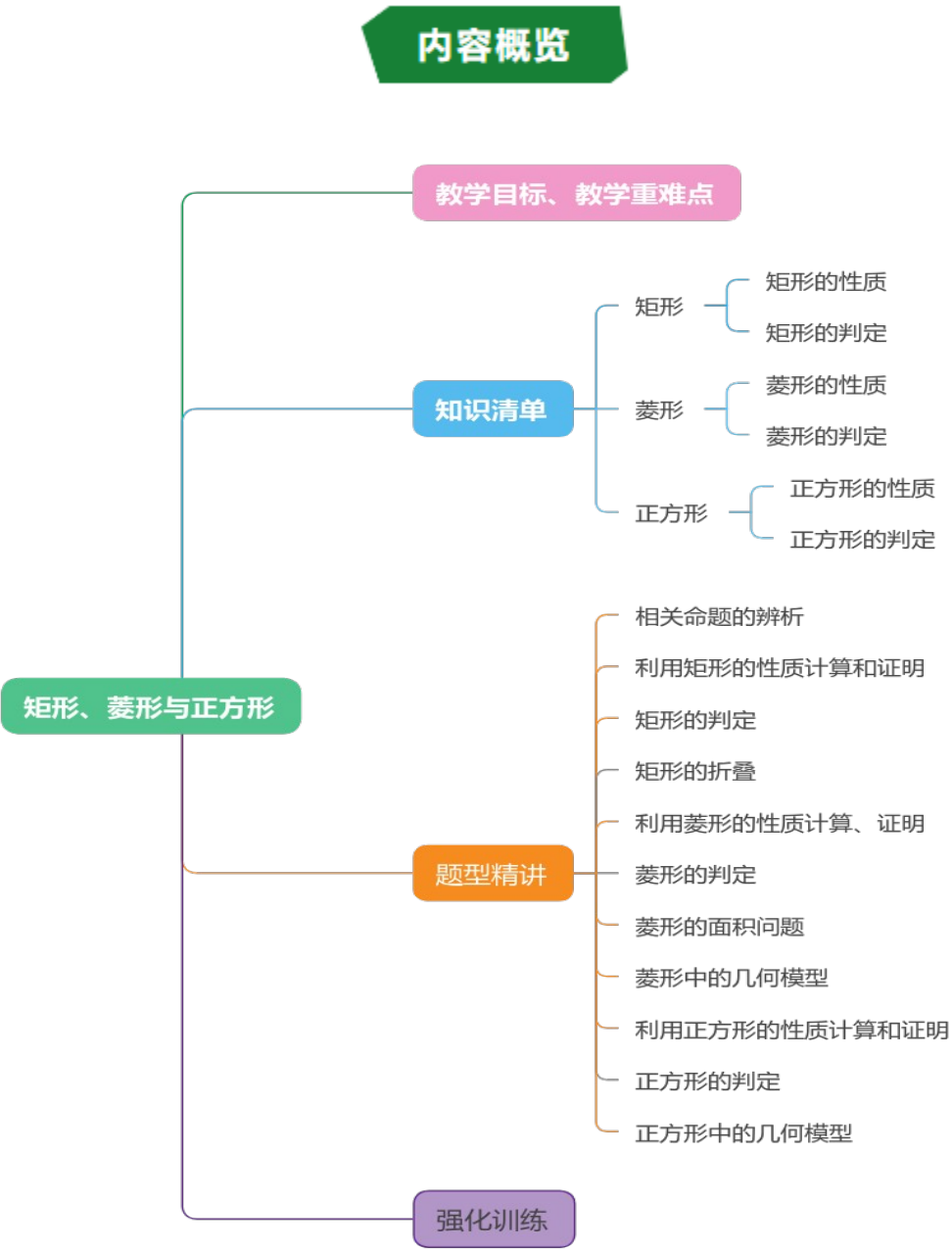


专题 23.3 矩形、菱形与正方形



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 掌握矩形、菱形、正方形的定义、性质及判定定理，能从边、角、对角线、对称性四个维度梳理其特征； 2. 理解三种图形与平行四边形的从属关系，能准确表述包含与特殊化逻辑；
------	---

	3. 会运用性质与判定进行相关证明、计算（如边长、对角线、面积）及图形识别。
教学重难点	1.重点 （1）矩形、菱形、正方形的定义、核心性质与三种图形的判定定理； （2）特殊平行四边形与平行四边形的从属关系，构建知识体系。 2.难点 性质与判定的灵活综合运用。

知识清单

（一）矩形

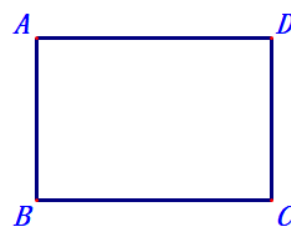
知识点 01 矩形的定义

1. 定义 四个内角都是_____的四边形叫作**矩形**。

【即学即练】

如右图，在矩形 ABCD 中， $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

求证：四边形 ABCD 是平行四边形



2. 矩形与平行四边形的关系

由上题可知矩形是一种特殊的平行四边形。



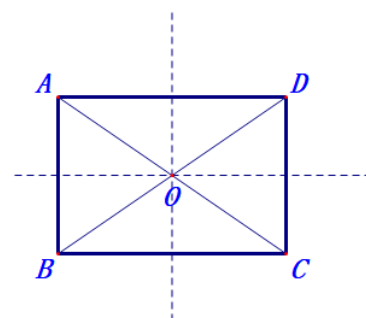
知识点 02 矩形的性质

矩形是一种特殊的平行四边形，所以它具有平行四边形的所有性质，结合矩形的定义，我们可以从边、角、对角线三个角度思考，能得到矩形如下的一些**特殊**性质：

1. 定理 矩形的两条对角线_____

2. 矩形既是中心对称又是轴对称图形

矩形的对称中心是_____，它有_____条对称轴，分别是_____。



【即学即练】

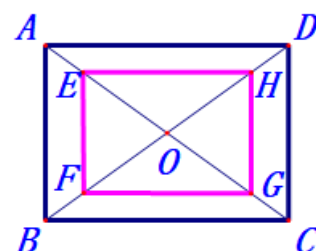
在矩形 ABCD 中，对角线 AC、BD 交于点 O，
且 $\angle AOD = 120^\circ$ ， $AB = 4\text{cm}$ ，求矩形的面积。

知识点 03 矩形的判定

1. 根据定义四个内角_____的四边形就是**矩形**。
2. 判定定理 1：有一个内角是_____的平行四边形是**矩形**。
3. 判定定理 2：对角线_____的平行四边形是**矩形**。

【即学即练】

如图，矩形 ABCD 的对角线 AC、BD 交于点 O，
点 E、F、G、H 分别在对角线上，且 $AE = BF = CG = DH$ ，
求证：四边形 EFGH 是一个矩形。



