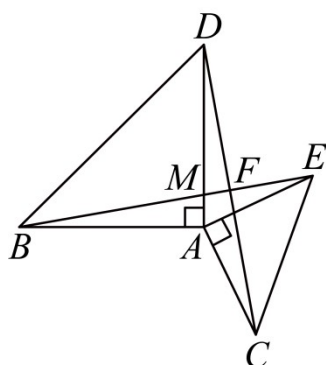


5. 如图，已知 $AP \parallel BC$ ，点 E 是 DC 的中点，且 $AD + BC = AB$ ，求证： $AE \perp BE$ 。

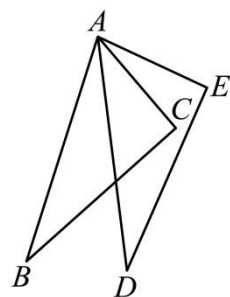


6. 已知：如图， $\triangle ABD$ 和 $\triangle AEC$ 都是等腰直角三角形， $AB = AD$ ， $AC = AE$ ， $\angle BAD = \angle CAE = 90^\circ$ ，连结

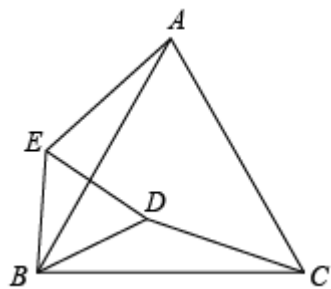
CD ， BE 相交于点 F ， AD 与 BE 相交于点 M 。求证： $BE \perp CD$ 。



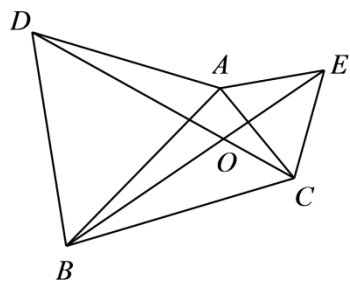
7. 如图，已知 $\angle BAD = \angle CAE$ ， $AB = AD$ ， $AC = AE$ ，求证： $\angle B = \angle D$ 。



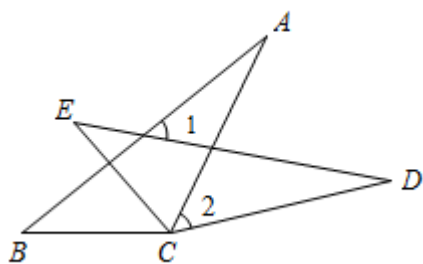
8. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle EBD$ 都是等边三角形，且 $\angle ABC = \angle EBD = 60^\circ$ ，连接 AE ， CD 。求证： $AE = CD$ 。



9. 如图，若 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 都是等边三角形，且 $\angle CAE = \angle DAB = 60^\circ$ ，求 $\angle BOC$ 的度数。



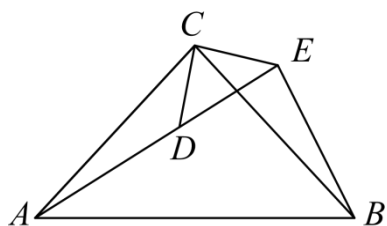
10. 如图， $AC = DC$ ， $AB = DE$ ， $CB = CE$ 。求证： $\angle 1 = \angle 2$ 。



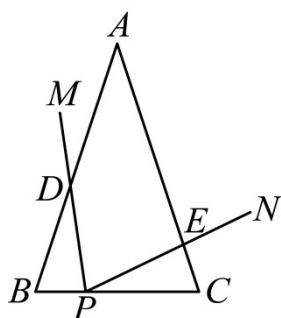
11. 如图， $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等腰三角形， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ，点 A ， D ， E 在同一条直线上，连接 BE 。

(1) 求证： $AD = BE$ ；

(2) $\angle AEB = 90^\circ$ 。



12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \angle C$ ， P 为 BC 上一点，以点 P 为顶点作 $\angle MPN = \angle B$ ， PM 交 AB 于 D ， PN 交 AC 于 E ，若 $BC = 13$ ， $BP = CE = 4$ ，求 BD 的长。



13. 在直线 m 上依次取互不重合的三个点 D, A, E ，在直线 m 上方有 $AB = AC$ ，且满足 $\angle BDA = \angle AEC = \angle BAC = \theta$ 。

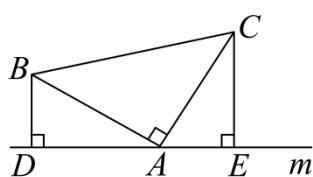


图1

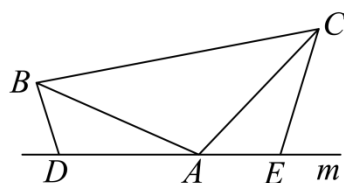


图2

- (1) 如图 1，当 $\theta = 90^\circ$ 时，猜想线段 DE, BD, CE 之间的数量关系是？
- (2) 如图 2，当 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 时，问题 (1) 中结论是否仍然成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由。

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， $BE \perp CE$ 于点 E ， $AD \perp CE$ 于点 D 。问 $\triangle BEC$ 与 $\triangle CDA$

全等吗？请说明理由。