(二) 菱形

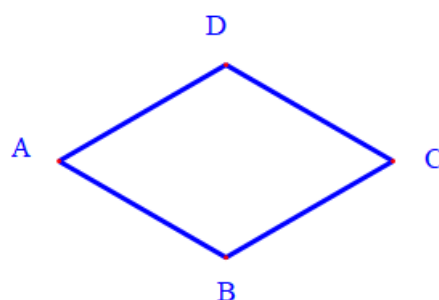
知识点 04 菱形的定义

1. 定义 四条边都_____的四边形叫作**菱形**。

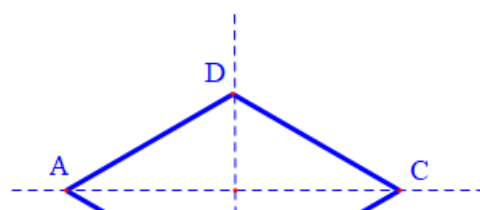
【即学即练】

如右图，在菱形 ABCD 中， $AB = BC = CD = AD$

求证：四边形 ABCD 是平行四边形



2. 菱形与平行四边形的关系



由上题可知菱形是一种特殊的平行四边形.

知识点 05 菱形的性质

菱形是一种特殊的平行四边形，所以它具有平行四边形的所有性质；

结合菱形的定义，我们可以从边、角、对角线三个角度思考，能得到菱形如下的一些**特殊**性质：

1. **定理** 菱形的两条对角线_____.

2. 菱形既是中心对称图形又是轴对称图形.

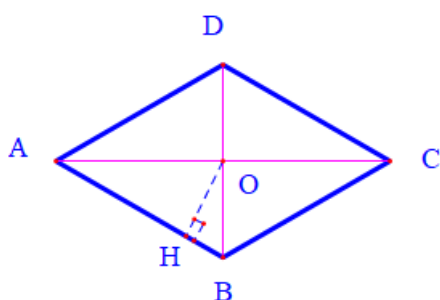
菱形的对称中心是_____，它有_____条对称轴,分别是_____.

3. 由菱形是轴对称图形可知，菱形的**对角线不仅互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角**.

【即学即练】

如右图，在菱形 ABCD 中， $AB=13\text{cm}$, $BD=10\text{cm}$ ，

求菱形的面积和 O 到 AB 的距离



4. 菱形的面积公式

①菱形是一种特殊的平行四边形，所以**菱形的面积等于底乘以高**；

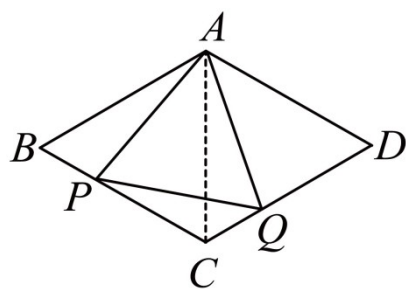
②菱形的面积等于等于**对角线乘积**的_____.

5. 菱形中的几何模型——含有 60° 内角的菱形

由菱形的定义可知菱形的四条边相等，当菱形中有一个内角是 60° 时，菱形的一条对角线把菱形分成两个等边三角形.

【即学即练】

如图，在菱形 ABCD 中， $\angle ABC=60^\circ$ ，P、Q 分别在 BC、CD 上，且 $\angle PAQ=60^\circ$ ，求证：PA=AQ.

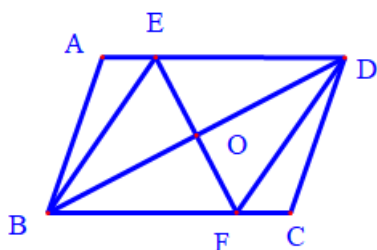


知识点 06 菱形的判定

1. 根据定义：四条边_____的四边形就是**菱形**.
2. 判定定理 1：有一组邻边_____的平行四边形是**菱形**.
3. 判定定理 2：对角线_____的平行四边形是**菱形**.

【即学即练】

如图， $\square ABCD$ 对角线 BD 的垂直平分线，交 AD 于点 E 交 BC 于点 F ，求证：四边形 $BFDE$ 为菱形.

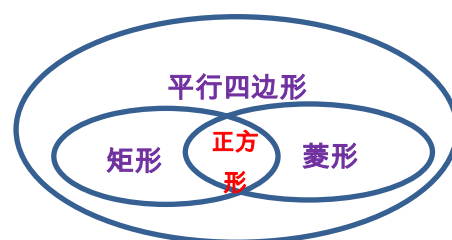


(三) 正方形

知识点 07 正方形的定义

1. 定义 四个角都是_____，四条边都_____的四边形叫作**正方形**.
2. 正方形与矩形、菱形、平行四边形的关系

正方形既是矩形又是菱形，更是一种特殊的平行四边形.



【即学即练】

求证：正方形的对角线把正方形分成四个全等的等腰直角三角形。

知识点 07 正方形的性质和判定

1. 正方形是一种特殊的平行四边形，它具有矩形、菱形、平行四边形的所有性质；

2. 正方形既是中心对称图形又是轴对称图形。

正方形的对称中心是_____，它有_____条对称轴，分别是_____。

3. 要判定一个四边形是正方形可以判定它既是_____又是_____。

【即学即练】

1. 能判别一个四边形是正方形的条件是 ()

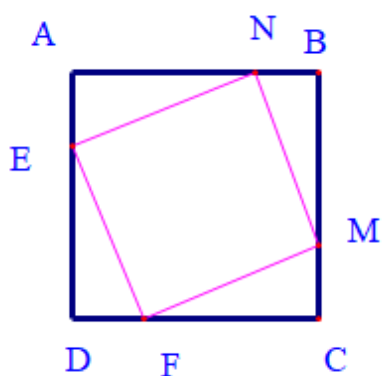
A. 对角线相等，对边平行且相等

B. 一组对边平行，一组对角相等

C. 对角线互相垂直平分且相等

D. 一组邻边相等，对角线互相平分

2. 如图，E、F、M、N 分别是正方形 ABCD 四条边上的点，且 $AE=BF=CM=DN$ ，求证：四边形 EFMN 是一个正方形。



知识点 08 正方形内的几何模型

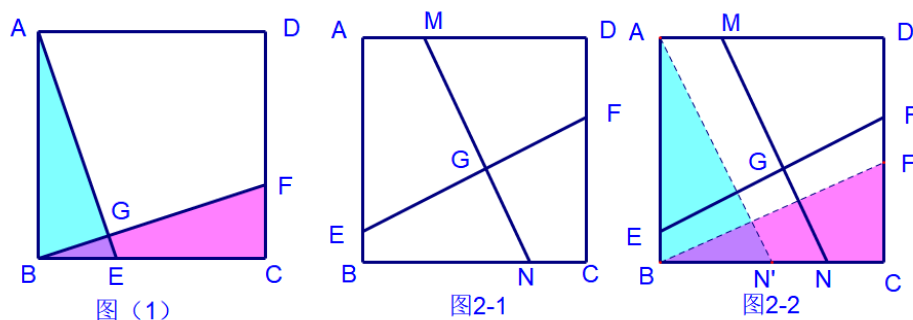
1. 十字架模型

1. 基本模型 (如图1) 条件：正方形 $ABCD$ 中，①若 $AE=BF$ ，则有结论： $AE \perp BF$ ；

②若 $AE \perp BF$ ，则有结论： $AE=BF$ 。

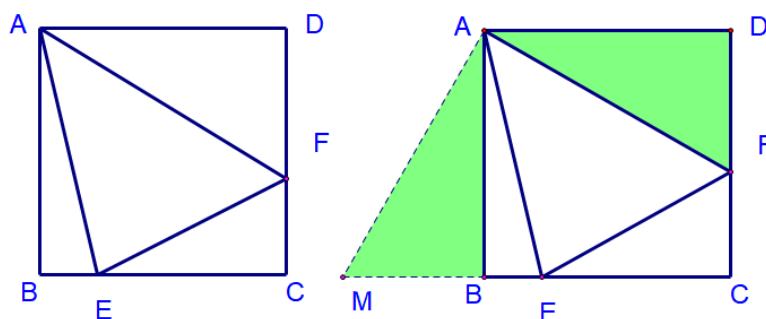
2. 进阶模型 (如图2) 条件：正方形 $ABCD$ 中，①若 $EF=MN$ ，则有结论： $EF \perp MN$ ；

②若 $EF \perp MN$ ，则有结论： $EF=MN$ 。



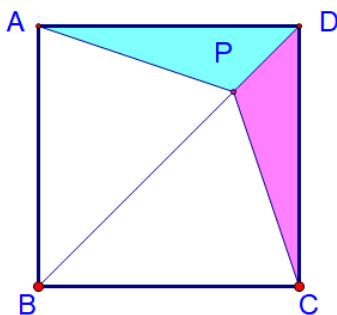
2. 半角模型

基本模型：如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在边 BC, CD 上，且 $\angle EAF = 45^\circ$ ，则 BE, EF, DF 之间的数量关系为 $EF=BE+DF$ ；



3. 飞镖模型

基本模型：如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 P 为对角线 BD 上任意一点，则有 $PA=PC$ 。



题型精讲

题型 01 相关命题的辨析

【典例 1】下列有关特殊平行四边形的性质说法正确的是 ()

- A . 菱形的对角线相等且互相平分
- B . 矩形的对角线互相垂直平分
- C . 菱形的四个角相等
- D . 正方形的对角线互相垂直平分且相等

【变式 1】下列命题中，属于假命题的是 ()

- A . 矩形的对角线互相平分
- B . 菱形的对角线互相垂直
- C . 平行四边形的邻角相等
- D . 正方形的对角线互相垂直平分且相等

【变式 2】下列选项的命题中，是真命题的是 ()

- A . 有三边相等的四边形是菱形
- B . 四个角相等的菱形是正方形
- C . 两条对角线互相平分的四边形是矩形
- D . 两条对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

【变式 3】下列命题中，逆命题是真命题的是 () .

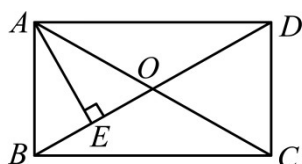
- A . 菱形是对角线互相垂直的四边形
- B . 矩形既是轴对称图形，又是中心对称图形
- C . 正方形是对角线互相垂直且相等的四边形
- D . 平行四边形是对角线互相平分的四边形

【变式 4】平行四边形，矩形，菱形，等边三角形，正方形中是轴对称图形的有 () .

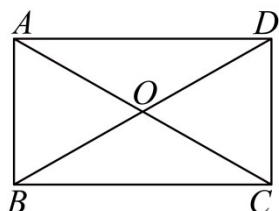
- A . 1 个
- B . 2 个
- C . 3 个
- D . 4 个

题型 02 利用矩形的性质计算和证明

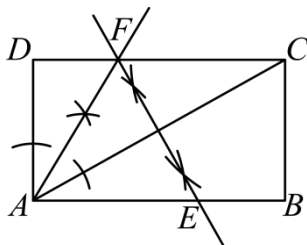
【典例 1】 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=1$ ，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AE \perp BD$ 于 E ，若 $BE=EO$ ，则 AD 的长是_____。



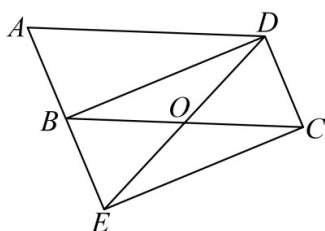
【变式 1】 如图，矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 交于 O 点，若 $\angle BOC = 120^\circ, AB = 2$ ，则 BC 的长为_____。



【变式 2】 如图， AC 是矩形 $ABCD$ 的一条对角线，依据尺规作图的痕迹， AF 与 EF 的交点为 F ，则 $\angle AFE$ 的度数是_____。



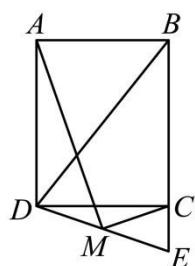
【变式 3】 如图，将 $\square ABCD$ 的边 AB 延长至点 E ，使 $AB = BE$ ，连接 DE, EC ， DE 交 BC 于点 O 。



(1) 求证： $\triangle ABD \cong \triangle BEC$ ；

(2) 连接 BD ，若四边形 $BECD$ 是矩形，求证： $\angle BOD = 2\angle A$ 。

【变式 4】 如图，矩形 $ABCD$ 中，点 E 为 BC 边延长线上一点，若 $BD = BE$ ，连接 DE ， M 为 DE 的中点，连接 AM, CM 。

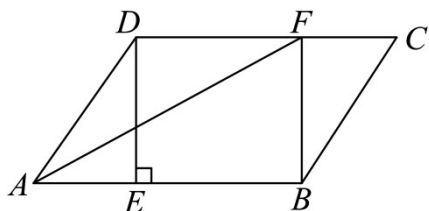


(1) 求证： $AM \perp CM$.

(2) 若 $DC = 6$, $BD = 10$, 求四边形 $AMCB$ 的面积 .

题型 03 矩形的判定

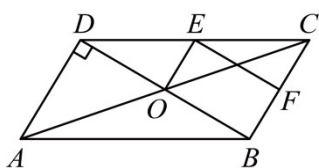
【典例 1】 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，点 F 在 CD 边上， $CF = AE$ ，连接 AF ， BF .



(1) 求证：四边形 $BFDE$ 是矩形；

(2) 若 AF 平分 $\angle DAB$ ， $CF = 3$ ， $DF = 5$ ，求四边形 $BFDE$ 的面积 .

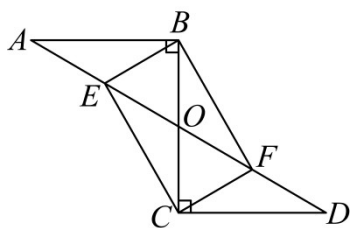
【变式 1】 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $AD \perp BD$ ， $OE \parallel BC$ 交 CD 于点 E ，过 E 作 $EF \parallel BD$ ，交 BC 于点 F .



(1) 求证：四边形 $OEFB$ 是矩形；

(2) 若 $AD = 6$ ， $\triangle OBC$ 的面积为 12 . 求 AB 的长 .

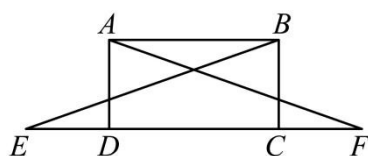
【变式 2】 如图， AD 和 BC 相交于点 O ， $\angle ABO = \angle DCO = 90^\circ$ ， $OB = OC$ ， E ， F 分别是 AO ， DO 的中点 .



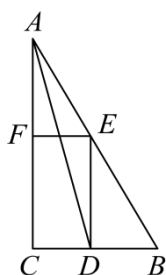
(1) 求证： $OE = OF$.

(2) 当 $\angle A = 30^\circ$ 时，求证：四边形 $BECF$ 是矩形 .

【变式3】 如图，在 $\square ABCD$ 中，延长 CD 至点 E ，延长 DC 至点 F ，且 $DE = CF, BE = AF$. 求证：
 $\square ABCD$ 是矩形 .



【变式4】 如图所示，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D ，过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 AB 于点 E ， F 为 AC 上一点，且 $CF = AE$ ，连接 EF .

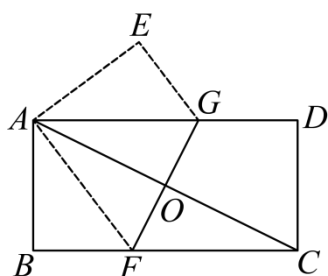


(1) 求证： $AE = DE$;

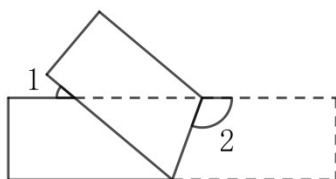
(2) 求证：四边形 $CDEF$ 为矩形 .

题型 04 矩形的折叠问题

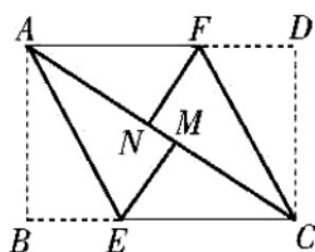
【典例1】 如图，将一矩形纸片 $ABCD$ 折叠，使两个顶点 A, C 重合，折痕为 FG . 若 $AB=4, BC=8$ ，则 $\triangle ABF$ 的面积为_____ .



【变式1】将一矩形纸条按如图所示折叠，若 $\angle 1=40^\circ$ ，则 $\angle 2=$ _____°.

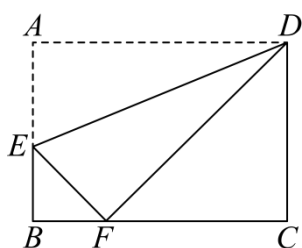


【变式2】如图， AC 为矩形 $ABCD$ 的对角线，将边 AB 沿 AE 折叠，使点 B 落在 AC 上的点 M 处，将边 CD 沿 CF 折叠，使点 D 落在 AC 上的点 N 处，易证四边形 $AECF$ 是平行四边形．要使四边形 $AECF$ 是菱形，则 $\angle BAE$ 的度数是()



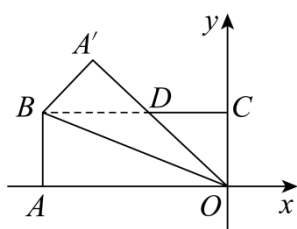
- A . 30° B . 40° C . 45° D . 50°

【变式3】如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AD=15$ ， $AB=9$ ．点 E 是边 AB 上一点，将 $\triangle ADE$ 沿 DE 所在直线折叠，使得点 A 恰好落在 CB 边上点 F 处，则 EF 的长是()



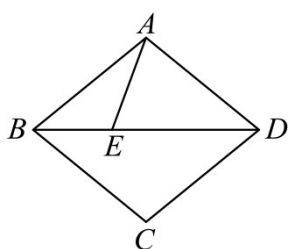
- A . 4 B . 5 C . $2\sqrt{5}$ D . $3\sqrt{2}$

【变式4】将矩形 $ABCO$ 按如图方式放置在平面直角坐标系中， $AB=4$ ， $OA=8$ ，若将其沿着对角线 OB 对折后，点 A 的对应点为 A' ， OA' 与 BC 交于点 D ，则点 D 的坐标为_____.



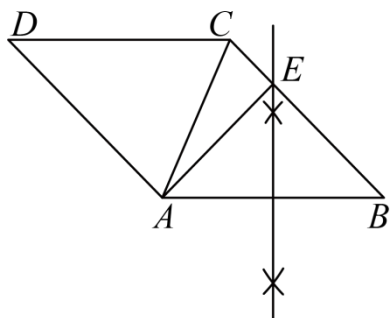
题型 05 利用菱形的性质计算和证明

【典例 1】 如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E 为对角线 BD 上的一点，且 $DE = AB$. 连接 AE , 若 $\angle ABC = 80^\circ$, 则 $\angle AED$ 的度数为 ()



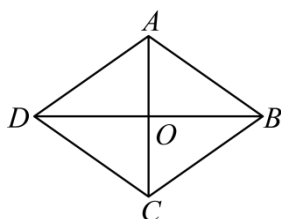
- A . 40° B . 50° C . 70° D . 80°

【变式 1】 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle B = 50^\circ$, 取大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径，分别以点 A, B 为圆心作弧相交于两点，过此两点的直线交 BC 边于点 E (作图痕迹如图所示) , 连接 AE, AC , 则 $\angle CAE$ 的度数为 ()



- A . 20° B . 25° C . 40° D . 15°

【变式 2】 如图，在周长为 20 的菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O . 已知 $AC = 6$, 则 BD 的长为 ()



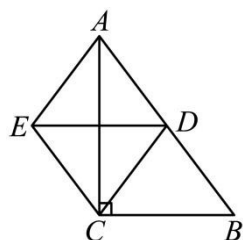
A . 4

B . 3

C . 8

D . 14

【变式3】如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $AC = 4$ ， D 为 AB 的中点， $AE \parallel CD$ ， $CE \parallel AB$ ，则四边形 $ADCE$ 的对角线 ED 的长为 ()



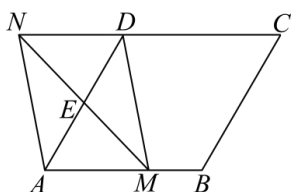
A . $\frac{12}{5}$

B . 3

C . 4

D . 5

【变式4】如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 60^\circ$ ，点 E 是 AD 边的中点．点 M 是 AB 边上一动点（不与点 A 重合），延长 ME 交射线 CD 的延长线于点 N ，连接 MD, AN ．

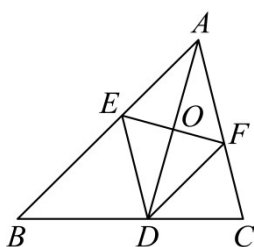


(1) 求证： $\triangle NED \cong \triangle MEA$ ；

(2) 当点 M 在什么位置时，四边形 $AMDN$ 是矩形？请证明你的结论．

题型 06 菱形的判定

【典例1】如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，线段 AD 的垂直平分线分别交 AB 和 AC 于点 E, F ． EF 与 AD 交于点 O ，连接 DE, DF ．

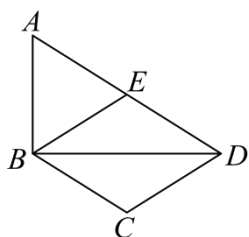


(1) 求证：四边形 $AEDF$ 是菱形；

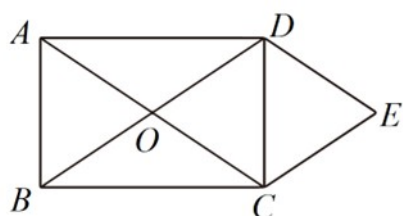
(2) 填空：若 $\angle BAC = 60^\circ$ ， $AD = 6$ ，则四边形 $AEDF$ 的周长为_____．

【变式1】如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD = 2BC$ ， E 为 AD 的中点，连接 BD, BE ，

$\angle ABD = 90^\circ$ 求证：四边形 $BCDE$ 为菱形．



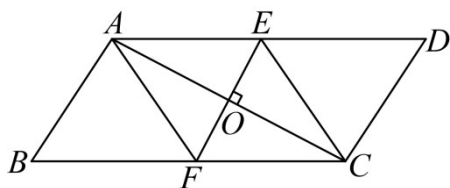
【变式2】 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $DE \parallel AC$ ， $CE \parallel BD$ 。



(1) 求证：四边形 $OCED$ 是菱形；

(2) 若 $\angle BDC = 60^\circ$ ， $DC = 2$ ，求矩形 $ABCD$ 的面积。

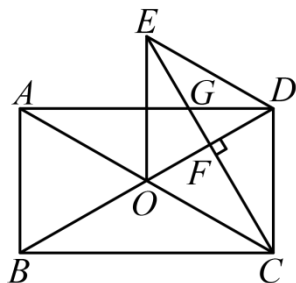
【变式3】 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 的垂直平分线 EF 与 AD 相交于点 E ，与 BC 相交于点 F ，连接 AF ， CE 。



(1) 求证：四边形 $AFCE$ 是菱形；

(2) 若四边形 $AFCE$ 的周长是 40，两条对角线的和是 28，求四边形 $AFCE$ 的面积。

【变式4】 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $CD \parallel OE$ ，直线 CE 是线段 OD 的垂直平分线， CE 分别交 OD ， AD 于点 F ， G ，连接 DE 。

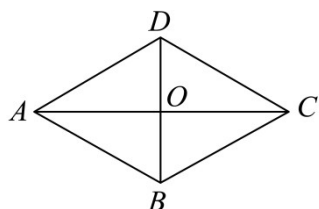


(1) 判断四边形 $OCDE$ 的形状，并说明理由；

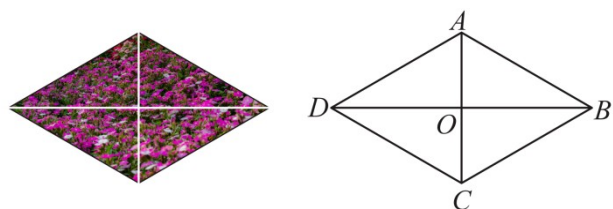
(2) 当 $BC = 4$ 时，求四边形 $OCDE$ 的面积。

题型 07 菱形的面积

【典例 1】如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O ， $AB = BD = 6$ ，则菱形 $ABCD$ 的面积是_____。



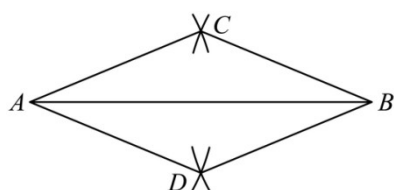
【变式 1】如图，菱形花坛 $ABCD$ 的边 AD 的长为 10m ， $\angle DAB = 120^\circ$ ，沿着该菱形的对角线修建两条小路 AC 和 BD ， AC 与 BD 相交于点 O 。



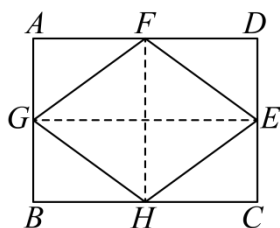
(1) 求 AC 和 BD 的长；

(2) 求菱形花坛 $ABCD$ 的面积。

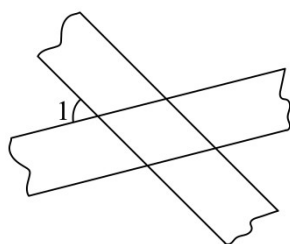
【变式 2】如图，已知线段 $AB = 8\sqrt{2}\text{cm}$ ，分别以点 A, B 为圆心，以 6cm 为半径画弧，两弧相交于点 C, D ，连接 AC, BC, AD, BD ，则四边形 $ACBD$ 的面积为_____ cm^2 。



【变式 3】如图，将矩形纸片 $ABCD$ 对折，使边 AB 与 DC ， BC 与 AD 分别重合，展开并顺次连接折痕端点后得到四边形 $EFGH$ 。若 $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，则四边形 $EFGH$ 的面积为_____。



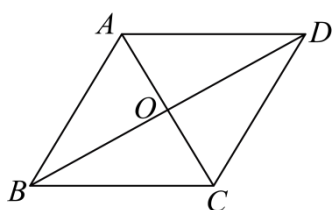
【变式 4】如图，两条长边平行，宽为 1 的长纸条交叉叠放，若 $\angle 1 = 60^\circ$ ，则重叠部分的面积为_____。



题型 08 菱形中的几何模型——含有 60° 内角的菱形

【典例 1】菱形的一个内角是 60° ，边长是 5cm ，则这个菱形的较长的对角线长是 ()

- A. $\frac{5}{2}\text{cm}$ B. 5cm C. $5\sqrt{3}\text{cm}$ D. $10\sqrt{3}\text{cm}$



【变式 1】菱形的周长为 24cm ，其中一个内角为 60° ，则该菱形较短的对角线的长为 ()

- A. 12cm B. $12\sqrt{3}\text{cm}$ C. 6cm D. $6\sqrt{3}\text{cm}$

【变式 2】在菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ，点 E, F 分别是边 AB, BC 上的点。

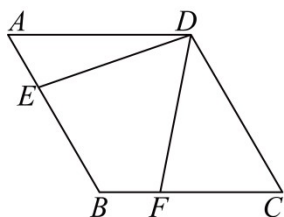


图1

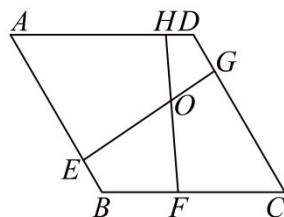


图2

【尝试初探】

(1) 如图 1，若 $\angle EDF = 60^\circ$ ，求证： $DE = DF$

【深入探究】

(2) 如图 2，点 G, H 分别是边 CD, AD 上的点，连接 EG 与 FH 相交于点 O 且 $\angle EOF = 60^\circ$ ，求证：
 $EG = FH$

【变式 3】尺规作图问题：如图 1，菱形 $ABCD$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，点 E 是边 BC 上一点 (不含 B, C)，连接 AE 。
用尺规在 CD 边上找到点 F ，连结 AF, EF ，使 $\angle AFE = 60^\circ$ 。

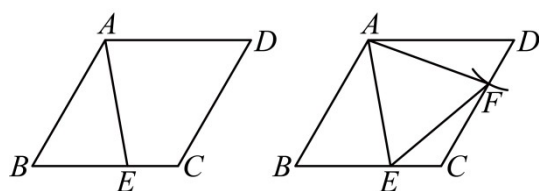


图1

图2

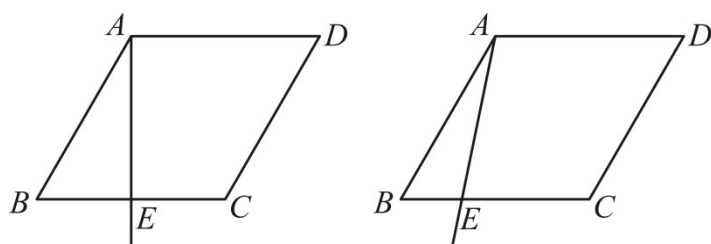
小明：如图2，以D为圆心，CE长为半径作弧，交DC于点F，连结AF,EF，则 $\angle AFE = 60^\circ$ 。

小丽：以点A为圆心，AE长为半径作弧，交CD于点F，连结AF,EF，则 $\angle AFE = 60^\circ$ 。

(1)如图2，请你证明小明的作法是正确的。

(2)指出小丽作法中存在的问题。

【变式4】综合与探究：如图，在菱形ABCD中， $\angle B = 60^\circ$ ，E是射线CB上一动点，作射线AE。



图①

图②

(1) **【操作判断】**

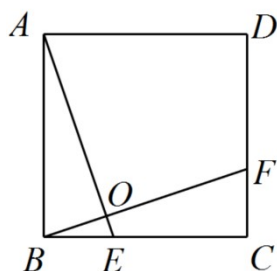
如图①， $AE \perp BC$ ，将射线AE绕点A逆时针旋转 60° 交CD于点F，根据题意在图①中画出射线AF，图中 $\angle AFD$ 的度数为_____度；

(2) **【问题探究】**

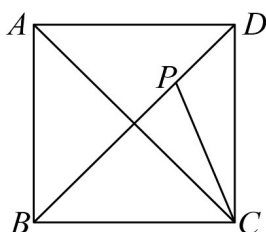
如图②，点E在线段BC上（不与点B，C重合），将射线AE绕点A逆时针旋转 60° 交CD于点F，探究线段AB，CE，CF之间的数量关系，并说明理由：

题型09 利用正方形的性质计算和证明

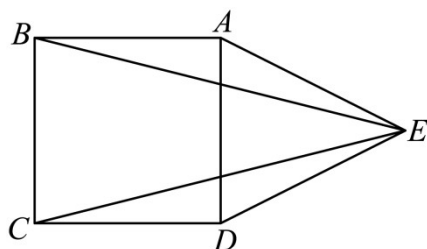
【典例1】如图，在正方形ABCD中，点E，F分别在BC，CD上，且 $BE = CF$ 。AE与BF交于点O。猜想：AE与BF的关系，并给出证明。



【变式1】如图，已知 P 是正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上一点，且 $BP = BC$ ，则 $\angle DCP$ 度数是_____。



【变式2】如图，在正方形 $ABCD$ 的外侧，作等边三角形 ADE ，连接 BE ， CE 。



(1)求证： $\triangle BAE \cong \triangle CDE$ ；

(2)求 $\angle BEC$ 的度数。

【变式3】如图1，在边长为2的正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 AC 上，点 F 在射线 BC 上，作正方形 $DEFG$ ，连接 BE ，连接 CG 。

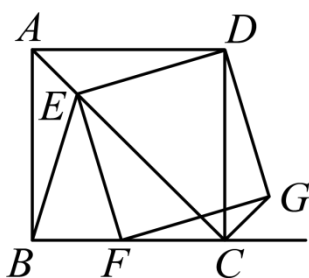


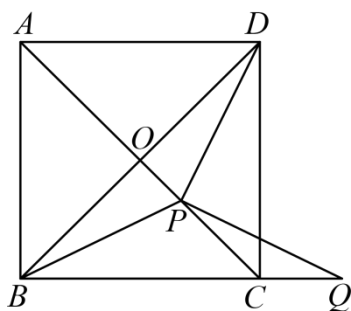
图1

(1)求证： $\triangle DAE \cong \triangle DCG$ ；

(2)求证： $\angle BEF = 2\angle CFG$ ；

【变式4】如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，对角线 AC ， BD 相交于点 O 。点 P 是线段 OC 上一点（不与

O, C 重合)，连接 PD, PB 。点 Q 在 BC 的延长线上，且 $PB = PQ$ 。



(1) 请直接写出 PD 和 PB 的数量关系：_____；

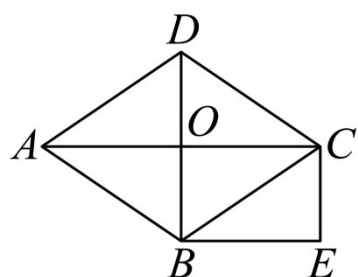
(2) 求证： $\angle DPQ = 90^\circ$ ；

(3) 探究 CQ 与 OP 的数量关系，并说明理由。

题型 10 正方形的判定

【典例 1】 判断四个命题：①对角线互相垂直且相等的四边形是正方形；②对角线互相垂直的矩形是正方形；③对角线相等的菱形是正方形；④对角线互相垂直且互相平分的四边形是正方形。命题成立的是（填序号）_____。

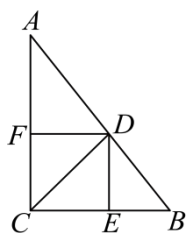
【变式 1】 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，过点 C 作 BD 的平行线，过点 B 作 AC 的平行线，两直线相交于点 E 。



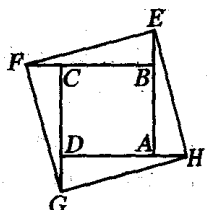
(1) 求证：四边形 $OBEC$ 是矩形；

(2) 当 $\angle ABC =$ _____ $^\circ$ 时，四边形 $OBEC$ 是正方形，并证明你的结论。

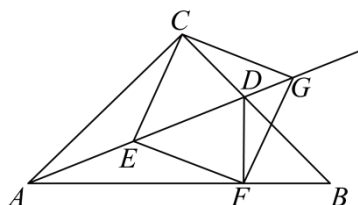
【变式 2】 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是 $\angle ABC$ 的角平分线， $DE \perp BC$ ， $DF \perp AC$ ，垂足分别为 E, F ，求证：四边形 $CEDF$ 是正方形。



【变式3】 已知：如图，顺次延长正方形 $ABCD$ 的各边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 至 E 、 F 、 G 、 H ， $BE = CF = DG = AH$ 。求证：四边形 $EFGH$ 是正方形。



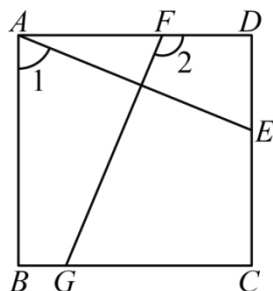
【变式4】 已知：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 在 BC 上， $DF \perp AB$ ，垂足为 F ，且 $DF = CD$ ，点 E 为线段 AD 的中点，过点 F 作 $FG \parallel CE$ 交射线 AD 于 G ，连接 CG 。



- (1) 求证： $\angle CEG = \angle FEG$ ；
- (2) 求证：四边形 $CEFG$ 是菱形。
- (3) 当 $AC = BC$ 时，求证：四边形 $CEFG$ 是正方形。

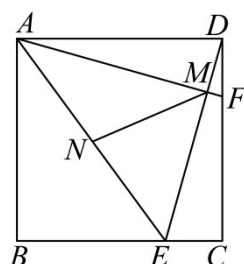
题型 11 正方形中的几何模型

【典例1】 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 、 G 分别在边 CD 、 AD 、 BC 上， $FD < CG$ 。若 $FG = AE$ ， $\angle 1 = 2\alpha$ ，则 $\angle 2$ 的度数为_____（用含 α 的式子表示）。



【变式1】 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别为 BC 、 CD 边上的点， AF 与 DE 交于点 M ， N 为 AE

的中点，连接 MN ，若 $AB = 4$ ， $CE = DF$ ， $CF = 3DF$ ，则 MN 的长度为_____。



【变式2】【观察猜想】我们知道，正方形的四条边都相等，四个角都为直角。

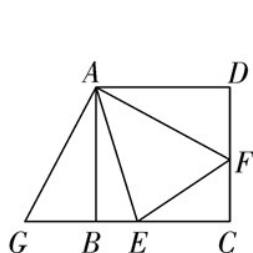


图 1

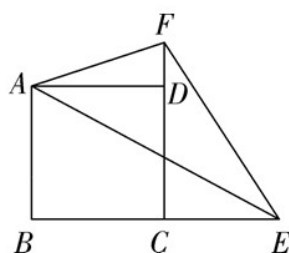
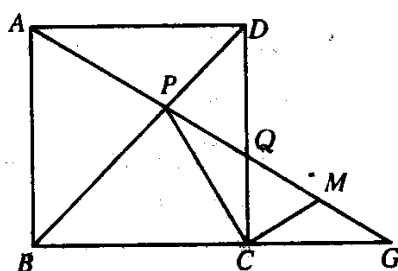


图 2

(1) 如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在边 BC, CD 上，连接 AE, AF, EF ，并延长 CB 到点 G ，使 $BG = DF$ ，连接 AG 。若 $\angle EAF = 45^\circ$ ，则 BE, EF, DF 之间的数量关系为_____；

【类比探究】(2) 如图 2，当点 E, F 分别在线段 BC, CD 的延长线上，且 $\angle EAF = 45^\circ$ 时，试探究 BE, EF, DF 之间的数量关系，并说明理由。

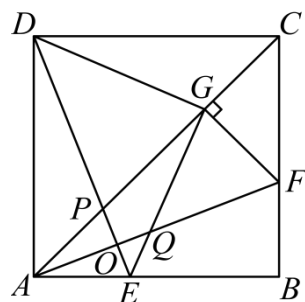
【变式3】如图，在正方形 $ABCD$ 中， P 是 BD 上一点， AP 的延长线交 CD 于 Q ，交 BC 的延长线于 G ， M 是 GQ 的中点。求证： $PC \perp MC$ 。



【变式4】【问题情境】

如图，小昕同学在正方形纸板 $ABCD$ 的边 AB, BC 上分别取点 E, F ，且 $AF \perp DE$ ， AF 交 DE 于点 O 。

连接 AC ，过点 F 作 $FG \perp AC$ ，垂足为 G ，连接 GD 、 GE ， DE 交 AC 于点 P ， GE 交 AF 于点 Q 。



【活动猜想】

(1) AE 与 BF 的数量关系是_____

【探索发现】

(2) DG 和 EG 的数量关系是_____，位置关系是_____；

强化训练

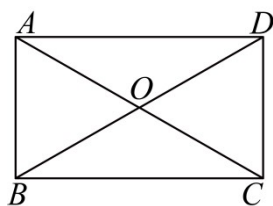
1. 下列命题是真命题是 ()

- A. 一组对边平行，另一组对边相等的四边形是平行四边形
- B. 菱形的对角线相等
- C. 平行四边形既是中心对称图形，又是轴对称图形
- D. 对角线相等的平行四边形是矩形

2. 菱形、正方形一定具有而矩形不一定具有的性质是 ()

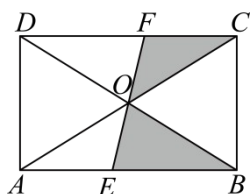
- A. 对边相等
- B. 对边平行
- C. 对角线互相平分
- D. 对角线互相垂直

3. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O ，如果 $\angle ADB = 28^\circ$ ，那么 $\angle AOB$ 的度数为 ()



- A . 52° B . 54° C . 56° D . 58°

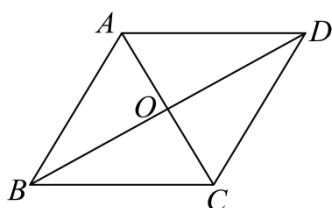
4. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，过点 O 的直线 EF 分别交 AB ， CD 于点 E ， F ，若矩形面积为 12，则阴影部分的面积为 ()



- A . 3 B . 6 C . 4 D . 8

5. 菱形的一个内角是 60° ，边长是 5cm，则这个菱形的较长的对角线长是 ()

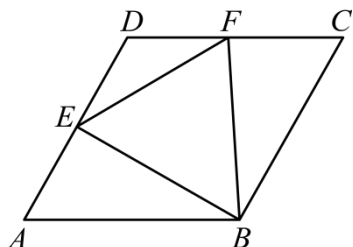
- A . $\frac{5}{2} \text{cm}$ B . 5cm C . $5\sqrt{3} \text{cm}$ D . $10\sqrt{3} \text{cm}$



6. 菱形 $ABCD$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $AB = 2$ ，菱形 $ABCD$ 面积是 ()

- A . $2\sqrt{3}$ B . $3\sqrt{3}$ C . 4 D . 3

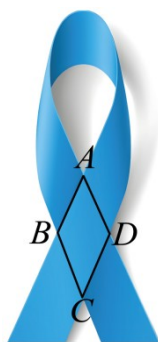
7. 如图菱形 $ABCD$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， $AB = 6$ ，点 E 、 F 分别为 AD 、 DC 上的动点， $\angle EBF = 60^\circ$ ，点 E 从点 A 向点 D 运动过程中， $AE + CF$ 的长度 () .



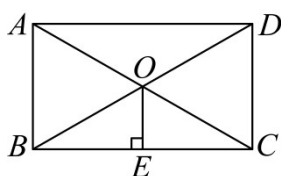
- A . 恒等于 6 B . 恒等于 9 C . 逐渐增加 D . 先增加再减小

8. “蓝丝带”一般指蓝丝带海洋保护协会，同时也象征着对保护海洋的呼吁，李老师用一段矩形绸缎制作了

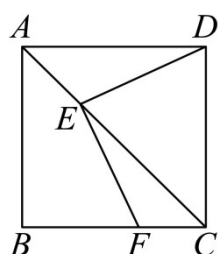
一条如图所示宽为6cm的蓝丝带，若 $\angle BAD = 45^\circ$ ，则重叠部分图形的面积是____ cm^2 。



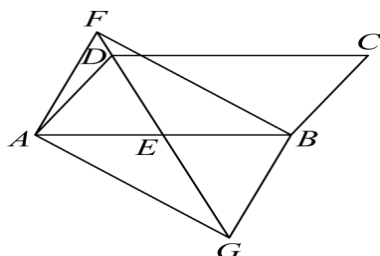
9. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， O 是对角线 AC 和 BD 的交点， E 是边 BC 上一点，且 $OE \perp BC$ ，若 $\angle AOB = 60^\circ$ ， $OE = 3$ ，则 AC 的长是_____。



10. 如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E 为对角线 AC 上一点，连接 DE ，过点 E 作 $EF \perp DE$ ，交射线 BC 于点 F 。当线段 DE 与正方形 $ABCD$ 的某条边的夹角是 25° 时，则 $\angle EFC$ 的度数是_____。

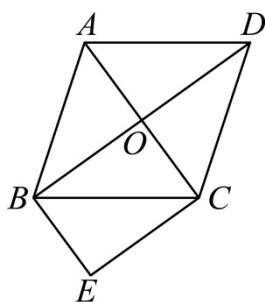


11. 如图，在 $\square ABCD$ 中， E 为 AB 的中点， F 为 ED 延长线上一点，连接 AF ， BF ，过点 B 作 $BG \parallel AF$ 交 FE 的延长线于点 G ，连接 AG 。

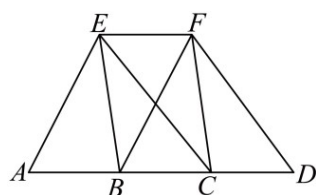


- (1) 求证： $\triangle AEF \cong \triangle BEG$ ；
 (2) 若 $EF = \frac{1}{2}CD$ ，请判断四边形 $AGBF$ 的形状，并证明你的结论。

12. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $BE \parallel AC$ ， $CE \parallel DB$ 。求证：四边形 $OBEC$ 是矩形。



13. 如图，点 A ， B ， C ， D 在同一条直线上， $AB = BC$ ， $\triangle AEC \cong \triangle BFD$ ，连接 BE ， CF ， EF 。

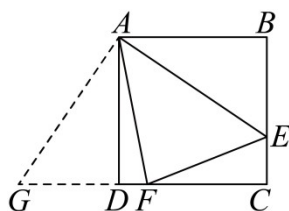


- (1) 求证： $BE = CF$ ；
(2) 当 $\angle A = \angle D$ 时，求证四边形 $BCFE$ 是矩形。

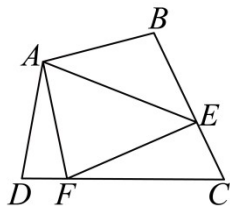
14. (1) 特例探究：如图①，在正方形 $ABCD$ 中， E ， F 分别为 BC ， CD 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ，探究 BE ， EF ， DF 之间的数量关系。小明是这么思考的：延长 FD ，截取 $DG = BE$ ，连接 AG ，易证 $\triangle ADG \cong \triangle ABE$ ，从而得到 $AG = AE$ ，再由“SAS”证明 $\triangle AGF \cong \triangle AEF$ ，从而得出结论：

_____。

- (2) 一般探究：如图②，在四边形 $ABCD$ 中， $AD = AB$ ， $\angle B$ 与 $\angle D$ 互补， E ， F 分别是 BC ， CD 上的点，且满足 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$ ，探究 BE ， EF ， DF 之间的数量关系。

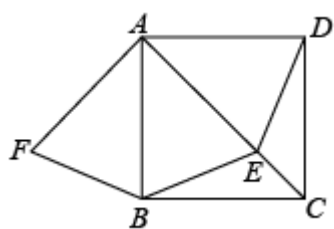


图①



图②

15. 如图，正方形 $ABCD$ ，动点 E 在 AC 上， $AF \perp AC$ ，垂足为 A ， $AF = AE$ 。



(1) 求证： $BF=DE$ ；

(2) 当点 E 运动到 AC 中点时（其他条件都保持不变），问四边形 $AFBE$ 是什么特殊四边形？说明理由。